$\boxed{C4}$ $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$u(0,0) = 2$, $\nabla u(0,0) = (-1,2)$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$F(x,y) = \Big((1-\cos y)\,u(x,y),\ u(x-y,y),\ u(xy,y) \Big),$$

$G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$,

$$G'(0,2,2) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$H = G \circ F$

Určete $H'(0,0)$, matici, a $D_v H_2(0,0)$ pro $v = (-1,2)$.

Řešení: Platí $F(0,0) = (0,2,2)$.

Zřejmě jsou všechny parciální derivace funkcí F_1, F_2, F_3 spojité, a tedy existuje F' v každém bodě $[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$ a platí

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} (1-\cos y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \sin y \cdot u(x,y) + (1-\cos y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x-y,y) & -\frac{\partial u}{\partial x}(x-y,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x-y,y) \\ y\,\frac{\partial u}{\partial x}(xy,y) & x\frac{\partial u}{\partial x}(xy,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Dosazením $[x,y] = [0,0]$ dostaneme

$$F'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1+2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podle věty o derivaci složeného zobrazení jest

$$H'(0,0) = (G \circ F)'(0,0) = G'(F(0,0)) \circ F'(0,0)$$

$$= G'(0,2,2) \circ F'(0,0)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Tedy $H'(0,0)$ je representována maticí $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Tudíž pro $v = (-1, 2)$ platí

$$D_v H_2(0,0) = H_2'(0,0) \cdot v = (-1, 7) \cdot (-1, 2)$$

$$= 1 + 14 = 15$$

Hodnocení

$F(0,0)$ .. 1

$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ .. 1