

$$\boxed{D1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)}{n+1} (2x+1)^n$$

Řešení: Označ  $a_n$   $n$ -tý člen řady.

Platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ .

Nalezneme  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že  $\forall n \geq n_0$  platí

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Potom pro  $n \geq n_0$  platí

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2\sqrt{n}}} \leq \sqrt[n]{\frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)}{n+1}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} \quad *$$

Odtud a z VOS plyne, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)}{n+1}} = 1,$$

neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

- Je-li  $|2x+1| < 1$ , potom dle (\*) a VOA platí

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |2x+1| \cdot \sqrt[n]{\frac{n}{n+1} \cdot (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)},$$

a tedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |2x+1| < 1$ .

Dle Cauchyova kritéria tedy  $\sum a_n$  AK.

- Je-li  $|2x+1| > 1$ , potom obdobně dostaneme

lim  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , a tedy lim  $a_n \neq 0$ .

Protože není splněna nutná podmínka konvergence,  $\sum a_n \mathbb{D}$ .

• Je-li  $x = -1$ , potom  $\sum a_n = \sum (-1)^n (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) \frac{n}{n+1}$ .

Označ  $b_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1$ ,  $c_n = \frac{n}{n+1}$  pro  $n \in \mathbb{N}$ .

Protože  $b_n$  je klesající a lim  $b_n = 0$ , plyne

z Leibnizovy věty, že  $\sum (-1)^n b_n \in K$ .

Protože  $c_n$  je rostoucí ( $c_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ ) a omezená

( $\frac{1}{2} \leq c_n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ), plyne z Abelova kritéria,

že  $\sum a_n (= \sum (-1)^n b_n c_n) \in K$ .

• Je-li  $x = 0$ , potom  $\sum a_n = \sum \frac{n}{n+1} (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)$ ,

což je řada s kladnými členy splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$$

Protože  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{D}$ , plyne z SK, že  $\sum a_n \mathbb{D}$ .

Shrnutí:  $\sum a_n \in K \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$

$\sum a_n \in K \Leftrightarrow x \in [-1, 0)$ .

Hodnotenie:

srovnávanie  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  --- 2 body

$|2x+1| < 1$  --- 1 bod

$|2x+1| > 1$  --- 2 body

$x = -1$  --- 3 body

$x = 0$  --- 2 body