

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2024–2025
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA D

LUBOŠ PICK

Příklad D1. Vyšetřete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)}{n+1} (2x+1)^n.$$

(10 bodů)

Příklad D2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{x+1}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x}+4)} dx$$

na všech intervalech, na kterých existuje.

(10 bodů)

Příklad D3. Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje Newtonův integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{(\min\{\operatorname{arccotg}(x), \operatorname{arctg}(x)\})^{\alpha}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx.$$

(10 bodů)

Příklad D4. Uvažujte funkci $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovanou předpisem

$$F(x, y) = (\operatorname{sign}(2x+y)\sqrt{5x^2+2y^2}, (1-\cos(x+y))(|x|+3|y|)) \quad \text{pro } [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Rozhodněte, zda existuje $F'(2, 2)$ a pokud ano, spočtěte ji.
- (b) Rozhodněte, zda existuje $F'_2(0, 0)$ a pokud ano, spočtěte ji.
- (c) Rozhodněte, zda existuje $\frac{\partial F_1}{\partial x}(0, 0)$, a pokud ano, spočtěte ji.

(10 bodů)

Příklad D5. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku nebo protipříkladem na jeho platnost.

- (a) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}a_n$ konverguje.
- (b) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ absolutně konverguje.
- (c) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-1} + a_{3n})$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(10 bodů)