

$$\boxed{A3} \quad \int_1^{\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1})^{\alpha} \operatorname{arccotg} x}{x} dx$$

Řešení! Polož $g(x) = (x-1)^{\frac{\alpha}{2}}$, $x \in (1, 2]$.

Potom f, g jsou spojité a nezáporné na $(1, 2]$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(\sqrt{x+1})^{\alpha} \operatorname{arccotg} x}{x} = 2^{\frac{\alpha}{2}-2} \pi,$$

$$\text{takže} \quad \int_1^2 f \ll \Leftrightarrow \int_1^2 g \ll$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} > -1 \Leftrightarrow \alpha > -2.$$

Polož $h(x) = x^{\alpha-2}$, $x \in [2, \infty)$, potom

f, h jsou nezáporné a spojité na $[2, \infty)$

a platí $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{h(x)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right)^{\alpha} x \cdot \operatorname{arccotg} x = 1,$$

$$\text{neboť} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 \quad \text{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \operatorname{arccotg} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}}$$

$$\stackrel{\text{L'H\%}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1,$$

$$\text{tak\AA} \int_2^{\infty} f(x) dx \Leftrightarrow \int_2^{\infty} h(x) dx \Leftrightarrow \alpha - 2 < -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Proto\AAe f je spojita' u bode' $x=2$,

$$\text{je } \int_1^{\infty} f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_2^{\infty} f(x) dx.$$

Za'me'n. $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konverguje

prave' tehdy, kdy\AA $\alpha \in (-2, 1)$.

Hodnocem:

konvergence u 1 -- 4

konvergence u ∞ -- 4

za'me'n -- 2

