MATEMATICKÁ ANALÝZA 4 NMMA202 - LETNÍ SEMESTR 2023–2024 PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

13. Stejnoměrná konvergence

13.1. Úvod a základní pojmy.

Definice. Nechť M je množina, (Q, σ) je metrický prostor a $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ *konverguje bodově* k f na M, jestliže pro každé $x \in M$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Bodovou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ k funkci f značíme $f_n \to f$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně* k f na M, jestliže

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ k funkci f značíme $f_n \rightrightarrows f$.

Poznámky.
(a) Nechť M je množina, (Q, σ) je metrický prostor a $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Potom posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně k f na M právě tehdy, když existují $\varepsilon > 0$, rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ a posloupnost $\{x_k\}$ prvků M splňující

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \sigma(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) \geq \varepsilon.$$

(b) Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ bodově konverguje, pak je limitní funkce určena jednoznačně.
(c) Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na M, potom $f_n \to f$ na M.

Věta 13.1 (charakterisace stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť M je neprázdná množina, (Q, σ) je metrický prostor, $f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$, a $f\colon M \to Q$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na M právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\sigma(f_n(x), f(x)) : x \in M\} = 0.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Pak tedy pro každé $n \geq n_0$, platí

$$0 \leq \sup\{\sigma(f_n(x), f(x)) : x \in M\} \leq \varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$, platí

$$\sup\{\sigma(f_n(x), f(x)) : x \in M\} < \varepsilon.$$

Potom zřejmě pro každá $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na M. $\square$

Příklad. Nechť $f_n(x) = \frac{1}{2^n}\sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Položme

$$f(x) = 0 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Potom tedy $f_n \to f$ na $\mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $2^{-n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$|f_n(x) - f(x)| = \tfrac{|\sin(nx)|}{2^n} \leq 2^{-n} \leq 2^{-n_0} < \varepsilon.$$

Podle Věty 13.1 tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x,r)$.

Příklad. Nechť $f_n(x) = x^n$ pro $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na $[0,1]$.

Řešení. Platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } x \in [0,1), \\ 1, & \text{jestliže } x = 1. \end{cases}$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0,1), \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Potom tedy $f_n \to f$ na $[0,1]$. Položme $x_n = 2^{-\frac{1}{n}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = x_n^n = \tfrac{1}{2},$$

a tedy $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0,1]$ podle poznámky (a). Z poznámek (b) a (c) plyne, že posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $[0,1]$.

Definice. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na P s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* k f na P, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ takové, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na $B_\varrho(x,r)$. Lokálně stejnoměrnou konvergenci značíme symbolem $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$.

Příklad. Nechť $f_n(x) = x^n$ pro $x \in [0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $[0,1)$.

Řešení. Položme

$$f(x) = 0 \quad \text{pro } x \in [0,1).$$

Potom $f_n \to f$ na $[0,1)$. Zvolme $x \in [0,1)$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $x + r < 1$.

$$\sup_{y \in B(x,r)} |f_n(y) - f(y)| = (x+r)^n,$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in B(x,r)} |f_n(y) - f(y)| = 0.$$

Podle Věty 13.1 tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x,r)$. Protože $x \in [0,1)$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $x \in [0,1)$.

Poznámka. Rovnost

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

obecně neplatí. Například pro $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, máme $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-} x^n = 1$, ale $\lim_{x\to 1-} \lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Věta 13.2 (Mooreova–Osgoodova)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$, f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce z P do $\mathbb{R}$ a platí*

(a) *existuje $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $(B(x_0,r) \setminus \{x_0\})$,*
(b) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $a_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$.*

Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky předpokladu (a) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Potom platí

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}\ \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 \colon |f_n(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon.$$

Odtud díky předpokladu (b) vyplývá, že

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| \leq 2\varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tudíž splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, takže má vlastní limitu, kterou označíme symbolem a.

Dokážeme, že $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky předpokladům (a) a (b) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ a

$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \colon |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Díky předpokladu (b) nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \colon |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ platí

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < 3\varepsilon.$$

Odtud již plyne tvrzení. □

Věta 13.3 (vztah stejnoměrné konvergence a spojitosti)**.** *Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $f_n \colon P \to Q$ jsou spojitá zobrazení, $n \in \mathbb{N}$, $f \colon P \to Q$ je zobrazení a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na P. Potom f je spojité.*

konec 1. přednášky (19.2.2024)

Důkaz. Zvolme $a \in P$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(a, r)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in B(a, r) \colon \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) < \varepsilon.$$

Díky spojitosti funkce f_{n_0} nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že

$$\forall x \in B(a, \delta) \colon \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) < \varepsilon.$$

Potom pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí

$$\sigma(f(x), f(a)) \leq \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + \sigma(f_{n_0}(a), f(a)) < 3\varepsilon.$$

Funkce f je tedy spojitá v bodě a. Protože bod a byl zvolen libovolně, je f spojitá na P. □

Příklad. Nechť $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$, $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na na $[0, \infty)$.

Řešení. *1. krok (bodová konvergence):* Pro každé $x \in [0, \infty)$ platí

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0.$$

Označme symbolem f funkci definovanou na $[0, \infty)$ předpisem $f(x) = 0$ pro $x \in [0, \infty)$. Potom $f_n \to f$ na $[0, \infty)$.

2. krok (stejnoměrná konvergence): Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$\sigma_n = \sup \{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, \infty)\}.$$

Protože $f_n(0) = 0$ a

$$f_n'(x) = 2ne^{-nx^2}(1 - 2nx^2),$$

platí $\sigma_n = f(x_n)$, kde $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$, a tedy $\sigma_n = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2n}$. Protože $\sigma_n \not\to 0$, plyne z Věty 13.1, že $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0, \infty)$.

3. krok (lokálně stejnoměrná konvergence): Zvolme $x \in (0,\infty)$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $x - r > 0$, a n_0 splňující $x_{n_0} < x - r$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, funkce f_n klesající na $(x-r, x+r)$, a tedy

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (x-r, x+r)\} = f_n(x-r).$$

Z 1. kroku plyne, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x-r) = 0$, a tedy, podle Věty 13.1 platí $f_n \rightrightarrows f$ na $(x-r, x+r)$. Protože $x \in (0,\infty)$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $(0,\infty)$.

