

A5 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojita'

(a) f licha' $\Rightarrow$ $\nexists$ primfce suda'

(b) f suda' $\Rightarrow$ $\nexists$ primfce licha'

(c) f licha' $\Rightarrow \int_{-1}^1 f = 0$.

Řešení! (a) PLATÍ, důkaz:

polož $F(x) = \int_0^x f$, $x \in \mathbb{R}$

protože f je spojita', je $f \in \mathcal{R}([a,b]) \forall [a,b] \subset \mathbb{R}$,

a tedy je F primfce $\in f$ na $\mathbb{R}$. zvolme

prim. fci $G \in f$ na $\mathbb{R}$. Potom $\exists K \in \mathbb{R}$

tak, že $G = F + K$ na $\mathbb{R}$. zvolme $x \in \mathbb{R}$.

Potom $-x \in \mathcal{D}(G)$ a platí

$$G(-x) = F(-x) + K = K + \int_0^{-x} f(t) dt$$

substitute: $s = -t$, $ds = -dt$, $\frac{t}{s} \parallel \frac{0}{0} \parallel \frac{-x}{x}$

$$= K - \int_0^x f(-s) ds$$

$$\stackrel{(\neq \text{ licha'})}{=} K + \int_0^x f(s) ds = K + F(x) = G(x),$$

takže G je sudá.

(b) NEPLATÍ, důkaz:

Zvolme prim. fci $F \in \mathcal{F}$. Najdeme

$K \in \mathbb{R}$ tak, aby $F(0) + K \neq 0$. Položme

$G = F + K \in \mathbb{R}$. Potom G je prim. fci $\in \mathcal{F}$

$\in \mathbb{R}$ a $G(0) \neq 0$, takže G není lichá!

(c) PLATÍ, důkaz:

z (a) plyne, že $\int_{-1}^1 f(x) dx = F(1) - F(-1) = 0$.

Hodnocení:

(a) ... 5

(b) ... 3

(c) - 2