

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2024–2025
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA B

LUBOŠ PICK

Příklad B1. Vyšetřete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \arctg(n) \operatorname{arccotg}(n) x^n.$$

(10 bodů)

Příklad B2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{2e^{4x} - 5e^{3x} + 8e^{2x} - e^x}{(e^{2x} - 2e^x - 3)(e^{2x} - e^x + 2)} dx$$

na všech maximálních intervalech, na kterých existuje.

(10 bodů)

Příklad B3. Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_1^{\infty} \min\{1, \sqrt{x-1}\} \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx.$$

(10 bodů)

Příklad B4. Uvažujte zobrazení $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definované předpisem

$$F(x, y) = (\arctg(2x - y), x - y, (x^2 - y^2) \frac{|x|}{1 + |y|}, e^{x+y}).$$

(a) Dokažte, že v bodě $[-1, 1]$ existuje derivace F a spočtěte její reprezentující matici.

(b) Spočtěte $\frac{\partial F_3}{\partial x}(0, 0)$, pokud existuje.

(10 bodů)

Příklad B5. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku, nebo protipříkladem na jeho platnost.

(a) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim na_n = 0$.

(b) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{|a_n|} = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje.

(c) Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(10 bodů)