

$$\boxed{C1} \quad x \in [-1, 1], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} (\arcsin x)^n$$

Řešení! Označ $a_n = \frac{n}{n^2+1} (\arcsin x)^n$.

Nechť $x \in (-\sin 1, \sin 1)$. Potom ($\arcsin$ je liché a rostoucí)

$$-1 = -\arcsin(\sin 1) = \arcsin(-\sin 1) < \arcsin x < \arcsin(\sin 1) = 1,$$

takže $|\arcsin x| < 1$, a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} |\arcsin x| \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} |\arcsin x| < 1.$$

Tedy $\sum a_n$ AK.

Nechť $x \in [-1, -\sin 1) \cup (\sin 1, 1]$. Potom (jako výše)

$|\arcsin x| > 1$, a tedy $\lim a_n \neq 0$. Tedy $\sum a_n$ D.

Nechť $x = \sin 1$. Potom $a_n = \frac{n}{n^2+1}$. Označ

$$b_n = \frac{1}{n}. \text{ Pak } \sum b_n \text{ D, } a_n > 0, b_n > 0, \text{ a } \lim \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Tedy (LSK) $\sum a_n$ D.

Nechť $x = -\sin 1$. Potom $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

Dokažeme, že $\left\{ \frac{n}{n^2+1} \right\}$ je klesající! To plyne z následující sady ekvivalencí: $\#n$ platí

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1]$$

$$\Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 1 < n(n^2 + 2n + 2)$$

$$\Leftrightarrow n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$$

$$\Leftrightarrow 1 < n^2 + n, \quad \text{což platí.}$$

Naně platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$. Tedy dle Leibnizovy
věty řada $\sum a_n$ konverguje.

Závěr : řada AK pro $x \in (-\sin 1, \sin 1)$
K pro $x \in [-\sin 1, \sin 1]$.

Hodnocení : $(-\sin 1, \sin 1)$.. 2
 $[-1, 1] \setminus [-\sin 1, \sin 1]$.. 3