

$$\boxed{B3} \quad \int_1^{\infty} \min \{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx =: \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Řešení! Pro $x \in (1, \frac{\pi}{2}]$ je

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1} \cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}},$$

a tedy $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}.$

Polož $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad x \in (1, \frac{\pi}{2}]$

potom g, h jsou spojitě a nezáporně na $(1, \frac{\pi}{2}]$

$\int_1^{\pi/2} h$ konverguje, neboť $-\frac{1}{2} > -1$,

a platí

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x}-1)}.$$

Dále je $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = 1$ a

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}} = 4.$$

Tedy $\int_1^{\pi/2} g$ konverguje. Dle LSK tudíž plyne,

že i $\int_1^{\pi/2} f$ konverguje.

Pro $x \in [\frac{\pi}{2}, 2]$ je $f(x)$ spojitá, tedy
omezená (na omezeném intervalu), a
tedy $\int_{\pi/2}^2 f$ konverguje.

Pro $x \in (2, \infty)$ je

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}.$$

Funkce $x \mapsto \cos x$ je spojitá na $[2, \infty)$ a
na $(2, \infty)$ má omezenou primitivní funkci
 $\sin x$. Funkce

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x} - 1)}$$

je klesající a spojitá na $[2, \infty)$ a v ∞ má
nulovou limitu. Dle AD kritéria tedy

$\int_2^\infty f$ konverguje.

Platí $f \in \mathcal{N}(1, \frac{\pi}{2}) \cap \mathcal{N}(\frac{\pi}{2}, 2) \cap \mathcal{N}(2, \infty)$ a f je spojitá
v bodech $\frac{\pi}{2}$ a 2. Tedy $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$.

Hodnocení: konvergence na $(1, \frac{\pi}{2}]$ 4

konvergence na $[\frac{\pi}{2}, 2]$ 1

konvergence na $(2, \infty)$ 4

závěr 1