Věta 13.4 (charakterisace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b) právě tehdy, když pro každá $c, d \in (a,b)$, $c < d$, konverguje $\{f_n\}$ stejnoměrně na $[c,d]$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme symbolem f funkci splňující $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b). Předpokládejme, že pro nějaká $c, d \in (a,b)$, $c < d$, platí $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[c,d]$. Podle výše uvedené poznámky nalezneme $\varepsilon > 0$, rostoucí posloupnost $\{n_k\}$ přirozených čísel a posloupnost $\{x_k\}$ prvků $[c,d]$ tak, že

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon.$$

Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty nalezneme rostoucí posloupnost $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ přirozených čísel a $x^* \in [c,d]$ splňující $x_{k_j} \to x^*$, $j \to \infty$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x^*, r)$, a $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ \forall x \in B(x^*, r)\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k_{j_0}} \geq n_0$ a $x_{k_{j_0}} \in B(x^*, r)$. Potom

$$\varepsilon \leq |f_{n_{k_{j_0}}}(x_{k_{j_0}}) - f(x_{k_{j_0}})| < \varepsilon,$$

což je spor.

Alternativní důkaz: Pro každé $x \in [c,d]$ nalezneme otevřený interval $I_x \subset (a,b)$ takový, že $x \in I_x$ a $f_n \rightrightarrows f$ na I_x. Potom

$$[c,d] \subset \bigcup_{x\in(a,b)} I_x.$$

Podle Borelovy věty nalezneme body $x_1, \dots, x_k \in [c,d]$ takové, že $[c,d] \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_{x_j}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ platí

$$\forall x \in I_{x_i}\ \forall n \geq n_i\colon |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Položme $n^* = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Potom pro každé $n \geq n^*$ a každé $x \in I_{x_i}$ platí $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$.

$\Leftarrow$ Zvolme $x \in (a,b)$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $[x-r, x+r] \subset (a,b)$. Označme symbolem f funkci splňující $f_n \rightrightarrows f$ na $[x-r, x+r]$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $(x-r, x+r)$. Protože x bylo zvoleno libovolně, platí $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b). □

Definice. Nechť M je množina, (Q, σ) je metrický prostor a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ je *stejnoměrně cauchyovská* na M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in M : \sigma(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

Věta 13.5 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť M je množina, (Q, σ) je úplný metrický prostor a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně konvergentní na M právě tehdy, když je stejnoměrně cauchyovská na M.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme symbolem f funkci splňující $f_n \rightrightarrows f$ na M. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\ \forall x \in M\colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Zvolme $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$. Potom

$$\forall x \in M\colon \sigma(f_n(x), f_m(x)) \leq \sigma(f_n(x), f(x)) + \sigma(f(x), f_m(x)) < 2\varepsilon,$$

a tedy je posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně cauchyovská na M.

$\Leftarrow$ Zvolme $x \in M$. Potom je posloupnost $\{f_n(x)\}$ cauchyovská v Q, a tedy má díky úplnosti Q limitu, kterou označíme symbolem $f(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,\ m \geq n_0\ \forall x \in M\colon \sigma(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

Protože $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$, plyne odtud, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\ \forall x \in M\colon \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na M. □

Věta 13.6 (stejnoměrná konvergence derivací)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že*

(a) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ má f_n vlastní derivaci na (a,b),*
(b) *existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje,*
(c) *$\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a,b).*

Potom existuje $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b), f má vlastní derivaci na (a,b) a platí $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a,b).

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky Větě 13.5 a předpokladu (b) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí

$$\forall x \in (a,b)\colon |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon \quad \& \quad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Zvolme $x \in (a,b)$ a $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$. Potom

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Podle Lagrangeovy věty pro funkci $f_n - f_m$ nalezneme ξ ležící mezi x a x_0 takové, že

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - x_0|.$$

Potom dle (1) platí

$$|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \varepsilon.$$

Navíc

$$|x - x_0| \leq b - a,$$

neboť (a,b) je omezený interval, takže kombinací odhadů dostáváme

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(b - a + 1).$$

Posloupnost $\{f_n\}$ je tedy stejnoměrně cauchyovská na (a,b), a tudíž je podle Věty 13.5 stejnoměrně konvergentní na (a,b). Její limitu označíme f.

Zbývá dokázat, že f má vlastní derivaci na (a,b) a $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a,b). Protože f_n' konverguje stejnoměrně na (a,b), stačí dokázat, že $f_n' \to f'$ na (a,b). Zvolme $y \in (a,b)$ a $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci φ_n předpisem

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}, \quad x \in (a,b) \setminus \{y\}.$$

Zvolme $x \in (a,b) \setminus \{y\}$ a $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$. Podle Lagrangeovy věty nalezneme η ležící mezi x a y takové, že

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))| = |f_n'(\eta) - f_m'(\eta)| \cdot |x - y|.$$

Tedy podle definice funkcí φ_n a φ_m a podle (1) platí

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = |f_n'(\eta) - f_m'(\eta)| < \varepsilon.$$

Protože x bylo zvoleno libovolně, je posloupnost $\{\varphi_n\}$ stejnoměrně cauchyovská, a tedy podle Věty 13.5 (prostor $\mathbb{R}$ je úplný) také stejnoměrně konvergentní na $(a,b) \setminus \{y\}$. Podle Mooreovy–Osgoodovy věty (Věta 13.2) tudíž existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to y} \varphi_n(x) \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to y} \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

a jsou si rovny. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to y} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(y)$$

a

$$\lim_{x\to y}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(y),$$

existuje vlastní $f'(y)$ a platí $f'(y)=\lim_{n\to\infty}f_n'(y)$. Protože y bylo zvoleno libovolně, plyne odtud tvrzení věty. □

konec 2. přednášky (26.2.2024)

Věta 13.7 (záměna limity a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $f_n\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ pro $n\in\mathbb{N}$, $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$, $f_n\rightrightarrows f$ na (a,b) a pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $f_n\in\mathcal{N}(a,b)$. Potom $f\in\mathcal{N}(a,b)$ a*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. Zvolme $x_0\in(a,b)$. Potom pro každé $n\in\mathbb{N}$ nalezneme funkci $F_n\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ takovou, že $F_n'=f_n$ na (a,b) a $F_n(x_0)=0$. Podle Věty 13.6 je posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ stejnoměrně konvergentní na (a,b). Označme $F(x)=\lim_{n\to\infty}F_n(x)$, $x\in(a,b)$. Podle Věty 13.6 platí $F'=f$ na (a,b). Podle Mooreovy–Osgoodovy věty platí

$$\lim_{x\to a_+}F(x)=\lim_{x\to a_+}\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a_+}F_n(x)$$

a

$$\lim_{x\to b_-}F(x)=\lim_{x\to b_-}\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b_-}F_n(x),$$

přičemž obě tyto limity jsou vlastní, tudíž

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=\lim_{x\to b_-}F(x)-\lim_{x\to a_+}F(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to b_-}F_n(x)-\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a_+}F_n(x)\\&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.\end{aligned}$$

□

Značení. Nechť M je množina, $f\colon M\to\mathbb{R}$ a $g\colon M\to\mathbb{R}$. Píšeme $f\le g$ na M, jestliže pro každé $x\in M$ platí $f(x)\le g(x)$. Speciálně píšeme $f\ge 0$ na M, jestliže f je nezáporná na M. Obdobně užíváme symbolů $f\ge g$, $f<g$ a $f>g$.

