

MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2024–2025
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA A

LUBOŠ PICK

Příklad A1. Vyšetřete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje a pro která $x \in \mathbb{R}$ absolutně konverguje číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(3^n + 1)}. \quad (10 \text{ bodů})$$

(10 bodů)

Příklad A2. Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} dx$$

na všech intervalech, na kterých existuje.

(10 bodů)

Příklad A3. Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^{\alpha} \operatorname{arccotg} x}{x} dx$$

v závislosti na hodnotě parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

(10 bodů)

Příklad A4. Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y) = \begin{cases} (e^{x^2 - y^2}, y^2 \operatorname{arctg}(\frac{1}{x^2 + y^2})) & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ (0, 0) & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

(a) Dokažte, že v bodě $[1, 1]$ existuje derivace F , spočtěte její reprezentující matici a určete jakobián F v bodě $[1, 1]$.

(b) Spočtěte $\frac{\partial F_2}{\partial y}(0, 0)$, pokud existuje.

(10 bodů)

Příklad A5. Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku nebo protipříkladem na jeho platnost.

(a) Jestliže f je lichá, potom je každá její primitivní funkce sudá.

(b) Jestliže f je sudá, potom je každá její primitivní funkce lichá.

(c) Jestliže f je lichá, potom je $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

(10 bodů)