MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 - ZIMNÍ SEMESTR 2024–2025
POČETNÍ PŘÍKLADY KE CVIČENÍ

LUBOŠ PICK

1. Opakování středoškolské látky, logika, matematická indukce

Příklad 1.1. Řešte následující nerovnice v $\mathbb{R}$:
$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0, \qquad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

Příklad 1.2. Nakreslete graf funkce $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

Příklad 1.3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$.

Příklad 1.4. Dokažte následující formulky:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

Příklad 1.5. (i) Dokažte, že $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$.
(ii) Pro která $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?
(iii) Dokažte pomocí vhodného protipříkladu, že neplatí výrok
$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n^2+n+41 \quad \text{je prvočíslo.}$$
(iv) Nyní dokažte, že neplatí ani výrok
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n < 41: \quad n^2+n+41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

Příklad 1.6. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$:
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Příklad 1.7. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

Příklad 1.8. Dokažte pro a, $b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \leq |a|+|b|$, $\qquad ||a|-|b|| \leq |a-b|$.

Příklad 1.9. (i) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n$. Dokažte!
(ii) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$, platí $n^2 \leq 2^n$. Dokažte!

Příklad 1.10. Řešte rovnice:
$$\sin 2x = \sin x, \quad 2\sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2+1) = 2\log(3-x).$$

Příklad 1.11. Sečtěte: $\sin x + \cdots + \sin nx$.

Příklad 1.12.
$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

Příklad 1.13. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí:
$$(n+1)^n \leq n^{n+1}.$$

Výsledky

- Příklad 1.1: $\langle 4,6\rangle$; $\langle 1,2\rangle$; $(-6,-3)\cup\Big((-1-\sqrt{13})/2,(-1+\sqrt{13})/2\Big)$
- Příklad 1.3: $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, $H(f)=(-\infty,-1]\cup(0,1]$.
- Příklad 1.4: Použijte matematickou indukci.
- Příklad 1.5: (ii) $n=k^2$, $k\in\mathbb{N}$; (iii) $n=41$; (iv) $n=40$.
- Příklad 1.7: Použijeme-li Moivreovu větu nebo součtové vzorce dostaneme:
$$\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x,$$
$$\sin 5x=5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x.$$
- Příklad 1.8: První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první.
- Příklad 1.9: Použijte matematickou indukci.
- Příklad 1.10: 1. rovnice: $x=k\pi$ nebo $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ nebo $x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$, kde $k\in\mathbb{Z}$; 2. rovnice: $x=2k\pi$ nebo $x=\pi-\arcsin(4/5)+2k\pi$, kde $k\in\mathbb{Z}$; 3. rovnice: $4/3$
- Příklad 1.11: Vhodným použitím Moivreovy věty a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme:
$$\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(x/2)}\qquad \text{pro } x\neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$
Pokud $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pak je součet roven nule.
- Příklad 1.12: Použijte binomickou větu na výrazy $(1+1)^{2n}$ a $(1-1)^{2n}$. Výsledek: 2^{2n-1}.
- Příklad 1.13: Použijte matematickou indukci nebo aplikujte binomickou větu na $(n+1)^n$ a pak odhadněte členy binomického rozvoje.

2. Výroky, kvantifikátory, zobrazení, supremum a infimum

Příklad 2.1. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.
$$\forall x\in\mathbb{N}\ \exists y\in\mathbb{N}:\ (z>x \implies y<z)$$
$$\forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \exists\alpha\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R}:(x\in(a,a+\varepsilon)\iff |x-\alpha|<1);$$
$$\exists a\in\mathbb{R}\ \forall\varepsilon>0\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}:(x\in(a,a+\varepsilon)\iff |x-\alpha|<1).$$

Příklad 2.2. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů (podle R. Smullyana): (i) Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně, tak se zeptáte B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je mezi námi jediný poctivec“. Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C?

(ii) A řekne: „Buď jsem já padouch a nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iii) A řekne: „Já jsem padouch, ale B je poctivec.“ Co jsou A a B?

(iv) A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se zeptáte C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co odpoví C?

Příklad 2.3. Zjistěte, zda následující množiny mají supremum a infimum. Pokud ano, určete je.
- $A=\left\{-\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$,
- $B=\left\{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$,
- $C=\left\{n^{(-1)^n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$,
- $D=\left\{q\in\mathbb{Q};\ q<\sqrt{3}\right\}$,
- $E=\{\sin x\cos x;\ x\in\mathbb{R}\}$.

Příklad 2.4. Charakterizujte zobrazení $f:M\to L$, pro která platí
- $\forall A\subset M: f^{-1}(f(A))=A$,
- $\forall B\subset L: f(f^{-1}(B))=B$.

