

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2024–2025
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA C

LUBOŠ PICK

Příklad C1. Vyšetřete pro která $x \in [-1, 1]$ konverguje a pro která $x \in [-1, 1]$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} (\arcsin x)^n.$$

(10 bodů)

Příklad C2. Spočtete primitivní funkci

$$\int \frac{(\log(x))^3 + 2 \log(x)}{x(\log(x))^3 - x} dx$$

na všech intervalech, na kterých existuje.

(10 bodů)

Příklad C3. Určete, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje Newtonův integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\frac{\pi}{2} - x} \right)^{\alpha} \operatorname{tg}(x) dx.$$

(10 bodů)

Příklad C4. Uvažujte funkci $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Předpokládejme, že $u(0, 0) = 2$ a $\nabla u(0, 0) = (-1, 2)$. Předpokládejme, že $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y) = ((1 - \cos y)u(x, y), u(x - y, y), u(xy, y)) \quad \text{pro } [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Předpokládejme, že $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ takové, že $G'(0, 2, 2)$ je representována maticí

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Položme $H = G \circ F$. Rozhodněte, zda existuje $H'(0, 0)$ a pokud ano, nalezněte její representující matici. Spočtete $D_v H_2(0, 0)$, kde $H = (H_1, H_2)$ a $v = (-1, 2)$. (10 bodů)

Příklad C5. Nechť $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku nebo protipříkladem na jeho platnost.

(a) Jestliže $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konverguje, potom $\int_0^{\infty} f(x+2) dx$ konverguje.

(b) Jestliže $\int_0^{\infty} f(x+2) dx$ konverguje, potom $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konverguje.

(c) Jestliže $\int_0^{\infty} f(x) dx$ konverguje, potom $\int_0^{\infty} (f(x))^2 dx$ konverguje.

(10 bodů)