$\boxed{D2}$ Prim. fci

$$I = \int \frac{x+1}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+4)}\, dx$$

Řešení: Funkce v integrandu je definovaná pro

$$x \in (0,1) \cup (1,\infty),$$

prim. fci tedy hledáme na nějakých

podintervalech intervalů $(0,1)$ a $(1,\infty)$.

Provedeme substituci $y = \sqrt{x}$, pak

$x = y^2$, $dx = 2y\,dy$, $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$, $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & \infty \\ \hline y & 1 & \infty \end{array}$

Označ. $J = \displaystyle\int \frac{(y^2+1)\,2y}{(y^2-y)(y^2+y+4)}\, dy$

$$= 2\int \frac{y^2+1}{(y-1)(y^2+y+4)}\, dy.$$

Rozložíme integrand na parciální zlomky

$$\frac{y^2+1}{(y-1)(y^2+y+4)} = \frac{A}{y-1} + \frac{By+C}{y^2+y+4},$$

tedy

$$y^2+1 = A(y^2+y+4) + (By+C)(y-1).$$

Pro $y=1$ dostáváme

$$2 = 6A, \quad \text{tedy} \quad A = \frac{1}{3}.$$

Pro $y=0$ dostáváme

$$1 = \frac{4}{3} - C, \quad \text{tedy} \quad C = \frac{1}{3}.$$

Pro $y=2$ dostáváme

$$5 = \frac{1}{3} \cdot 10 + 2B + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} + 2B,$$

tedy $2B = \frac{4}{3}$, $B = \frac{2}{3}$.

Takže

$$J = \frac{2}{3} \int \frac{dy}{y-1} + \frac{2}{3} \int \frac{2y+1}{y^2+y+4}\, dy$$

$$\stackrel{c}{=} \frac{2}{3} \log|y-1| + \frac{2}{3} \log(y^2+y+4), \quad y \in (0,1),$$
nebo $y \in (1,\infty)$.

Dle druhé věty o substituci platí

$$I \stackrel{c}{=} \frac{2}{3} \log|\sqrt{x}-1| + \frac{2}{3} \log(x+\sqrt{x}+4), \quad x \in (0,1), \text{ nebo } x \in (1,\infty),$$

kde jsme položili

$$\varphi(y) = y^2, \quad y \in \begin{cases} (0,1) \\ (1,\infty) \end{cases},$$

pak $\varphi((0,1)) = (0,1)$, $\varphi((1,\infty)) = (1,\infty)$,

$\varphi'(y) = 2y$ vlastní nenulová,

$\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

<u>Hodnocení:</u>

def. obor integrandu	1
substituce $y = \sqrt{x}$	1
rozklad na zlomky	3
výpočet integrálů	3
závěr	2