Definice. Nechť M je množina a $f_n\colon M\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ je *neklesající* na M, jestliže pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $f_n\le f_{n+1}$ na M. Obdobně definujeme posloupnost *nerostoucí*, *klesající*, *rostoucí*, *monotónní* a *ryze monotónní* na M.

Věta 13.8 (Diniova)**.** *Nechť (P,ϱ) je kompaktní metrický prostor a $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých zobrazení P do $\mathbb{R}$. Nechť $f\colon P\to\mathbb{R}$ je spojité a $f_n\to f$ na P. Potom $f_n\rightrightarrows f$ na P.*

Důkaz. Vzhledem k tomu, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ je f_n-f spojité, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f(x)=0$ pro každé $x\in P$, jinak bychom uvažovali posloupnost $\{f_n-f\}$. Dále můžeme předpokládat, že na P platí

$$f_1\ge f_2\ge\dots\ge 0,$$

neboť v opačném případě bychom uvažovali posloupnost $\{-f_n\}$. Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Nalezneme $\varepsilon>0$, posloupnost $\{x_k\}$ prvků P a rostoucí posloupnost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ taková, že pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí $f_{n_k}(x_k)\ge\varepsilon$. Díky kompaktnosti P nalezneme rostoucí posloupnost $\{k_j\}\subset\mathbb{N}$ a prvek $x\in P$ tak, že $x_{n_{k_j}}\to x$. Protože $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$, nalezneme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $f_{n_0}(x)<\varepsilon$. Díky spojitosti f_{n_0} nalezneme $\delta>0$ takové, že pro každé $y\in B(x,\delta)$ platí $f_{n_0}(y)<\varepsilon$. Nalezneme $j_0\in\mathbb{N}$ takové, že $n_{k_{j_0}}\ge n_0$ a $x_{k_{j_0}}\in B(x,\delta)$. Potom díky monotonii posloupnosti $\{f_n\}$ platí

$$\varepsilon\le f_{n_{k_{j_0}}}(x_{k_{j_0}})\le f_{n_0}(x_{k_{j_0}})<\varepsilon,$$

což je spor. Tedy $f_n\rightrightarrows f$ na P. □

Věta 13.9 (Weierstrassova)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje polynom $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takový, že*

$$\forall x \in [a,b]\colon |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $[a,b] = [0,1]$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

a tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1,\\
&\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = nx,\\
&\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (k - nx)^2\\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2nx \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} kn\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} - 2n^2x^2 + n^2x^2\\
&= nx \sum_{k=1}^{n} (k-1)\binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} + nx \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} - n^2x^2\\
&= nx(n-1)x + nx - n^2x^2 = nx(1-x).
\end{aligned}$$

Díky tomu, že f je omezená a stejnoměrně spojitá na $[0,1]$, nalezneme $M, \delta > 0$ taková, že

$$\forall\, x \in [0,1] : |f(x)| \le M$$

a

$$\forall\, x, y \in [0,1],\ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\tfrac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Potom P_n je polynom a pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\tfrac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right|\\
&\le \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\\
&= \sum_{k:|x-\frac{k}{n}|<\delta} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\\
&\quad + \sum_{k:|x-\frac{k}{n}|\ge\delta} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\\
&= S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Potom

$$S_1 \le \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon$$

a

$$S_2 \le \frac{2M}{n^2\delta^2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(k-nx)^2 = \frac{2M}{n^2\delta^2}nx(1-x) \le \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{M}{2n_0\delta^2} < \varepsilon$. Potom pro každé $x \in [0,1]$ platí $|f(x) - P_{n_0}(x)|$.

Nyní předpokládejme, že $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Je-li $a = b$, pak je tvrzení triviální. Předpokládejme, že $a < b$. Definujme zobrazení $\varphi\colon [0,1] \to [a,b]$ předpisem

$$\varphi(x) = (b-a)x + a.$$

Potom φ je spojitá bijekce $[0,1]$ na $[a,b]$ a platí

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}, \quad y \in [a,b].$$

Položme $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Potom $\tilde{f} \in \mathcal{C}([0,1])$. Podle již dokázaného tvrzení nalezneme polynom $\tilde{P}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takový, že pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{P}(x)| < \varepsilon.$$

Položme

$$P(y) = \tilde{P}\left(\frac{y-a}{b-a}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Potom P je polynom a pro každé $y \in [a,b]$ platí

$$|f(y) - P(y)| = |\tilde{f}(\varphi^{-1}(y)) - \tilde{P}(\varphi^{-1}(y))| < \varepsilon.$$

□

Poznámka. Tvrzení Weierstrassovy věty nelze rozšířit na interval, který není omezený a uzavřený. Například pro $f(x) = e^x$ na $(0,\infty)$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x\to\infty}|f(x) - P(x)| = \infty$, podobně pro $f(x) = \frac{1}{x}$ a libovolný polynom P platí $\lim_{x\to 0+}|f(x) - P(x)| = \infty$.

Poznámka. Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost funkcí z $\mathcal{C}[a,b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\sup} = 0$.

konec 3. přednášky (4.3.2024)

13.2. **Stejnoměrná konvergence řad funkcí.**

Definice. Nechť M je množina, $(Q, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *bodově konverguje* na M, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{n} f_k\}_{n=1}^{\infty}$ bodově konverguje na M. Pojmy *stejnoměrné konvergence* a *lokálně stejnoměrné konvergence* řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definujeme obdobně (pro lokálně stejnoměrnou konvergenci je nezbytné, aby navíc (M, ϱ) byl metrický prostor). Stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ značíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, lokálně stejnoměrnou konvergenci značíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$.

Poznámka. Nechť M je množina, Q je normovaný lineární prostor, $f_n, g_n\colon M \to Q$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konvergují stejnoměrně na M a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak také řady $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha f_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n \pm g_n)$ konvergují stejnoměrně na M.