Příklad 2.5. Nalezněte suprema a infima následujících množin (pokud existují):
- $A=\{p/(p+q);\ p\in\mathbb{N},\ q\in\mathbb{N}\}$,

- $B = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
- $C = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$,
- $D = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$,
- $E = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Výsledky

- Příklad 2.1: Všechny výroky jsou pravdivé.
- Příklad 2.2: (i) B je padouch a C je poctivec;
  (ii) oba jsou poctivci;
  (iii) oba jsou padouši;
  (iv) ano.
- Příklad 2.3: $\sup A = 0$, $\inf A = -1$; $\sup B = \frac{3}{2}$, $\inf B = 0$; $\sup C$ neexistuje, $\inf C = 0$; $\sup D = \sqrt{3}$, $\inf D$ neexistuje; $\sup E = \frac{1}{2}$, $\inf E = -\frac{1}{2}$.

3. Limita posloupnosti reálných čísel

Příklad 3.1. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7}.$$

Příklad 3.2. Spočtěte limity následujících posloupností:

$$\left\{ \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\}, \qquad \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} \right\}, \qquad \left\{ \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4} \right\}.$$

Příklad 3.3. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}.$$

Příklad 3.4. Vypočtěte: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$ pro $a > b > 0$.

Příklad 3.5. Spočtěte limity:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}}.$$

Příklad 3.6. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \qquad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}.$$

Příklad 3.7. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}.$$

Příklad 3.8. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 + \sin(n+1)) \left(\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1} \right).$$

Příklad 3.9. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right),$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Výsledky

- Příklad 3.1: 0, 2, 2
- Příklad 3.2: $-1/2$, $1/3$, $1/4$
- Příklad 3.3: 1-4. 0, 4, 0, 0

  5. Víme, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^k} = +\infty$. Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \ n^2 \leq n^3 \leq n^4 \leq 2^n \leq 3^n \leq 4^n.$$

Platí tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \ 4 \leq \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} \leq 4\sqrt[n]{6}.$$

Víme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} = 1$ a proto podle věty o dvou policajtech dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} = 4.$$

  6. 2/3

- Příklad 3.4: $1/a$
- Příklad 3.5:1.-4. 0, 0, 0, 1

  5. Nejprve upravíme výraz, jehož limitu máme spočítat.

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}}$$
$$= \frac{(n^3+n)^{\frac{1}{3}} - (n^3+1)^{\frac{1}{3}}}{(n^3+2n)^{\frac{1}{3}} - (n^3+n)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(n^3+n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}} \cdot$$
$$\cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+2n)^{\frac{1}{3}}(n^3+n)^{\frac{1}{3}} + (n^3+n)^{\frac{2}{3}}}{(n^3+n)^{\frac{2}{3}} + (n^3+n)^{\frac{1}{3}}(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + (n^3+1)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{2}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}} + (1+\frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}} + (1+\frac{1}{n^3})^{\frac{2}{3}}}$$

Odtud již vyplývá, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}} = 1.$

- Příklad 3.6: 1. Limita neexistuje.

  2. Spočítejme nejprve tuto limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1 + \sqrt{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^6}}} = 1.$$

Zde jsme využili větu o aritmetice limit a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Z výše uvedeného a věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^3\sqrt[2n]{2n}}{(2n)^3 + \sqrt[4n]{2n}} = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} -\frac{(2n+1)^3\sqrt[2n+1]{2n+1}}{(2n+1)^3 + \sqrt[4n+2]{2n+1}} = -1.$$

To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

- Příklad 3.7: Platí:

$$\begin{aligned}(n+4)^{100}-(n+3)^{100} &= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}4^j-\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}3^j\\ &= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}(4^j-3^j)=100n^{99}+P_1(n);\\ (n+2)^{100}-n^{100} &= 200n^{99}+P_2(n),\end{aligned}$$

  kde $P_1,\ P_2$ jsou polynomy stupně ostře menšího než 99. Pro tyto polynomy tedy platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_1(n)}{n^{99}}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{P_2(n)}{n^{99}}=0.$$

  Dostáváme tak:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}=\lim_{n\to\infty}\frac{100+\frac{P_1(n)}{n^{99}}}{200+\frac{P_2(n)}{n^{99}}}=1/2.$$

- Příklad 3.8: Platí

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\\ &=\lim_{n\to+\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\cdot\frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}.\end{aligned}$$

  Víme, že platí:
  (1) $\forall n\in\mathbb{N}:\ |\sin(n+1)|\le 1$,
  (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.
  Z (1) a (2) plyne $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)}{n^2}=0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot\left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

- Příklad 3.9: 3, 1/2

4. Limita funkce

Příklad 4.1. Spočtěte:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x},\qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$$

