

$$\boxed{B1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arccotg} n \cdot x^n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Řešení! Protože

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} n < \frac{\pi}{2},$$

platí dle v02s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\operatorname{arctg} n} = 1.$$

$$\text{Protože} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arccotg} x \stackrel{1/4 \%}{\sim} \frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = 1,$$

$$\text{platí} \exists n_0 \forall n \geq n_0: \quad \frac{1}{2n} \leq \operatorname{arccotg} n \leq \frac{2}{n},$$

$$\text{a tedy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\operatorname{arccotg} n} = 1 \quad (\text{v02s}).$$

Tudíž pro $x \in (-1, 1)$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| < 1,$$

takže řada AK dle CLK.

Jestliže $x \in (1, \infty)$, pak plyne z výše uvedených nerovností, že $\lim a_n = \infty$, tedy

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, takže řada D, neboť nesplňuje

nutnou podmínku konvergence.

Jestliže $x \in (-\infty, -1)$, pak obdobně platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -\infty,$$

tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ neexistuje, tudíž opět

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ a řada D .

Jestliže $x=1$, plyne z výše uvedených
nerovností, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}$, takže

řada D dle LSK a divergenci harmonické řady.

Jestliže $x=-1$, potom řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arccotg} n$$

konverguje dle Leibnizovy věty, neboť
posloupnost $\{\operatorname{arccotg} n\}$ je klesající
a platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} n = 0$. Protože

posloupnost $\{\operatorname{arctg} n\}$ je rostoucí
a omezená, plyne z AD kritéria,
varianta A, že řada K .

Závěr: $\sum AK \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

$$\sum K \Leftrightarrow x \in [-1, 1).$$

Hodnoceci!

$$|x| < 1$$

1.

$$|x| > 1$$

1

$$x = 1$$

2

$$x = -1$$

5