Poznámky. Nechť M je množina, Q je Banachův prostor a $f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Z Věty 13.5 plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině M právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \ge n \ge n_0\ \forall x \in M\colon \left\|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right\|_Q < \varepsilon.$$

(b) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M, potom $f_n \rightrightarrows o$ na M, kde o označuje identicky nulovou funkci. Toto tvrzení plyne z (a), protože pro každé $x \in M$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(x) = \sum_{j=n}^{n} f_j(x)$.

Věta 13.10 (Weierstrassovo kritérium)**.** *Nechť M je neprázdná množina, Q je Banachův prostor a $f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$. Označme*

$$\sigma_n = \sup_{x\in M} \|f_n(x)\|_Q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} \sigma_j < \varepsilon.$$

Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right\|_Q \leq \sum_{j=n}^{m} \|f_j(x)\|_Q \leq \sum_{j=n_0}^{\infty} \sigma_j < \varepsilon.$$

Z poznámky (a) plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M. □

Příklad. Nechť $\alpha > 1$. Dokažte, že řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

jsou stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sigma_n = \frac{1}{n^\alpha},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty.$$

Podle Weierstrassova kritéria tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$. Obdobně lze dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$.

Věta 13.11 (záměna sumy a derivace)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme že*

(a) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ má f_n vlastní derivaci na (a,b),*
(b) *existuje $x_0 \in (a,b)$ takové, že je číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergentní,*
(c) *$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ na (a,b).*

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na (a,b) a

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' \quad \text{na } (a,b).$$

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ na (a,b). Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ má g_n vlastní derivaci na (a,b), posloupnost $\{g_n(x_0)\}$ je konvergentní a posloupnost $\{g_n'\}$ je stejnoměrně konvergentní na (a,b). Díky Větě 13.6 tedy nalezneme funkci $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ takovou, že $g_n \rightrightarrows g$ a $g_n' \rightrightarrows g'$ na (a,b). Odtud plyne tvrzení věty, neboť $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, a tedy na (a,b) platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = g' = \lim_{n\to\infty} g_n' = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right)' = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

□

Věta 13.12 (záměna sumy a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na (a,b) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Důkaz. Tvrzení bezprostředně plyne z Věty 13.7 použité na $\{\sum_{k=1}^{n} f_k\}$. □

14. Mocninné řady

14.1. Základní vlastnosti.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. *Mocninnou řadou o středu x_0* rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Každá mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konverguje pro $x = x_0$.

Věta 14.1 (o poloměru konvergence mocninné řady)**.** *Nechť*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2}$$

je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek $\varrho \in \mathbb{R}^*$ takový, že

- *pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, je uvedená řada absolutně konvergentní,*
- *pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \varrho$, je uvedená řada divergentní.*

Prvek ϱ splňuje

$$\varrho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3}$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ rozumíme ∞ a výrazem $\frac{1}{\infty}$ rozumíme 0.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ položme $b_n = a_n (x - x_0)^n$. Označme $\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Předpokládejme nejprve, že $\gamma \in (0, \infty)$. Pak

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}|x - x_0| = \gamma |x - x_0|.$$

Odtud vyplývá, že

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} < 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ a

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} > 1$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$. Podle Cauchyova odmocninového kritéria je tudíž řada (2) absolutně konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ a divergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$.

Je-li $\gamma = 0$, pak $\varrho = \infty$ a

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = 0$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Řada (2) je tedy absolutně konvergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $\gamma = \infty$, pak $\varrho = 0$ a

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \infty$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Řada (2) je tedy divergentní podle Cauchyova odmocninového kritéria pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$.

Dokážeme nyní jednoznačnost prvku ϱ. Předpokládejme, že prvek $\varrho' \in \mathbb{R}^*$ má také uvedené vlastnosti, a přitom $\varrho \neq \varrho'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\varrho < \varrho'$. Potom by ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $\varrho < |x - x_0| < \varrho'$ musela řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konvergovat a zároveň divergovat, což není možné. Tím je důkaz dokončen. □

Definice. Prvek ϱ z (3) nazýváme *poloměrem konvergence* řady (2).

Poznámka. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a $\varrho \in \mathbb{R}^*$ je její poloměr konvergence. Potom nastane právě jedna z následujících tří možností:

- buď $\varrho = 0$ a řada konverguje pouze pro $x = x_0$,
- nebo $\varrho = \infty$ a řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- nebo $\varrho \in (0, \infty)$, řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| > \varrho$, a může nebo nemusí konvergovat pro $x = x_0 \pm \varrho$.

Příklady. Spočtěte střed a poloměr konvergence následujících mocninných řad a určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ řady konvergují.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

14.2. **Derivace mocninné řady.**

Věta 14.2 (derivace mocninné řady)**.** *Nechť ϱ je poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Potom poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ je také roven ϱ. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ označme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Potom má funkce f v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, vlastní derivaci a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Důkaz. Zřejmě platí $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \le \limsup \sqrt[n]{n|a_n|}$. Dokážeme opačnou nerovnost, tedy $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \le \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Jestliže $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, pak tato nerovnost platí zřejmě. Předpokládejme, že $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Víme, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $\sqrt[n]{n} < (1+\varepsilon)$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ potom platí

$$\sup_{k \ge n} \sqrt[k]{k|a_k|} \le (1+\varepsilon) \sup_{k \ge n} \sqrt[k]{|a_k|},$$

a tedy $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \le (1+\varepsilon) \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} \le \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Celkem tedy máme $\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Odtud a z definice poloměru konvergence mocninné řady vyplývá, že poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^n$ je roven ϱ. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ je zřejmě konvergentní pro $x = x_0$. Jestliže $x \in \mathbb{R}$ splňuje $0 < |x - x_0| < \varrho$, potom platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \frac{1}{x-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^n,$$

a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ konvergentní. Obdobnou úvahou lze dokázat, že pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| > \varrho$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ divergentní. Poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ je tedy roven ϱ.

