MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 - ZIMNÍ SEMESTR 2023–2024
POČETNÍ PŘÍKLADY KE CVIČENÍ

LUBOŠ PICK

1. Systémy obyčejných diferenciálních lineárních rovnic 1. řádu

Příklad 1.1. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 2x - y - 2z \\ z' &= 2z - x + y. \end{aligned}$$

Příklad 1.2. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y - z \\ y' &= 3x - 4y - 3z \\ z' &= 2x - 4y. \end{aligned}$$

Příklad 1.3. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2z - y \\ y' &= x + 2z \\ z' &= y - x - z. \end{aligned}$$

Příklad 1.4. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - z \\ y' &= y - x + z \\ z' &= x - y. \end{aligned}$$

Příklad 1.5. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 5y - 2z \\ y' &= -2x - 2y + z \\ z' &= -x - y + z. \end{aligned}$$

Příklad 1.6. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= 2z - y. \end{aligned}$$

Příklad 1.7. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 2y + 4z \\ z' &= x - z. \end{aligned}$$

Příklad 1.8. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2y + z + e^t \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -2x + 3y - z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Příklad 1.9. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= -x + 3z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Příklad 1.10. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^t, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Příklad 1.11. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - z \\ y' &= 2x + y - 2z \\ z' &= 2x + y - 2z. \end{aligned}$$

(i) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

(ii) Určete množinu všech $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{R}^3$, pro která je maximální řešení uvedené soustavy (x, y, z) vyhovující podmínce $y(0) = [x_0, y_0, z_0]$ konstantní.

2. Metrické prostory

Příklad 2.1. Ověřte, zda následující funkce definují metriku na $\mathbb{R}$:

$$\varrho(x, y) = |x^3 - y^3|; \qquad \varrho(x, y) = |x^2 - y^2|; \qquad \varrho(x, y) = (x - y)^2.$$

Příklad 2.2. Nechť ϱ_1 a ϱ_2 jsou dvě metriky na množině P. Ověřte, zda následující funkce definují metriku na P:

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2; \qquad \varrho = \max\{\varrho_1; \varrho_2\}; \qquad \varrho = \min\{\varrho_1; \varrho_2\}; \qquad \varrho = \max\{\varrho_1; 1\}; \qquad \varrho = \min\{\varrho_1; 2\}.$$

Příklad 2.3. Co je potřeba předpokládat o funkci φ, aby funkce $\varrho(x, y) := |\varphi(x) - \varphi(y)|$ definovala metriku na $\mathbb{R}$?

Příklad 2.4. Najděte okolí bodu $[1, 1]$ v prostoru $\mathbb{R}^2$ v ruské metrice o poloměrech 1 a 2 a v diskrétní metrice o poloměrech $\frac{1}{2}$ a 2.

Příklad 2.5. Rozhodněte, zda v obecném metrickém prostoru platí $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Příklad 2.6. V metrickém prostoru $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou najděte uzávěry grafů funkcí

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad D(x); \qquad R(x),$$

kde symboly D a R značíme Dirichletovu a Riemannovu funkci.

Příklad 2.7. Rozhodněte, zda v metrikách ℓ^1, ℓ^p a ℓ^∞ konvergují následující posloupnosti:

$$\{1, 2, 3, \dots, n, 0, 0, \dots, 0, \dots\};$$
$$\{1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots\} \ (n \text{ krát});$$
$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0, \dots\right\} \ (n \text{ krát});$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots\right\} \ (n \text{ krát}).$$

Příklad 2.8. Rozhodněte, zda existuje metrický prostor P a dvě jeho neprázdné podmnožiny A, B tak, aby platilo $A \cap B = \emptyset$ a zároveň $\operatorname{dist}(A, B) = 0$. Lze takové množiny nalézt uzavřené? Lze takové množiny nalézt takové, že A je uzavřená a B je kompaktní?

Příklad 2.9. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{jestliže } |x - y| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{2} & \text{jestliže } |x - y| \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \\ 0 & \text{jestliže } x = y. \end{cases}$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, charakterizujte všechny otevřené a všechny kompaktní množiny v této metrice.

