

E2

D3

$$f(x) = \max \{ e^{-x}, \sqrt[3]{x}, 2 \}$$

Řešení: Označíme

$$g(x) = e^{-x}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad k(x) = 2 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Funkce $g-k$ je klesající na $\mathbb{R}$ a platí

$$g(x) = k(x) \iff x = \log \frac{1}{2},$$

takže $g(x) \geq k(x)$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, \log \frac{1}{2}]$.

Funkce $h-k$ je rostoucí na $\mathbb{R}$ a platí

$$h(x) = k(x) \iff x = 8,$$

takže $h(x) \geq k(x)$ právě tehdy, když $x \in [8, \infty)$.

Protože $\log \frac{1}{2} < 8$ (například proto, že $\log \frac{1}{2} < 0$ a $8 > 0$), plyne odtud, že

$$h(x) \leq k(x) \leq g(x) \quad \text{pro } x \in (-\infty, \log \frac{1}{2}],$$

$$h(x) \leq k(x) \text{ \& } g(x) \leq k(x) \quad \text{pro } x \in [\log \frac{1}{2}, 8],$$

$$g(x) \leq k(x) \leq h(x) \quad \text{pro } x \in [8, \infty).$$

Tedy

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (-\infty, \log \frac{1}{2}], \\ 2, & x \in [\log \frac{1}{2}, 8], \\ \sqrt[3]{x}, & x \in [8, \infty). \end{cases}$$

Protože funkce g, h, k jsou spojité na $\mathbb{R}$ a platí

E2/2

$$\lim_{x \rightarrow \log \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \log \frac{1}{2}^+} f(x) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 2,$$

je f spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy má primitivní funkci na $\mathbb{R}$.

Dále jest

$$\int f(x) dx = \begin{cases} -e^{-x} & \text{na } (-\infty, \log \frac{1}{2}), \\ 2x & \text{na } (\log \frac{1}{2}, 8), \\ \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} & \text{na } (8, \infty). \end{cases}$$

Pro $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, která můžeme později, položíme

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + C_1 & \text{pro } x \in (-\infty, \log \frac{1}{2}) \\ 2x + C_2 & \text{pro } x \in [\log \frac{1}{2}, 8] \\ \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C_3 & \text{pro } x \in (8, \infty). \end{cases}$$

Položíme $C_2 = 0$. Budeme hledat C_1 a C_3 tak, aby byla F spojitá na $\mathbb{R}$. Jest

$$\lim_{x \rightarrow \log \frac{1}{2}^-} F(x) = -2 + C_1, \quad \lim_{x \rightarrow \log \frac{1}{2}^+} F(x) = 2 \log \frac{1}{2}.$$

Tedy $C_1 = 2 (\log \frac{1}{2} + 1)$. Dále jest

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} F(x) = 16, \quad \lim_{x \rightarrow 8^+} F(x) = 12 + C_3.$$

Tedy $C_3 = 4$. Dostáváme

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 2(\log \frac{1}{2} + 1), & x \in (-\infty, \log \frac{1}{2}), \\ 2x, & x \in [\log \frac{1}{2}, 8], \\ \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 4, & x \in (8, \infty). \end{cases}$$

Potom je $F'(x) = f(x)$ pro každé

$$x \in (-\infty, \log \frac{1}{2}) \cup (\log \frac{1}{2}, 8) \cup (8, \infty)$$

a F je spojitá v bodech $\log \frac{1}{2}$ a 8 . Z věty o lepení

tedy plyne, že $\int f(x) dx = F(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Hodnocení ~~W2~~ E2

existence primitivní funkce na $\mathbb{R}$... 5

výpočet primitivní funkce na

intervalech $(-\infty, \log \frac{1}{2})$, $(\log \frac{1}{2}, 8)$ a $(8, \infty)$... 1

konstrukce primitivní funkce na $\mathbb{R}$

a výpočet konstant ... 5

lepení a závěr ... 1