

$$\boxed{A1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(3^n+1)} =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Řešení! Je-li $x \in (-3, 3)$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{3^n+1}} = \frac{|x|}{3} < 1,$$

takže řada A_k dle Cauchyova kritéria.

Je-li $x \in (3, \infty)$ potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

nemůže tedy splňovat nutnou podmínku konvergence a řada D .

Je-li $x \in (-\infty, -3)$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ neexistuje, neboť}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -\infty,$$

nemůže tedy splňovat nutnou podmínku konvergence a řada D .

Je-li $x = 3$, označme $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, potom

$$\sum b_n \mathbb{D} \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n+1} = 1,$$

takže dle LSK řada D (obě mají) kladně diverguje.

$$\text{Je-li } x = -3, \text{ potom } a_n = (-1)^n \frac{3^n}{n(3^n+1)}.$$

Položíme $f(x) = \frac{3^x}{x(3^x+1)}$ pro $x \in (0, \infty)$, potom

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{3^x}{3^x+1} + \frac{1}{x} \frac{3^x \log 3}{(3^x+1)^2} = \frac{3^x}{x(3^x+1)} \left(\frac{\log 3}{3^x+1} - \frac{1}{x} \right).$$

Výraz $\left(\frac{\log 3}{3^x+1} - \frac{1}{x} \right)$ je záporný pro každé $x \geq 1$,

neboť pro $g(x) = \frac{3^x+1}{\log 3} - x$ je $g(0) > 0$ a

$$g'(x) = 3^x - 1 > 0. \text{ Tedy } f'(x) < 0 \text{ pro } x \in (0, \infty).$$

Odtud plyne, že posloupnost $\left\{ \frac{3^n}{n(3^n+1)} \right\}$

je klesající. Protože navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n(3^n+1)} = 0$,

páde k de Leibnizova kritéria.

Závěr: $\sum a_n \begin{cases} K & \Leftrightarrow x \in [-3, 3) \\ AK & \Leftrightarrow x \in (-3, 3). \end{cases}$

Hodnocení:

$x \in (-3, 3)$	}	3
$x \in (3, \infty)$		
$x \in (-\infty, -3)$		

$x = 3$ - 2

$x = -3$ - 4

záměr .. 1

