

C3

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{x}{\frac{\pi}{2} - x} \right)^\alpha \operatorname{tg} x \, dx$$

Řešení! Označ $f(x) = \left(\frac{x}{\frac{\pi}{2} - x} \right)^\alpha \operatorname{tg} x$,

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Položíme $g(x) = x^{\alpha+1}$ pro $x \in (0, 1]$. Potom

f a g jsou spojité a nezáporné na $(0, 1]$ a

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{2}{\pi} \right)^\alpha \frac{x^\alpha \operatorname{tg} x}{x^{\alpha+1}}.$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \right)^\alpha \in (0, \infty),$$

tedy $\int_0^1 f(x) \, dx$ konverguje právě tehdy,

když $\int_0^1 g(x) \, dx$ konverguje, což nastává pro

$$\alpha + 1 > -1, \text{ tedy } \alpha > -2.$$

Položíme $h(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^{-\alpha-1}$ pro $x \in [1, \frac{\pi}{2})$. Potom

f, h jsou spojité a nezáporné na $[1, \frac{\pi}{2})$ a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{f(x)}{h(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} x^\alpha \operatorname{tg} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} x^\alpha \sin x \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-1}{-\sin x} = 1,$$

$$\text{tedy } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{h(x)} \stackrel{V07L}{=} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha},$$

$$\text{takže } \int_1^{\pi/2} f \text{ konverguje} \Leftrightarrow \int_1^{\pi/2} h \text{ konverguje}$$

$$\Leftrightarrow -\alpha - 1 > -1 \Leftrightarrow \alpha < 0.$$

Protože f je spjatá u 1, plyne odtud, že

$$\int_0^{\pi/2} f \text{ konverguje} \Leftrightarrow \alpha \in (-2, 0).$$

Hodnocení:

konvergence u 0 -- 4

konvergence u $\pi/2$... 4

závěr ... 2