

C2

$$\int \frac{\log^3 x + 2 \log x}{x \cdot \log^3 x - x} dx$$

Řešení! substituce (vos 1)

$$\varphi(y) = e^y, \quad y \in (0, 1) \text{ nebo } y \in (1, \infty),$$

$$\varphi^{-1}(x) = \log x, \quad x \in (0, e) \text{ nebo } x \in (e, \infty),$$

$$\varphi((0, 1)) = (0, e), \quad \varphi((1, \infty)) = (e, \infty),$$

$$\varphi'(y) = e^y \text{ je vlastně a nenulová}$$

$$\forall y \in (0, 1) \text{ a } \forall y \in (1, \infty)$$

zkrácený zápis substituce:

$$y = \log x, \quad dy = \frac{dx}{x}, \quad x \in (0, e), x \in (e, \infty).$$

$$\text{Označ } J = \int \frac{y^3 + 2y}{y^3 - 1} dy. \quad \text{Potom}$$

$$\frac{y^3 + 2y}{y^3 - 1} = 1 + \frac{1 + 2y}{y^3 - 1},$$

rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1+2y}{y^3-1} = \frac{A}{y-1} + \frac{By+C}{y^2+y+1}$$

$$1+2y = A(y^2+y+1) + (By+C)(y-1),$$

$$\text{"}y^2\text{"}: \quad 0 = A + B$$

$$\text{"}y\text{"}: \quad 2 = A - B + C$$

$$\text{"}1\text{"}: \quad 1 = A - C$$

Tedy $A=1, C=0, B=-1$. Takže

$$\frac{1+2y}{y^3-1} = \frac{1}{y-1} - \frac{y}{y^2+y+1}.$$

Tudiž

$$J = \int \left(1 + \frac{1}{y-1} - \frac{y}{y^2+y+1} \right) dy.$$

Postupně máme

$$\int 1 dy \stackrel{c}{=} y, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{y-1} dy \stackrel{c}{=} \log |y-1|, \quad \begin{array}{l} y \in (-\infty, 1), \\ y \in (1, \infty), \end{array}$$

$$\int \frac{y}{y^2+y+1} dy = \frac{1}{2} \int \frac{2y+1}{y^2+y+1} dy - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2+y+1},$$

$$\int \frac{dy}{y^2+y+1} = \int \frac{dy}{(y+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dy}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}(y+\frac{1}{2})\right]^2 + 1}$$

$$\leq \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} (y+\frac{1}{2}) \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} (y+\frac{1}{2}) \right).$$

Tedy

$$J \stackrel{c}{=} y + \log |y-1| - \frac{1}{2} \log (y^2+y+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} (y+\frac{1}{2}) \right).$$

Podle VOS tedy platí

$$I \stackrel{c}{=} \log x + \log |\log x - 1| - \frac{1}{2} \log (\log^2 x + \log x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} (\log x + \frac{1}{2}) \right),$$

$$x \in (0, e) \quad \text{nebo} \quad x \in (e, \infty).$$

Hodnocení

převod na J ... 1

rozklad na zlomky ... 2

integrace zlomků 5

VOS ... 1

interval ... 1