Dokážeme nyní druhou část tvrzení. Jestliže $\varrho = 0$, pak je tvrzení triviální, neboť žádné $x \in \mathbb{R}$ s uvedenou vlastností neexistuje. Předpokládejme, že $\varrho > 0$. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $x_0 = 0$. Zvolme $x \in (-\varrho, \varrho)$. K důkazu tvrzení stačí dokázat, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}. \tag{4}$$

Nalezneme $\delta > 0$ splňující $|x| + \delta < \varrho$. Potom pro každé $h \in (-\delta, \delta)$ platí $|x+h| \le |x| + |h| < |x| + \delta < \varrho$, a tedy je výraz $f(x+h)$ dobře definován. Položme

$$\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - h \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad \text{pro } h \in (-\delta, \delta).$$

Chceme tedy dokázat, že $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$. Jest

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left((x+h)^n - x^n - hnx^{n-1}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} h^j.\end{aligned}$$

Tedy

$$|\varphi(h)| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} |x|^{n-j} |h|^j.$$

Pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \ge 2$, platí

$$|h|^j = h^2 |h|^{j-2} \le h^2 \delta^{j-2},$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, platí

$$|\varphi(h)| \le \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{h^2}{\delta^2} \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} |x|^{n-j} \delta^j \le \frac{h^2}{\delta^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |x|^{n-j} \delta^j = \frac{h^2}{\delta^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left(|x| + \delta\right)^n.$$

Protože $|x| + \delta < \varrho$, je řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(|x| + \delta\right)^n$ konvergentní. Označme

$$C = \delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(|x| + \delta\right)^n.$$

Potom $C \in [0, \infty)$ a platí

$$\left| \frac{\varphi(h)}{h} \right| \le C|h|,$$

takže

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0.$$

Odtud plyne (4), a tedy i druhá část tvrzení. □

konec 4. přednášky (11.3.2024)

Věta 14.3 (mocninná řada a Taylorův polynom)**.** *Nechť ϱ je poloměr konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Pro $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - x_0| < \varrho$ označme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$. Potom*

(a) *pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \varrho$, existuje vlastní $f^{(k)}(x)$ a platí*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k},$$

(b) *speciálně platí $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*

(c) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$ platí $T_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$.*

Důkaz. Tvrzení (a) plyne iterováním Věty 14.2 k-krát. Tvrzení (b) je speciálním případem tvrzení (a) pro $x = x_0$. Tvrzení (c) plyne z (a), (b) a definice Taylorova polynomu, neboť

$$T_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

□

Poznámka. Při derivování mocninné řady člen po členu se zachovává poloměr konvergence, nemusí se však zachovat konvergence v některém z bodů $x_0 \pm \varrho$. Označíme-li například $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ pro $x \in (-1, 1)$, pak $f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ a $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$ pro $x \in (-1, 1)$, poloměr konvergence všech tří řad je roven 1, ale řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ je konvergentní pro $x \in [-1, 1]$, řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$ je konvergentní pouze pro $x \in [-1, 1)$ a řada $\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2}$ je konvergentní dokonce pouze pro $x \in (-1, 1)$.

Věta 14.4 (o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* ϱ*. Potom tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu* $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$*.*

Důkaz. Zvolme $a, b \in (x_0-\varrho, x_0+\varrho)$, $a < b$, a označme $r = \max\{|a-x_0|, |b-x_0|\}$. Potom $r \in (0, \varrho)$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergentní. Označme

$$\sigma_n = \sup_{x\in[a,b]} |a_n(x-x_0)^n|.$$

Potom $\sigma_n = |a_n| r^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy je číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konvergentní. Podle Weierstrassova kritéria je tudíž řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[a, b]$. Tvrzení tedy plyne z Věty 13.1. □

14.3. **Abelova věta.**

Věta 14.5 (Abelova)**.** *Nechť* ϱ *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *a* $\varrho \in (0, \infty)$*.*

(a) *Jestliže je řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ *konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(x_0+\varrho)_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

(b) *Jestliže je řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n$ *konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(x_0-\varrho)_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\varrho)^n.$$

Důkaz. Dokážeme tvrzení (a). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_0 = 0$ a $\varrho = 1$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$, platí $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon$. Zvolme $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$. Označme

$$\sigma_j = \sum_{i=n}^{j} a_i \quad \text{pro } j \in \{n, \dots, m\}.$$

Potom pro každé $x \in [0, 1]$ platí

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n}^{m} a_j x^j\right| &= \left|\sigma_n x^n + (\sigma_{n+1}-\sigma_n)x^{n+1} + \dots + (\sigma_m - \sigma_{m-1})x^m\right| \\
&= \left|\sigma_n(x^n - x^{n+1}) + \dots + \sigma_{m-1}(x^{m-1} - x^m) + \sigma_m x^m\right| \\
&\leq |\sigma_n|(x^n - x^{n+1}) + \dots + |\sigma_{m-1}|(x^{m-1} - x^m) + |\sigma_m| x^m \\
&< \varepsilon\left(x^n - x^{n+1} + \dots + x^{m-1} - x^m + x^m\right) = \varepsilon x^n \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stejnoměrně konvergentní na $[0, 1]$. Navíc podle Mooreovy–Osgoodovy věty platí

$$\lim_{x\to 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1_-} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1_-} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Tvrzení (b) lze dokázat obdobně. □

Poznámka. Z Abelovy věty a Leibnizovy věty plyne, že

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{pro } x \in [-1, 1]$$

a

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{pro } x \in (-1,1].$$

Důkaz Věty 6.16. Označme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

Potom jsou obě řady jsou mocninné a mají poloměr konvergence rovný 1. Obě tedy absolutně konvergují pro každé $x \in (-1,1)$. Podle Mertensovy věty tedy pro každé $x \in [0,1)$ platí

$$f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} x^{n+1-k} b_k x^k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} b_k \right) x^{n+1}.$$

Podle Abelovy věty tedy platí

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) &= \lim_{x \to 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \to 1-} f(x)g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} b_k \right) x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} b_k \right). \end{aligned}$$

□

konec 5. přednášky (18.3.2024)

15. Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

15.1. Derivace monotonní funkce.

Věta 15.1 (derivace neklesající funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je neklesající. Pak*

(a) *f je měřitelná,*
(b) *$f'(x)$ existuje vlastní pro skoro všechny body $x \in [a,b]$,*
(c) *f' je měřitelná,*
(d) *$\int_a^b f'(x)\,dx \le f(b) - f(a)$.*

15.2. Funkce s omezenou variací.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Pro každé dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ položme

$$\begin{aligned} p_D &= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+, \\ n_D &= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-, \\ v_D &= n_D + p_D = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|. \end{aligned}$$

Dále definujme

$$\begin{aligned} P(f;a,b) &= \sup\{p_D : D \text{ dělení } [a,b]\}, \\ N(f;a,b) &= \sup\{n_D : D \text{ dělení } [a,b]\}, \\ V(f;a,b) &= \sup\{v_D : D \text{ dělení } [a,b]\}. \end{aligned}$$

Čísla $P(f;a,b), N(f;a,b), V(f,a,b)$ nazveme po řadě *pozitivní, negativní* a *totální variací* funkce f na intervalu $[a,b]$. Je-li $V(f;a,b) < \infty$, řekneme, že f má *omezenou variaci* na $[a,b]$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na $[a,b]$ značíme $\mathrm{BV}([a,b])$.