Příklad 2.10. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, spočtěte $\operatorname{diam}(F_n)$, kde $F_n := [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, v této metrice. Jsou množiny F_n omezené, uzavřené, kompaktní?

Příklad 2.11. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{jestliže } x \neq 0, \ y = 0; \\ \frac{1}{|y|} & \text{jestliže } y \neq 0, \ x = 0; \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{jestliže } x \neq 0, \ y \neq 0, x \neq y; \\ 0 & \text{jestliže } x = y. \end{cases}$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, charakterizujte všechny kompaktní množiny v této metrice. Je prostor $(\mathbb{R}, \varrho)$ kompaktní?

Příklad 2.12. Nechť P je kompaktní metrický prostor. Dokažte, že existují $y, z \in P$ taková, že $\varrho(y, z) = \operatorname{diam} P$.

Příklad 2.13. Dokažte, že existuje metrický prostor P a v něm neprázdná uzavřená množina F a neprázdná kompaktní množina K takové, že jejich vzdálenost není realisována, tedy neexistují body $a \in K$, $b \in F$ splňující $\varrho(a, b) = \operatorname{dist}(K, F)$. Lze úlohu vyřešit v $\mathbb{R}^n$?

Příklad 2.14. Dokažte, že posloupnost $\{f_n\}$, kde $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, nemá limitu v $(C([0, 1]), \varrho_{\sup})$.

Příklad 2.15. Nalezněte posloupnost $\{f_n\}$, která bodově konverguje ke spojité funkci, ale nekonverguje k této funkci v $(C([0, 1]), \varrho_{\sup})$.

Příklad 2.16. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru P splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Rozhodněte, zda je množina $\{x_n; x \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompaktní.

Příklad 2.17. Nechť P je nekompaktní metrický prostor. Sestrojte omezenou spojitou funkci $f \colon P \to \mathbb{R}$, která není stejnoměrně spojitá.

Příklad 2.18. Nechť P je nekompaktní metrický prostor. Sestrojte neomezenou spojitou funkci $f \colon P \to \mathbb{R}$.

Příklad 2.19. Rozhodněte, zda je množina $\{x = \{x_n\}; |x_n| \leq \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}\}$ kompaktní v ℓ^2.

Příklad 2.20. Rozhodněte, zda je množina všech neklesajících spojitých funkcí f na $[0,1]$ splňujících $\|f\| \leq 1$ kompaktní v $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$.

Příklad 2.21. Rozhodněte, zda je množina všech 1-lipschitzovských funkcí f na $[0,1]$ splňujících $\|f\| \leq 1$ kompaktní v $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$.

Příklad 2.22. Rozhodněte, zda součin dvou kompaktních prostorů je kompaktní prostor.

Příklad 2.23. Definujme funkci $F\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ předpisem $F(x) = \limsup x_n$. Je F spojitá na ℓ^∞, na c, nebo na c_0?

Příklad 2.24. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru splňující

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \varrho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Plyne odtud, že $\{x_n\}$ je cauchyovská?

Příklad 2.25. Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriky $\varrho_1(x,y) = |x-y|$ a $\varrho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Nalezněte posloupnost, která je cauchyovská vzhledem k právě jedné z těchto dvou metrik.

Příklad 2.26. Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriky $\varrho_1(x,y) = |x-y|$ a $\varrho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Rozhodněte, zda některý z prostorů $(\mathbb{R}, \varrho_1)$ a $(\mathbb{R}, \varrho_2)$ má více otevřených množin.

Příklad 2.27. Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriku $\varrho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Rozhodněte, zda je prostor $(\mathbb{R}, \varrho_2)$ úplný.

Příklad 2.28. Nechť P je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f\colon P \to P$ splňuje podmínku

$$\forall x, y \in P,\ x \neq y\colon \varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x,y).$$

Dokažte, že potom má f na P pevný bod.

Příklad 2.29. Uvažujme prostor spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ s následující metrikou

$$\varrho_{\text{int}}(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ukažte, že tento metrický prostor je první kategorie a není úplný a že jeho jednotková koule je řídká.