Příklad 4.2. Spočtěte:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9},\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\quad(n\in\mathbb{N}),\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

Příklad 4.3. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+7x}-x\right),\qquad \lim_{x\to0}\frac{\log\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to0+}(e^x-1)^{\frac{(\operatorname{tg}x)^2}{\sqrt[3]{x^2}}}.$$

Příklad 4.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\,2^x}{1+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x\to\infty}\log(1+2^x)\log\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

Příklad 4.5. Spočtěte limity následujících funkcí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Příklad 4.6. Spočtěte limity následujících funkcí a posloupností

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1), \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

Příklad 4.7. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x}, \qquad \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

Příklad 4.8. Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Výsledky

- Příklad 4.1: 2, 1/2, −1
- Příklad 4.2: −1/16, 3/2, $1/n$, 1/4
- Příklad 4.3: 7/3, −1/2, 1
- Příklad 4.4: 0, $1/e$, 2/3, $\log 8$
- Příklad 4.5:

  2. Platí

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right).\end{aligned}$$

  Víme, že

  (i) $\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1$,
  (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
  (iii) $\lim_{x\to 0}\sin x=0$,
  (iv) sin je prostý na $\langle -\pi/2,\pi/2\rangle$,
  (v) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

  Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+\sin x)}{\sin x}=1$.

  Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)=1\cdot 1\cdot 2=2.$$

2. Pišme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg} x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}.\end{aligned}$$

Víme, že $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}-\frac{e^{\arcsin x}-1}{\arcsin x}\cdot\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

Použili jsme
- $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$,
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
- $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$,
- sin je prostá funkce na jistém okolí 0,
- arcsin je prostá funkce,
- $x\mapsto 2x$ je prostá funkce,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}=1.$$

3. Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\begin{aligned}\frac{e^x-2\sin(\pi/6+x)}{\operatorname{tg} x} &= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-2\sin(\pi/6+x)}{x}\right)\\ &= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-\cos x}{x}-\frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)\\ &= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}-\frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)\\ &= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{1+\cos x}-\frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right). \qquad (\star)\end{aligned}$$

Víme, že

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$,
(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
(3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$,
(4) $\lim_{x\to 0}\cos x=1$.

Z ($\star$), (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\pi/6+x)}{\operatorname{tg} x}=1-\sqrt{3}.$$

- Příklad 4.6:

  1. Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x \\
&= \exp\left(\log\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x\right)\right) \\
&= \exp\left(x\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}}\right). \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Dále platí:

- $\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z}=1$,
- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+2x^3}+\sqrt{x^4+1}}{2x^3-1}$
  $=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2x-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{\infty}=0$,
- funkce $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}$ je na jistém okolí ∞ různá od nuly,
- exp je spojitá na $\mathbb{R}$.

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}}=1. \qquad (\star\star)$$

Dále máme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}}=1. \qquad (\star\star\star)$$

Z $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ a (4) plyne

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x=e^1=e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n=e.$$

2. Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ počítejme limitu funkce $f(x)=x(2^{\frac{1}{x}}-1)$ v ∞. Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x\to\infty}f(x)=A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n\to\infty}f(n)=A$. Platí

$$\lim_{x\to\infty}x(2^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{\log 2}{x}}-1}{\frac{\log 2}{x}}\cdot\log 2=\log 2.$$

Užili jsme

- $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$,
- $\lim_{x\to\infty}\frac{\log 2}{x}=0$,
- $\frac{\log 2}{x}\neq 0$ pro každé $x>0$,

– větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

3. 1.

- Příklad 4.7: $1/e$, $1/2$, $4/3$
- Příklad 4.8: 0

5. Derivace funkce, l'Hospitalovo pravidlo, věty o střední hodnotě

Příklad 5.1. Spočtěte:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right). \tag{1}$$

Příklad 5.2. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0+}(\cos(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}, \qquad \lim_{x\to\pm 0}\frac{x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \tag{2}$$

Příklad 5.3. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & \text{pro} \quad x \neq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Určete, zda má funkce f derivaci v bodě 0 a pokud ano, spočtěte ji.

