

Vzorová druhá zápočtová písemka

NMMA102 LS 2024-2025

4. května 2025

1. Zjistěte, zda existuje limita (vzhledem k definičnímu oboru funkce)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^3 + y^3}$$

a pokud ano, spočtěte ji. (6 bodů)

2. Zjistěte zdali absolutně konverguje integrál

$$\int_1^\infty \frac{(x^2 - 1)}{x^3 \log x} dx.$$

(6 bodů)

3. Najděte délku křivky, která je grafem funkce

$$f(x) = \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$$

pro $x \in [-1, 1]$. (6 bodů)

4. Rozhodněte, zda se jedná o metrický prostor. Dokažte, nebo najděte protipříklad. (3 body)

- (a) Na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uvažujeme funkci $\rho(x, y) = |\sqrt[3]{x - y}|$.
- (b) Na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uvažujeme funkci $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$.
- (c) Nechť M je množina všech (ne nutně smysluplných) slov, skládající se z 5 písmen. Na množině $M \times M$ pak definujeme funkci $\rho(x, y)$ jako počet pozic, na kterých mají tato slova různá písmena.