Příklad 2.30. Nalezněte metrický prostor (P, ϱ) a posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ takovou, že $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$.

Příklad 2.31. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ukažte, že množina

$$\{f \in \mathcal{C}([a,b])\colon \exists x \in (a,b)\colon f'(x) \in \mathbb{R}\}$$

je 1. kategorie v prostoru $\mathcal{C}([a,b])$.

Příklad 2.32. Ukažte, že prostor ℓ_2 je separabilní a jeho jednotková koule není totálně omezená.

Příklad 2.33. Ukažte, že metrický prostor (P, ϱ) je totálně omezený právě tehdy, když z každé posloupnosti prvků P lze vybrat cauchyovskou podposloupnost.

Příklad 2.34. Je sjednocení dvou souvislých množin souvislá množina?

Příklad 2.35. Je průnik dvou souvislých množin souvislá množina?

Příklad 2.36. Je vzor souvislé množiny při spojitém zobrazení souvislá množina?

Příklad 2.37. Je množina $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ souvislá?

Příklad 2.38. Nechť P je souvislý metrický prostor, který obsahuje více než jeden bod. Dokažte, že P je nespočetný.

Příklad 2.39. Ukažte, že každý normovaný lineární prostor je souvislý.

Příklad 2.40. Nechť $P = \mathbb{R}$ a

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{je-li } x \neq 0, y = 0; \\ \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x = 0, y \neq 0; \\ 0 & \text{je-li } x = y; \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x \neq 0, y \neq 0, x \neq y. \end{cases}$$

Určete, zda
(i) (P, ϱ) je metrický prostor;
(ii) (P, ϱ) je úplný;
(iii) (P, ϱ) je kompaktní.
Určete $\operatorname{diam} P$. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P, ϱ).

Příklad 2.41. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Určete, zda
(i) (P, ϱ) je metrický prostor;
(ii) (P, ϱ) je úplný;
(iii) (P, ϱ) je kompaktní.
Určete $\operatorname{diam} P$. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P, ϱ). Jsou jednobodové množiny otevřené?

Příklad 2.42. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n + 1.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Lze odtud usoudit, že T není kontrakce na P? Jestliže ne, dokažte to nějak jinak.

Příklad 2.43. Nechť $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n^2.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Dokažte, že přesto je T kontrakce na P. Jak je to možné?

Příklad 2.44. V prostoru $C([0,1])$ se supremovou metrikou definujeme pro dvě dané funkce $g, h \in C([0,1])$ *úsečku*:

$$f : [0,1] \to C([0,1]), \quad f(a) = g + a(h - g).$$

Dokažte, že: (a) úsečka je křivka;
(b) f je stejnoměrně spojitá na $[0,1]$;
(c) $C([0,1])$ je křivkově souvislý prostor.
Všimněte se, že stačí dokázat jen jedno z tvrzení (i)–(iii). Které?

Příklad 2.45. Zkoumejte, jaké vlastnosti musíme vyžadovat od metrického prostoru, aby v něm bylo možno nějakým rozumným způsobem zadefinovat úsečku a aby platila analogie tvrzení z předcházejícího příkladu. Pro jakou třídu metrických prostorů takto automaticky zajistíme křivkovou souvislost?

Příklad 2.46. Ukažte na příkladu, že uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislá množina.
Návod: Graf funkce $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (0,1)$.

Příklad 2.47. Ukažte příklad množin A, B takových, že $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$, A je křivkově souvislá množina, B není křivkově souvislá množina.
Návod: V $\mathbb{R}^2$ vezměte všechny úsečky délky 1 vycházející z počátku a mající směrnice $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. To je množina A. Množinu B vytvořte tak, že k A přidáte ještě úsečku $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \in [\frac{1}{2}, 1], y = 0\}$. Je A křivkově souvislá? Co je $\overline{A}$? Platí $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$? Je B křivkově souvislá?

