

D3 konvergence integrálu pro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{(\min \{ \operatorname{arccotg}(x), \operatorname{arctg}(x) \})^{\alpha}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$$

Řešení! Funkce v integrandu je hladná

a spojitá na $(0, \infty)$, označme ji $f_{\alpha}(x)$.

Funkce $\operatorname{arccotg}$ je klesající na $(0, \infty)$, funkce arctg je rostoucí na $(0, \infty)$ a platí

$$\operatorname{arccotg} 1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Tedy

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{arctg} x)^{\alpha}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} & \text{pro } x \in (0, 1], \\ \frac{(\operatorname{arccotg} x)^{\alpha}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} & \text{pro } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Označ $g_{\alpha}(x) = x^{\alpha - \frac{1}{3}}, x \in (0, 1]$.

Potom g_{α} je hladná a spojitá na $(0, 1]$,

$$\int_0^1 g_{\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{3} > -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha > -\frac{2}{3},$$

$$a \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f_\alpha(x)}{g_\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^\alpha \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^\alpha \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{6}} + 1} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} 1.$$

$$\text{Dle LSK tedy } \int_0^1 f_\alpha \text{ K } \Leftrightarrow \alpha > -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Označ } h_\alpha(x) = x^{-\alpha - \frac{1}{2}}, \quad \alpha \in [1, \infty). \text{ Potom}$$

h_α je kladná a spojitá na $[1, \infty)$,

$$\int_1^\infty h_\alpha \text{ K } \Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{2} < -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2},$$

$$a \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_\alpha(x)}{h_\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \operatorname{arccotg} x)^\alpha \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \operatorname{arccotg} x)^\alpha \cdot \frac{1}{1 + x^{-\frac{1}{6}}} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} 1.$$

$$\text{Dle LSK tedy } \int_1^\infty f_\alpha \text{ K } \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}.$$

Závěr: $\int_0^\infty f_\alpha \text{ K } \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2},$

neboť f_α je spojitá a bodec 1.

<u>Hodnocení</u>	zpracování integrandu ...	1 bod
	konvergence u 0 ...	4 body
	konvergence u ∞ ...	4 body
	Závěr ...	1 bod