Poznámka. Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zřejmě pro každé dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ platí

$$\begin{aligned} p_D - n_D &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- \\ &= \sum_{i=1}^n \left([f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-\right) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Dále máme

$$V(f;a,b) \le P(f;a,b) + N(f;a,b)$$

a

$$\max\{P(f;a,b), N(f;a,b)\} \le V(f;a,b).$$

Poznámka. Mezi třídami $\mathrm{BV}([a,b])$ a $C([a,b])$ neplatí inkluse ani v jednom směru. Funkce $\chi_{[0,1]}$ je prvkem $\mathrm{BV}([a,b]) \setminus C([a,b])$, zatímco funkce

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x \in (0,1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je prvkem $C([a,b]) \setminus \mathrm{BV}([a,b])$.

Věta 15.2 (o variaci funkce)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. Potom platí*

(a) $V(f;a,b) = P(f;a,b) + N(f;a,b)$,
(b) $f(b) - f(a) = P(f;a,b) - N(f;a,b)$.

Důkaz. Pozitivní i negativní variace f jsou konečné díky předpokladu. Pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ máme

$$p_D = n_D + f(b) - f(a). \tag{5}$$

Tedy pro každé dělení D platí

$$P(f;a,b) \ge p_D = n_D + f(b) - f(a).$$

Vezmeme-li supremum pravé strany přes všechna dělení D, dostaneme

$$P(f;a,b) \ge N(f;a,b) + f(b) - f(a).$$

Dále máme z (5) pro každé dělení odhad

$$p_D = n_D + f(b) - f(a) \le N(f;a,b) + f(b) - f(a).$$

Přechodem k supremu na levé straně obdržíme

$$P(f;a,b) \le N(f;a,b) + f(b) - f(a).$$

Odtud plyne (b).

Pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ platí

$$v_D = p_D + n_D = p_D + p_D - (f(b) - f(a)).$$

Obdobně jako výše obdržíme

$$V(f;a,b) = 2P(f;a,b) - (f(b) - f(a)) = P(f;a,b) + N(f;a,b).$$

Odtud plyne (a). □

Věta 15.3 (rozklad funkce s omezenou variací)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak $f \in \mathrm{BV}([a,b])$ právě tehdy, když existují neklesající funkce $g,h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ splňující $f = g - h$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Položme

$$g(x) = P(f; a, x), \quad h(x) = N(f; a, x), \quad x \in [a, b].$$

Protože pro $x \in [a, b]$ máme

$$0 \le P(f; a, x) \le V(f; a, x) \le V(f; a, b) < \infty \quad \text{a}$$
$$0 \le N(f; a, x) \le V(f; a, x) \le V(f; a, b) < \infty,$$

jsou g, h reálné funkce na $[a, b]$. Navíc jsou zřejmě neklesající. Dle Věty 15.2 platí

$$f(x) = g(x) - h(x) + f(a) = g(x) - (h(x) - f(a)), \quad x \in [a, b].$$

Tedy f je rozdílem dvou neklesajících funkcí g a $h - f(a)$.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že $f = g - h$, kde g, h jsou neklesající. Zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$. Potom

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\le \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |h(x_i) - h(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) + \sum_{i=1}^n (h(x_i) - h(x_{i-1})) \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a).\end{aligned}$$

Protože výraz na pravé straně nezávisí na D, můžeme na levé straně přejít k supremu přes všechna dělení. Dostaneme $V(f; a, b) < \infty$. □

Důsledek (derivace funkce s omezenou variací)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathrm{BV}([a, b])$. Potom ve skoro všech bodech $[a, b]$ existuje vlastní $f'(x)$ a platí $f \in L^1(a, b)$.*

Důkaz. Podle Věty 15.3 nalezneme neklesající funkce $g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ splňující $f = g - h$. Dle Věty 15.1 nalezneme množiny N_g a N_h nulové míry takové, že $g'(x)$ existuje vlastní pro $x \in [a, b] \setminus N_g$ a $h'(x)$ existuje vlastní pro $x \in [a, b] \setminus N_h$. Navíc platí $g' \in L^1(a, b)$ a $h' \in L^1(a, b)$. Položme $N_f = N_g \cup N_h$. Potom má N_f nulovou míru, $f'(x) = g'(x) - h'(x)$ existuje vlastní pro $x \in [a, b] \setminus N_f$ a navíc platí $f' \in L^1(a, b)$. □

15.3. **Absolutně spojité funkce.**

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *absolutně spojitá* na $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý soubor $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ disjunktních intervalů v $[a, b]$ splňující

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta$$

platí

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na $[a, b]$ značíme $\mathrm{AC}([a, b])$.

Poznámky. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom platí

(i) Množiny $\mathrm{AC}([a, b])$ a $\mathrm{BV}([a, b])$ tvoří algebry.
(ii) Platí

$$\mathrm{Lip}^1([a, b]) \subset \mathrm{AC}([a, b]) \subset \mathrm{BV}([a, b]) \cap C([a, b]),$$

přičemž obě inkluse jsou vlastní. Důkaz první inkluse je snadný. Dokážeme druhou inklusi. Předpokládejme, že $f \in \mathrm{AC}([a, b])$. Potom je zřejmě f stejnoměrně spojitá na $[a, b]$. Dokážeme, že $f \in \mathrm{BV}([a, b])$. Položme $\varepsilon = 1$. Nalezneme odpovídající $\delta > 0$ z definice absolutní spojitosti. Zvolme $\delta' \in (0, \delta)$. Uvažujme ekvidistantní dělení $D' = \{y_j\}_{j=0}^K$ intervalu $[a, a + K\delta']$, kde K je přirozené číslo splňující $\frac{b-a}{\delta'} \le K < 1 + \frac{b-a}{\delta'}$ a

$$y_j = a + j\delta', \quad j \in \{0, \dots, K\}.$$

Pak

$$a + (K-1)\delta' < b \leq a + K\delta'.$$

Je-li $a + K\delta > b$, zaměňme bod $y_K = a + K\delta'$ bodem b. Získáme tak dělení intervalu $[a,b]$, jehož norma je menší nebo rovna než δ', a tedy menší než δ.

Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je dané dělení $[a,b]$. Vezmeme dělení D'' sestávající z bodů D' a D. Pak $D'' = \{z_l\}_{l=0}^m$ je dělení, které lze rozdělit na K souborů intervalů, z nichž každý je dělením intervalu délky δ'. Dostáváme tedy

$$v_D = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{l=1}^m |f(z_l) - f(z_{l-1})| \leq K\varepsilon = K.$$

Odtud plyne, že $f \in \mathrm{BV}([a,b])$.

Protipříkladem na obrácenou první inklusi je funkce $\sqrt{x}$ na $[0,1]$. Protipříkladem na obrácenou druhou inklusi je Cantorova funkce.

Věta 15.4 (absolutní spojitost primitivní funkce k integrovatelné funkci)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in L^1(a,b)$. Položme*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b].$$

Potom

(a) $F \in \mathrm{AC}([a,b])$,

(b) *je-li $c \in [a,b)$ a f je v c spojitá zprava, pak existuje vlastní $F'_+(c)$ a platí $F'_+(c) = f(c)$ (obdobné tvrzení platí pro derivaci zleva).*

Důkaz. (a) Zvolme $\varepsilon > 0$. Tvrdíme, že

$$\exists \delta > 0\ \forall E \subset [a,b] \text{ měřitelnou}, \lambda(E) < \delta : \int_E |f(t)|\,dt < \varepsilon. \tag{6}$$

Předpokládejme, že (6) neplatí. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme měřitelnou množinu $E_n \subset [a,b]$ splňující $\lambda(E_n) < 2^{-n}$ a $\int_{E_n} |f(t)|\,dt \geq \varepsilon$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = \bigcup_{k=n}^\infty E_k$ a $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$. Potom

$$\lambda(F) = \lim \lambda(F_n) \leq \limsup \sum_{k=n}^\infty \lambda(E_k) \leq \limsup 2^{-n+1} = 0.$$

Díky Lebesgueově větě platí

$$0 = \int_F |f| = \int_a^b \chi_F |f| = \int_a^b \lim \chi_{F_n} |f| = \lim \int_a^b \chi_{F_n}(t)|f| = \lim \int_{F_n} |f| \geq \varepsilon,$$

což je spor. Odtud plyne (6).

Nechť $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ je soubor po dvou disjunktních intervalů v $[a,b]$ splňující $\lambda(\bigcup_{i=1}^n (x_i, y_i)) < \delta$. Potom

$$\sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_i}^{y_i} f(t)\,dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{y_i} |f(t)|\ dt = \int_{\bigcup_{i=1}^n (x_i, y_i)} |f(t)|\ dt < \varepsilon.$$

Tedy F je absolutně spojitá na $[a,b]$.

(b) Předpokládejme, že f je bodě $c \in [a,b)$ spojitá zprava. Zvolme $\varepsilon \in (0,\infty)$. Nalezneme $\delta \in (0,\infty)$, takové, že pro $y \in (c, c+\delta)$ platí $|f(y) - f(c)| < \varepsilon$. Potom pro $h \in (0,\delta)$ platí

$$\left| \frac{1}{h}\left(F(c+h) - F(c)\right) - f(c) \right| = \left| \frac{1}{h}\left(\int_a^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt \right) - f(c) \right|$$

$$= \frac{1}{h} \left| \int_c^{c+h} f(t)\,dt - \int_c^{c+h} f(c)\,dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)|\,dt \leq \varepsilon \frac{1}{h} \int_c^{c+h} dt = \varepsilon.$$

Tedy $F'_+(c) = f(c)$. Obdobným způsobem lze dokázat tvrzení pro derivaci zleva. □

konec 6. přednášky (25.3.2024)

Věta 15.5 (charakterisace absolutní spojitosti)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $F \in L^1(a,b)$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *F je absolutně spojitá,*
(ii) *F' existuje vlastní skoro všude, F' je integrovatelná a $F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt + F(a)$ pro $x \in [a,b]$,*
(iii) *existuje integrovatelná f na $[a,b]$ taková, že $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a)$ pro $x \in [a,b]$.*

Věta 15.6 (per partes pro absolutně spojité funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f, g \in \mathrm{AC}(a,b)$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Důkaz. Platí $fg \in \mathrm{AC}([a,b])$, neboť $\mathrm{AC}([a,b])$ je algebra. Tedy existuje vlastní $(fg)' = f'g + fg'$ skoro všude a $(fg)' \in L^1(a,b)$. Dále platí

$$f(b)g(b) = \int_a^b (fg)'(x)\,dx + f(a)g(a). \tag{7}$$

Vzhledem k tomu, že f je omezená spojitá a g' integrovatelná, existuje $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$. Obdobně pro $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$. Tedy z (7) dostáváme

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

□

16. Fourierovy řady

16.1. Základní pojmy.

Definice. (a) *Trigonometrickou řadou* rozumíme řadu funkcí

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

(b) *Trigonometrickým polynomem* rozumíme funkci tvaru

$$t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = -n, \dots, n$. *Stupněm* trigonometrického polynomu (9) rozumíme buď největší $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ takové, že $|c_k| + |c_{-k}| \neq 0$ (pokud takové k existuje), nebo hodnotu -1 (pokud $c_k = 0$ pro každé $k = -n, \dots, n$).

Poznámka. Řada (8) konverguje, jestliže konverguje posloupnost

$$\left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Věta 16.1 (Fourierovy koeficienty)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a*

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \rightrightarrows f \quad \text{na } \mathbb{R}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt.$$

Důkaz. Zvolme $m \in \mathbb{Z}$. Potom

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t} \rightrightarrows f(t)e^{-imt} \text{ na } \mathbb{R},$$

a tedy

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-imt}\,dt = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t}\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t}\,dt$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t}\,dt = 2\pi c_m,$$

neboť

$$\int_0^{2\pi} e^{ijt}\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos jt + i\sin jt)\,dt = \begin{cases} 0, & j \neq 0, \\ 2\pi, & j = 0. \end{cases}$$

Odtud plyne tvrzení. □

Značení. Množinu všech 2π-periodických funkcí s hodnotami v $\mathbb{C}$, které jsou integrovatelné na intervalu $[0, 2\pi]$, budeme značit $\mathcal{P}_{2\pi}$.

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Položme

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Čísla $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, se nazývají *Fourierovy koeficienty* f. Řada

$$s^f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

se nazývá *Fourierova řada* f. Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou značíme $f \sim s^f$. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *n-tým částečným Fourierovým součtem* funkce f rozumíme funkci

$$s_n^f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jestliže $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ a $\lim_{n\to\infty} s_n^f(t) = s$, pak říkáme, že *součet Fourierovy řady* f v t je roven s.