3. Funkce více proměnných

3.1. **Základní pojmy.**

Příklad 3.1. Načrtněte grafy následujících funkcí:

$$f(x,y) = 3\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right), \qquad 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4 - 2x;$$
$$f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2};$$
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Příklad 3.2. Načrtněte graf funkce (jedné proměnné)

$$F(t) = f(\cos t, \sin t),$$

kde

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (y \ge x); \\ 0 & (y < x). \end{cases}$$

Příklad 3.3. Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

$$f(x,y) = x + \sqrt{y-1}; \quad f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}};$$
$$f(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{x+y}\right); \quad f(x,y) = \log -x - y; \quad f(x,y) = \sqrt{\sin x^2 + y^2}.$$

Příklad 3.4. Určete a načrtněte vrstevnice následujících funkcí:

$$f(x,y) = x + y; \quad f(x,y) = x^2 + y^2; \quad f(x,y) = x^2 - y^2;$$
$$f(x,y) = (x+y)^2; \quad f(x,y) = \frac{y}{x}; \quad f(x,y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2};$$
$$f(x,y) = \sqrt{xy}; \quad f(x,y) = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}; \quad f(x,y) = x^y \ (x > 0).$$

Příklad 3.5. Spočtěte $f(1, \frac{y}{x})$, jestliže $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Příklad 3.6. Určete $f(t)$, jestliže $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x > 0)$.

Příklad 3.7. Nechť $z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$ a $z = x$ pro $y = 1$. Určete funkce f a z.

Příklad 3.8. Nechť $z = x + y + f(x - y)$ a $z = x^2$ pro $y = 0$. Určete funkce f a z.

Příklad 3.9. Určete $f(x,y)$, jestliže $f(x + y, \frac{x}{y}) = x^2 - y^2$.

Výsledky. Příklad 3.1: trojúhelník, sféra, kužel, paraboloid.

Příklad 3.2:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & [-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi]; \\ 0 & (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Příklad 3.3: $(-\infty, \infty) \times [1, \infty)$; kruh $\left\{x^2 + y^2 \le 1\right\}$; doplněk téhož kruhu v $\mathbb{R}^2$; plocha ohraničená dvěma tupými úhly vymezenými přímkami $y = 0$ a $y = 2x$ bez počátku; polorovina $\{x + y < 0\}$; sjednocení mezikruží $\{2k\pi \le x^2 + y^2 \le (2k+1)\pi\}$.

Příklad 3.4: rovnoběžné přímky, soustředné kružnice, hyperboly se společnou asymptotou $y = \pm x$, rovnoběžné přímky, svazek paprsků vycházejících z počátku bez počátečního bodu; soustředné podobné elipsy, hyperboly ležící v kvadrantech I a III s asymptotami blížícími se k souřadným osám; křivky $y = \frac{C}{\log x}$.

Příklad 3.5: $f(1, \frac{y}{x}) = f(x, y)$.

Příklad 3.6: $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$.

Příklad 3.7: $f(t) = 2t + t^2$, $z(x, y) = x - 1 + \sqrt{y}$.

Příklad 3.8: $f(t) = t^2 - t^2$, $z(x, y) = 2y + (x - y)^2$.

Příklad 3.9: $f(x, y) = x^2 \frac{1-y}{1+y}$.

3.2. **Limita a spojitost.**

Poznámka. V této kapitole budeme vyšetřovat limity funkcí více proměnných. Tyto limity chápeme ve smyslu definice limity pro zobrazení mezi metrickými prostory. Výjimku tvoří limity v bodech, které mají jednu nebo více složek nevlastních (tj. v bodech typu $[a, \infty]$, $[\infty, b]$, $[\infty, \infty]$ a podobně). Tyto limity chápeme ve smyslu následující definice: řekneme, že $\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} f(x, y) = A \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x, y > K :\ |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Obdobně definujeme limity v bodech s více nevlastními složkami a také nevlastní limity (tj. případy $A = \pm\infty$).

Příklad 3.10. Nechť

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Dokažte, že

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} f(x, y) \right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} f(x, y) \right) = -1,$$

a tedy

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$$

neexistuje.