Příklad 5.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x - 1}, \qquad \lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}; \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}, \quad a > 0.$$

Příklad 5.5. Spočtěte limity následujících funkcí:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2\operatorname{arctg} x}\right)^x. \tag{3}$$

Příklad 5.6. Spočtěte derivace (i jednostranné, pokud oboustranná neexistuje) následujících funkcí:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\
&f(x) = \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\}; \\
&f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}; \\
&f(x) = \arccos\frac{1}{1+x^2}; \\
&f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases} \\
&f(x) = x^{(x^x)}, \text{ pro } x > 0; \\
&f(x) = \max\{x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), x\}.
\end{aligned}$$

Příklad 5.7. Nalezněte A, $B \in \mathbb{R}$, tak aby na $\mathbb{R}$ platil vztah

$$\left(A + x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x\right)\left(\log\left(1+x^2\right) - 1\right)\right)' \\ = (Ax+B)(\operatorname{arctg} x)\log(1+x^2).$$

Příklad 5.8. Najděte $A \in \mathbb{R}$, aby na $(0, +\infty)$ platil vztah

$$\left(\log\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right) + \operatorname{arctg} x + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)' \\ = A\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

Příklad 5.9. U následujících funkcí spočtěte derivace (i jednostranné, pokud neexistuje oboustranná):

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \qquad x^2\exp(-|x-1|), \qquad \frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}.$$

Příklad 5.10. Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

$$f(x)=\max\{\min\{\cos x,(1/2)\},(-1/2)\};$$

$$f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}};$$

$$f(x)=\arccos\frac{1}{1+x^2};$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x\neq 0,\\ 0 & \text{pro } x=0;\end{cases}$$

$$f(x)=x^{(x^x)}, \text{ pro } x>0;$$

$$f(x)=\max\{x+4\operatorname{arctg}(\sin x),x\}.$$

Příklad 5.11. Pomocí L'Hospitalova pravidla určete následující limity:

$$\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Příklad 5.12. Pro $a>0$, $a\neq 1$ určete

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Příklad 5.13. Je možné použít L'Hospitalova pravidla pro určení následujících limit?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 2x+1}{(2x+\sin 2x)(\sin x+3)^2},$$

$$\lim_{x\to0}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x\to0}\left(1+xe^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x^4}\right)^{e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Příklad 5.14. Má následující funkce derivaci v nule?

$$f(x):=\begin{cases}\frac{1}{x\log 2}-\frac{1}{2^x-1}, & x\neq 0;\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

Příklad 5.15. Dokažte, že každá z následujících dvou rovnic má právě jeden kořen.

$$x^{13}+7x^3-5=0.$$
$$3^x+4^x=5^x.$$

Výsledky

- Příklad 5.10:
  - Pro funkci f platí

$$f(x)=\begin{cases}-1/2, & x\in\langle 2\pi/3,4\pi/3\rangle+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ \cos x, & x\in((\pi/3,2\pi/3)\cup(4\pi/3,5\pi/3))+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ 1/2, & x\in\langle-\pi/3,\pi/3\rangle+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

    Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\pi/3,\pi/3)+k\,\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ -\sin x, & x\in(\pi/3,2\pi/3)+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$
\begin{aligned}
f'_+(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,\\
f'_-(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x\to\pi/3+2k\pi-} 0 = 0,\\
f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) &= 0,\\
f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,\\
f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,\\
f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) &= 0,\\
f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) &= 0,\\
f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ k\ \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

– Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}2x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} = e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

* $\lim_{y\to 0+}\frac{e^y-1}{y} = 1$,
* $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$,
* $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
* $\sqrt{\ }$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1$.

– Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\,\mathrm{sign}\,x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sign} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2}, \\ f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{2\operatorname{sign} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

V 0 tedy derivace neexistuje.

– Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

– Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}\left(1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \left(x^{(x^x)}\right)' &= \left(e^{x^x\log x}\right)' = e^{x^x\log x}\left((x^x)'\cdot\log x + x^x\cdot\frac{1}{x}\right) \\ &= x^{(x^x)}\left(x^x(\log x+1)\log x + x^{x-1}\right), \qquad x > 0. \end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

– Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z}, \\ x, & x \in \langle(2k+1)\pi, (2k+2)\pi\rangle,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k\in\mathbb{Z}, \\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi),\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi+}\left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = 5, \\ f'_-(2k\pi) &= \lim_{x\to 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi-} 1 = 1, \\ f'_-((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to(2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi-}\left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = -3, \\ f'_+((2k+1)\pi) &= \lim_{x\to(2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x\to(2k+1)\pi+} 1 = 1. \end{aligned}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, nemá derivaci.

6. Průběh funkce

Příklad 6.1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}};$$
$$f(x) = \log_x e;$$
$$f(x) = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|;$$
$$f(x) = (\sin x)^{\cos x};$$
$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Příklad 6.2. Vyšetřete průběhy funkcí (v prvních dvou příkladech nemusíte vyšetřovat konvexitu)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$
$$f(x) = (\cos x)e^{\frac{2}{3}\sin x},$$
$$f(x) = (\log|x|)^3 - 3\log|x|,$$

Příklad 6.3. Vyšetřete průběhy funkcí:

$$\sin^3 x + \cos^2 x,$$
$$\frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}},$$
$$\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2 - 1},$$