

C5 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá!

$$(a) \int_0^{\infty} f \, K \Rightarrow \int_0^{\infty} f(x+2) \, dx \, K$$

(b) $\Leftarrow$

$$(c) \int_0^{\infty} f \, K \Rightarrow \int_0^{\infty} f^2 \, K$$

Řešení! (a) PLATÍ!

substituce $y = x+2$, $dy = dx$, $\begin{array}{c|cc} x & 0 & \infty \\ \hline y & 2 & \infty \end{array}$,

$$\int_0^{\infty} f(x+2) \, dx = \int_2^{\infty} f(x) \, dx.$$

Podle věty o aditivitě Newtonova integrálu
(Věta 7.31 (a)) tvrzení platí!

(b) NEPLATÍ, protipříklad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 2], \\ \frac{2}{x^2}, & x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Potom f je spojitá na $(0, \infty)$, $\int_0^{\infty} f$ diverguje

a $\int_0^{\infty} f(x+2) \, dx = \int_2^{\infty} f(x) \, dx$ konverguje.

(c) NEPLATI, protipříklad

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{x}}, & x \in (0, 2], \\ \frac{4}{x^2}, & x \in (2, \infty), \end{cases}$$

potom f je spojitá na $(0, \infty)$, $\int_0^{\infty} f$

konverguje, ale

$$(f(x))^2 = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \in (0, 2], \\ \frac{16}{x^4}, & x \in (2, \infty), \end{cases}$$

a tedy $\int_0^{\infty} f(x)^2 dx$ diverguje.

Hodnocení

(a) 2 body

(b) 4 body