Příklad 3.11. Nechť

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}.$$

Dokažte, že sice

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} f(x, y) \right) = \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} f(x, y) \right) = 0,$$

ale přesto

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$$

neexistuje.

Příklad 3.12. Nechť

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right), & x \neq 0,\ y \neq 0; \\ 0, & x = 0 \text{ nebo } y = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že sice ani jedna z limit

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} f(x, y) \right) \qquad \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} f(x, y) \right)$$

neexistuje, ale přesto

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} f(x, y)$$

existuje. Čemu se tato limita rovná?

Příklad 3.13. Spočtěte

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \quad \text{a} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right),$$

kde

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \qquad a=b=\infty;\\
f(x,y) &= \frac{x^y}{1+x^y}, \qquad a=\infty,\ b=0+;\\
f(x,y) &= \sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right), \qquad a=b=\infty;\\
f(x,y) &= \frac{1}{xy}\operatorname{tg}\left(\frac{xy}{1+xy}\right), \qquad a=0,\ b=\infty;\\
f(x,y) &= \log_x(x+y), \qquad a=1,\ b=0.
\end{aligned}$$

Příklad 3.14. Spočtěte následující limity ($a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} &= \frac{x+y}{x^2-xy+y^2};\\
\lim_{[x,y]\to[0,a]} &= \frac{\sin(xy)}{x};\\
\lim_{[x,y]\to[0,0]} &= (x^2+y^2)^{x^2y^2};\\
\lim_{[x,y]\to[\infty,a]} &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}};\\
\lim_{[x,y]\to[1,0]} &= \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Příklad 3.15. Dokažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2 \neq 0);\\ 0 & (x^2+y^2=0), \end{cases}$$

je spojitá jako funkce proměnné x i proměnné y, ale není spojitá jako funkce dvou proměnných.

Příklad 3.16. Dokažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x^2+y^2 \neq 0);\\ 0 & (x^2+y^2=0), \end{cases}$$

je spojitá v bodě $[0,0]$ po všech přímkách $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $t \in (0,\infty)$, $\alpha \in [0,2\pi]$, ale přesto není v bodě $[0,0]$ spojitá.

Příklad 3.17. Zjistěte, zda je funkce

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$$

spojitá na svém definičním oboru.

Příklad 3.18. Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-x^2y^3}{x^2+y^2}$$

dodefinovat v bodě $[0,0]$ tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}^2$.

Příklad 3.19. Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}$$

dodefinovat na přímce $y = x$ tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}^2$.

Příklad 3.20. Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x,y) = \frac{\sin(x)\sin^3(y)}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$$

dodefinovat v bodě $[0,0]$ tak, aby byla v tomto bodě spojitá.

Příklad 3.21. Najděte podmínky na konstanty $a, b, c \in \mathbb{R}$, aby existovala limita ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{[x,y]\to[0,\alpha]} = \frac{xy}{ax^2 + bxy + cy^2}.$$

Výsledky. Příklad 3.12: 0

Příklad 3.13: $0, 1$; $\frac{1}{2}, 1$; $0, 1$; $0, 1$; $1, \infty$.

Příklad 3.14: 0; a; 1; e; $\log 2$.

Příklad 3.17: ano

Příklad 3.18: ano, $f(0,0) = 1$.

Příklad 3.19: ano, $f(x,x) = 3x^2$.

3.3. **Derivace a totální diferenciál.**

Příklad 3.22. Dokažte, že pro funkci dvou proměnných $f(x,y)$ a pro libovolné pevné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,a) = \frac{d}{dx} f(x,a)$$

Příklad 3.23. Spočtěte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,1), \quad \text{jestliže} \quad f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

Příklad 3.24. Spočtěte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \quad \text{jestliže} \quad f(x,y) = \sqrt[3]{xy}.$$

Má funkce $f(x,y)$ v bodě $[0,0]$ totální diferenciál?

Příklad 3.25. Má funkce

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

v bodě $[0,0]$ totální diferenciál?

Příklad 3.26. Má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & [x,y] \neq [0,0]; \\ 0 & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

v bodě $[0,0]$ totální diferenciál?

