

D4 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$

$$F(x,y) = \left(\operatorname{sign}(2x+y) \sqrt{5x^2+2y^2}, (1-\cos(x+y))(|x|+3|y|) \right)$$

(a) $F'(2,2),$ (b) $F'_2(0,0),$ (c) $\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0)$

Řešení (a) Najdu $\delta > 0$ splňující $\forall [x,y] \in B([2,2], \delta):$

$$F(x,y) = \left(\sqrt{5x^2+2y^2}, (1-\cos(x+y))(x+3y) \right)$$

(například $\delta=2$ nebo jakkoli $\delta \in (0,2)$).

Tedy F má spajité parciální derivace na

$B([2,2], \delta)$, takže $F'(2,2)$ existuje a je pro

každé $[x,y] \in B([2,2], \delta)$ reprezentována maticí

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{5x}{\sqrt{5x^2+2y^2}} & \frac{2y}{\sqrt{5x^2+2y^2}} \\ \sin(x+y)(x+3y) + (1-\cos(x+y)) & \sin(x+y)(x+3y) + 3(1-\cos(x+y)) \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$F'(2,2) = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{28}} & \frac{4}{\sqrt{28}} \\ 8 \sin 4 + 1 - \cos 4 & 8 \sin 4 + 3 - 3 \cos 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ 8 \sin 4 + 1 - \cos 4 & 8 \sin 4 + 3 - 3 \cos 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Plah'

$$F_2(x, y) = (1 - \cos(x+y)) (|x| + 3|y|), \quad \text{tedy}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_2(h,0) - F_2(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h) |h|}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_2(0,h) - F_2(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos h) 3|h|}{h} = 0.$$

Tedy $\nabla F_2(0,0) = (0,0)$ a kandidátem na $F_2'(0,0)$ je nulové zobrazení. Jest

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{|F_2(x,y) - F_2(0,0) - 0|}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{(1 - \cos(x+y)) (|x| + 3|y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Plah'

$$0 \leq (1 - \cos(x+y)) \frac{|x|+3|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 3\sqrt{2} (1 - \cos(x+y)),$$

neboť $|x|+3|y| \leq 3(|x|+|y|) \leq 3\sqrt{2} \sqrt{x^2+y^2}.$

Tedy

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{|F_2(x,y) - F_2(0,0) - 0|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Odtud plyne, že $F_2'(0,0) = 0.$

(c) Příklad'

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_1(h,0) - F_1(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sign}(2h) \sqrt{5}h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{5} \cdot \frac{|h|}{h} \cdot \operatorname{sign}(2h) = \sqrt{5}.$$

Hodnocení:

(a) existence $F'(2,2)$	...	1
$F'(x,y)$ na $B([2,2], \delta)$	...	1
$F'(2,2)$	...	1
(b) $\nabla F_2(0,0)$	—	1
$F_2'(0,0)$	...	4
(c) $\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0)$	...	2