3. zápočtová písemka - vzor

Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{3}, \pi]. \end{cases}$$

1. Dokažte, že tato funkce má konečnou variaci na $[0, \pi]$
2. Rozviňte ji v cosinovou Fourierovu řadu, tj. nalezněte koeficienty a_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že platí
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad x \in (0, \pi) \setminus \{\tfrac{1}{3}\}.$$
3. S pomocí předchozího příkladu sečtěte následující řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{\sin(k/3)}{3k} + \frac{\cos(k/3)}{k^2} \Big)$$
(Můžete bez důkazu použít, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$)