Příklad 3.27. Spočtěte

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

pro funkce

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2; \quad f(x,y) = xy + \frac{x}{y}; \quad f(x,y) = \frac{x}{y^2};$$

$$f(x,y) = \frac{\cos x^2}{y}; \quad f(x,y) = x^y; \quad f(x,y) = \log\left(x + y^2\right); \quad f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z; \quad f(x,y,z) = x^{\left(\frac{y}{z}\right)}; \quad f(x,y,z) = x^{(y^z)}.$$

Příklad 3.28. Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Příklad 3.29. Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že neexistuje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Příklad 3.30. Spočtěte první a druhý diferenciál následujících funckí:

$$f(x,y) = x^m y^n, \quad f(x,y) = \frac{x}{y}, \quad f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2};$$

$$f(x,y) = e^{xy}, \quad f(x,y) = xy + yz + zx, \quad f(x,y) = \frac{z}{x^2+y^2}.$$

Příklad 3.31. Odhadněte chybu následujících veličin v závislosti na chybě jednotlivých proměnných:

$$(1+x)^m(1+x)^n, \quad \log(1+x)\log(1+y), \quad \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Příklad 3.32. Objem válce s podstavou o poloměru r a výšce h je dán vzorcem $V = \pi r^2 h$. Je-li výška $v = 5$ cm změřena s přesností na 0.005 cm a poloměr podstavy $r = 3$ cm je změřen s přesností na 0.01 cm, určete, s jakou největší možnou chybou je určen objem válce V.

Příklad 3.33. Plocha trojúhelníka ABC je dána vzorcem

$$P = \frac{bc\sin\alpha}{2}$$

Víme-li, že veličiny b, c, α byly naměřeny s přesností na 1% a úhel α byl změřen na $\pi/4$, dokažte, že výsledná plocha je určena s maximální chybou menší než 2.8%.

Výsledky. Příklad 3.23: 1.

Příklad 3.24: 0, 0, ne.

Příklad 3.25: ne.

Příklad 3.26: ano.

Příklad 3.31: $1 + mx + ny$, xy, $x + y$.

Příklad 3.32: $0,345\pi$.

3.4. **Řetízkové pravidlo.**

Příklad 3.34. Spočtěte

$$\frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{a} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta},$$

kde

$$T(x,y) = x^3 - xy + y^3$$

a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Příklad 3.35. Spočtěte

$$\frac{dH}{dt},$$

kde

$$H(t) = \sin 3x - y$$

a

$$x = 2t^2 - 3, \quad y = \frac{t^2}{2} - 5t + 1.$$

Příklad 3.36. Poloměr podstavy r rotačního kužele roste o 2 cm za sekundu a výška h roste o 3 cm za sekundu. Spočtěte míru růstu objemu V v okamžiku, kdy $r = 5$ cm a $h = 15$ cm.

Příklad 3.37. Lokální atmosférická teplota T závisí na prostorových souřadnicích x, y, z daného bodu a na čase t podle vzorce

$$T(x,y,z,t) = \frac{xy}{1+z}(1+t).$$

Teploměr je připevněn k meteorologickému balónu, který se pohybuje atmosférou po křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = t, \; y = 2t, \; z = t - t^2.$$

Určete míru změny teploty v čase $t = 1$.

Výsledky. Příklad 3.34:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 3r^2\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) - 2r\cos\theta\sin\theta,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 3r^2\left(\sin\theta - \cos\theta\right)\cos\theta\sin\theta + r^2\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right).$$

Příklad 3.35:

$$\frac{dH}{dt} = (11t+5)\cos\left(\tfrac{11}{2}t^2 + 5t - 10\right).$$

Příklad 3.36:

$$\frac{dV}{dt} = 125\pi \text{ cm}^3\text{s}^{-1}.$$

Příklad 3.37: teplota roste o 14 stupňů za hodinu.

3.5. **Implicitní funkce.**

Příklad 3.38. Vypočítejte derivaci $y'(x)$ implicitní funkce $y = y(x)$ definované následujícími předpisy:

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2, \qquad \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right);$$
$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1);$$
$$x^y = y^x \quad (x \neq y), \qquad y = 2x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Příklad 3.39. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial z}{\partial y}$ implicitní funkce $z = z(x, y)$ definované předpisem

$$z^2 + xy^3 = \frac{xz}{y}.$$

Příklad 3.40. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial x}{\partial y}$ implicitní funkce $x = x(y, z)$ definované předpisem

$$xy^3 = y - z.$$

Příklad 3.41. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial y}{\partial z}$ implicitní funkce $y = y(x, z)$ definované předpisem

$$e^{yz} - x^2 z \log y = \pi.$$

Příklad 3.42. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial z}{\partial x}$ implicitní funkce $z = z(x, y)$ definované předpisem

$$F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = 0,$$

kde F je diferencovatelná funkce dvou proměnných.

Výsledky. Příklad 3.38:

$$\frac{x+y}{y-x}, \quad \frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}, \quad \frac{y^2(1-\log x)}{x^2(1-\log y)}, \quad \frac{y}{x}.$$

Příklad 3.39:

$$\frac{3xy^4 + xz}{xy - 2zy^2}.$$

Příklad 3.40:

$$\frac{1 - 3xy^2}{y^3}.$$

Příklad 3.41:

$$\frac{x^2 y \log y - y^2 e^{yz}}{yze^{yz} - x^2 z}.$$

Příklad 3.42:

$$\frac{2x\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2 - z^2, y^2 + xz\right) + z\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2 - z^2, y^2 + xz\right)}{2z\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2 - z^2, y^2 + xz\right) - x\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2 - z^2, y^2 + xz\right)}.$$

Příklad 3.43. Dokažte, že vztahy

$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x$$

definují na okolí bodu $[x, y] = [1, 2]$ hladké funkce u, v proměnných x, y takové, že $u(1, 2) = 0$ a $v(1, 2) = 0$. Rozhodněte, zda mají funkce u a v v bodě $[x, y] = [1, 2]$ totální diferenciály, a pokud ano, spočítejte je.

Příklad 3.44. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{arctg}(\pi x) + y^2 z, \\ v &= e^{-x} + 2\frac{y}{z} \\ w &= \cos(2xy) + 2\sqrt{z} \end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[u, v, w] = [4, \frac{3}{2}, 5]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(4, \frac{3}{2}, 5) = 0$, $y(4, \frac{3}{2}, 5) = 1$, $z(4, \frac{3}{2}, 5) = 4$. Rozhodněte, zda má funkce $y(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[4, \frac{3}{2}, 5]$, a pokud ano, spočtěte jej. Má funkce $y(u, v, w)$ v bodě $[4, \frac{3}{2}, 5]$ stacionární bod?

Výsledek: $\nabla y(4, \frac{3}{2}, 5) = (\frac{2}{\pi+16}, \frac{2\pi}{\pi+16}, \frac{\pi-8}{\pi+16})$, funkce $y(u, v, w)$ v bodě $[4, \frac{3}{2}, 5]$ nemá stacionární bod

Příklad 3.45. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned} u &= \sin x + xy + e^z, \\ v &= \cos y + xe^{-y}, \\ w &= x^2 + 2y - \cos(xz) \end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[u, v, w] = [1 + \sin 1, 2, 0]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(1 + \sin 1, 2, 0) = 1$, $y(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$, $z(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$. Rozhodněte, zda má funkce $x(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[1 + \sin 1, 2, 0]$, a pokud ano, spočtěte jej.

Výsledek: $\nabla x(1 + \sin 1, 2, 0) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

Příklad 3.46. Dokažte, že vztahy

$$\begin{aligned} u &= \sin(\pi xy) - \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) \\ v &= 3xy^2 + e^{x+y} \end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[u, v] = [\frac{\pi}{4}, -2]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(\frac{\pi}{4}, -2) = -1$ a $y(\frac{\pi}{4}, -2) = 1$. Je-li navíc $z(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, spočtěte $\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, -2)$.

Výsledek: $\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, -2) = -\frac{2}{9-2\pi}$

Příklad 3.47. Dokažte, že vztahy

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{tg}(xy) + \log(x^2 + y^2) \\ v &= \arcsin(2x) - (3^x)^y \end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[u, v] = [0, -1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, -1) = 0$ a $y(0, -1) = 1$. Rozhodněte, zda má funkce y v bodě $[u, v] = [0, -1]$ totální diferenciál, a pokud ano, spočítejte jej.

Výsledek: $\nabla y(0, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2(2-\log 3)})$

Příklad 3.48. Dokažte, že vztahy

$$\begin{aligned} xy^2 + xu + yv^2 &= 3 \\ x^3 y + 2xv - u^2 v &= 2 \end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[x, y] = [1, 1]$ hladké funkce u, v proměnných x, y takové, že $u(1, 1) = 1$ a $v(1, 1) = 1$. Rozhodněte, zda existuje tečná rovina ke grafu funkce $u(x, y)$ v bodě $[x, y, u] = [1, 1, 1]$, a pokud ano, napište její rovnici.

Výsledek: $u - 1 = \frac{8}{5}(x - 1) - \frac{1}{5}(y - 1)$

Příklad 3.49. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned} u &= \cos(\pi y) + 2\sqrt{xz}, \\ v &= \frac{y}{x} - \log z \\ w &= \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}(yz) \end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[u, v, w] = [3, 0, \frac{1}{2}]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(3, 0, \frac{1}{2}) = 1$, $y(3, 0, \frac{1}{2}) = 0$, $z(3, 0, \frac{1}{2}) = 1$. Rozhodněte, zda má funkce $y(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$, a pokud ano, spočtěte jej. Má funkce $y(u, v, w)$ v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$ stacionární bod?

Výsledek: $\nabla y(3, 0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, funkce $y(u, v, w)$ nemá v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$ stacionární bod

3.6. **Extrémy funkcí více proměnných.**

Příklad 3.50. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$$

vzhledem k jejímu definičnímu oboru. Existují globální extrémy?

Příklad 3.51. Rozhodněte, zda má funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + yz$$

globální extrémy na množině

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ y + z = 2,\ x^2 + y^2 = 2\right\},$$

a pokud ano, spočítejte je.

Výsledek: $\max f = f(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2}$, f nenabývá svého minima, $\inf f = 2(\sqrt{2} - 1)$

Příklad 3.52. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$F(x, y, z) = x \cos y - z^2 - x^2$$

na $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, zda má funkce na $\mathbb{R}^3$ globální maximum a globální minimum a pokud ano, určete jejich hodnoty a ve kterých bodech se nabývají.

Výsledek: $\max f = f(\frac{(-1)^k}{2}, k\pi, 0) = \frac{1}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

Příklad 3.53. Najděte všechny globální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

na množině $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ xy = 4\right\}$. Zdůvodněte existenci globálních extrémů.

Výsledek: $\max f = f(2, 2, -1) = 5$, $\min f = f(-2, -2, 1) = -5$

Příklad 3.54. Najděte všechny globální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 + xy$$

na uzavřeném trojúhelníku v $\mathbb{R}^2$ s vrcholy

$$A = [0, 1],\ B = [2, 0],\ C = [-1, -1].$$

Výsledek: $\max f = f(0, 0) = 0$, $\min f = f(2, 0) = -4$

Příklad 3.55. Rozhodněte, zda funkce

$$f(x, y) = 2x^2 + 5y^2 + 2xy - 2x - 4y$$

nabývá na množině

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\right\}$$

svých globálních extrémů, a pokud ano, určete je.

Výsledek: $\max f = f(0, 2) = 12$, $\min f = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -1$

Příklad 3.56. Rozhodněte, zda funkce

$$f(x,y) = (x+y)^2$$

nabývá na množině

$$M = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^3 + y^3 \leq 2xy\right\}$$

svých globálních extrémů, a pokud ano, nalezněte je.

(**Návod:** Dokažte, že $M \subset [0,2]^2$.)

Výsledek: $\max f = f(1,1) = 4$, $\min f = f(0,0) = 0$