Poznámka. Místo trigonometrického systému funkcí $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ často ekvivalentně pracujeme se systémem $\{1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots, \cos(kt), \sin(kt), \dots\}$. Připomeňme vztahy

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ položme

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potom

$$\hat{f}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

neboli

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k), \quad b_k = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Navíc platí

$$a_{-k} = a_k, \quad b_{-k} = -b_k \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Tedy pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}\hat{f}(k)e^{ikt} + \hat{f}(-k)e^{-ikt} &= \frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikt} + \frac{a_{-k} - ib_{-k}}{2}e^{-ikt} \\ &= \frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikt} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ikt} \\ &= \frac{a_k}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt}) - i\frac{b_k}{2}(e^{ikt} - e^{-ikt}) \\ &= a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt).\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{R}$$

a

$$s_n^f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{R} \text{ a } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Je-li f reálná funkce, pak jsou zřejmě a_k, b_k reálná čísla pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Odtud plyne, že je-li f reálná funkce, pak jsou též částečné součty její Fourierovy řady reálné.

Poznámka. Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ sudá, potom $b_k = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a platí

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Je-li f lichá, potom $a_k = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a platí

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt), \quad t \in \mathbb{R},$$

nazýváme *cosinovou řadou* a trigonometrickou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R},$$

nazýváme *sinovou řadou*.

Poznámka. Symbol $f \sim s^f$ označuje pouze fakt, že řada stojící vpravo je Fourierovou řadou funkce stojící vlevo. Nevypovídá nic o případné konvergenci řady s^f (stejnoměrné ani bodové). Nelze jej zaměňovat za symbol $f = s^f$, který by znamenal, že řada vpravo bodově konverguje a jejím bodovým součtem je funkce f.

Příklad. Nechť $f(t) = t^2$ pro $t \in [-\pi, \pi)$ a $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Nalezněte Fourierovu řadu funkce f.

Řešení. Funkce f je sudá, takže $b_k = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{2\pi^2}{3}$$

a

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(kt)\,dt = (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tedy

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kdybychom věděli, že řada s^f konverguje k funkci f (alespoň bodově), získali bychom po dosazení postupně $t = 0$ a $t = \pi$ vzorce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

konec 7. přednášky (8.4.2024)

Poznámka. Fourierovy řady lze definovat pro funkce s libovolnou periodou $\ell > 0$. Řada má pak tvar

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{\frac{2\pi i k t}{\ell}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\frac{2\pi t}{\ell}) + b_k \sin(\frac{2\pi t}{\ell}) \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

a vzorce pro koeficienty mají odpovídající tvar.

Lemma. *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $a \in \mathbb{R}$. Pak $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt$.*

Důkaz. Nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \leq 2k\pi < a + 2\pi$. Potom podle věty o substituci a díky linearitě integrálu platí

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt &= \int_a^{2k\pi} f(t)\,dt + \int_{2k\pi}^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t)\,dt + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

Definice. Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom *konvoluci* funkcí f a g definujeme předpisem

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-s) g(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom $f * g$ je dobře definovaná skoro všude konečná měřitelná funkce.

Poznámka. Konvoluce je komutativní na $\mathcal{P}_{2\pi}$. Zvolme $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $t \in \mathbb{R}$. Potom podle věty o substituci a lemmatu platí

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-s) g(s)\,ds = \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^{t} f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau = (g * f)(t).\end{aligned}$$

16.2. **Cesàrovská sčítatelnost Fourierových řad.**

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jestliže existuje $\sigma \in \mathbb{C}$ splňující

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

pak říkáme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je *sčítatelná Cesàroou metodou* (nebo *cesàrovsky sčítatelná*) k σ. Píšeme $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

Poznámka. Jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, $s \in \mathbb{C}$, potom $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Opačná implikace neplatí. Například pro $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergentní, ale $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Značení. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Označme

$$\sigma_n^f(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k^f(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Položme

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \quad \text{a} \quad K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Potom funkci D_n nazýváme *Dirichletovým jádrem* a funkci K_n *Fejérovým jádrem.*

Věta 16.2 (vlastnosti Dirichletova jádra)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom*
(a) *pro každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ platí*

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})},$$

(b) *D_n je spojitá, sudá, 2π-periodická a $D_n(0) = 2n+1$,*
(c) *$\int_0^{2\pi} D_n(t)\,dt = 2\pi$,*
(d) *pro každou $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ platí $s_n^f = f * D_n$ na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. (a) Zvolme $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Potom

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} (e^{it})^k = e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

Tvrzení (b) a (c) jsou zřejmá. Dále platí

$$\begin{aligned} s_n^f(t) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks}\,ds \right) e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(s) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)} \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) D_n(t-s)\,ds \\ &= (D_n * f)(t) = (f * D_n)(t). \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení (d). □

Věta 16.3 (vlastnosti Fejérova jádra)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*
(a) *Pro každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ platí*

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2.$$

(b) *Funkce K_n je spojitá, nezáporná, sudá, 2π-periodická a $K_n(0) = n+1$.*
(c) *Platí $\int_0^{2\pi} K_n(t)\,dt = 2\pi$.*
(d) *Pro každou $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ platí $\sigma_n^f = f * K_n$.*
(e) *Platí $K_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0, 2\pi)$.*

Důkaz. (a) Zvolme $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ a položme $s = \frac{t}{2}$. Potom

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} e^{(2k+1)is} &= e^{is} \sum_{k=0}^{n} (e^{2is})^k = e^{is} \frac{1 - e^{2i(n+1)s}}{1 - e^{2is}} \\ &= \frac{1 - e^{2i(n+1)s}}{e^{-is} - e^{is}} = \frac{1 - \cos(2(n+1)s) - i\sin(2(n+1)s)}{-2i\sin(s)}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \sin((2k+1)s) &= \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n} e^{(2k+1)is} = \operatorname{Im} \frac{1 - \cos(2(n+1)s) - i\sin(2(n+1)s)}{-2i\sin(s)} \\ &= \frac{1 - \cos(2(n+1)s)}{2\sin(s)} = \frac{\sin((n+1)s)^2}{\sin(s)}. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)}{(n+1)\sin(\frac{t}{2})} = \frac{1}{n+1}\frac{(\sin((n+1)\frac{t}{2}))^2}{(\sin(\frac{t}{2}))^2},$$

takže platí (a). Tvrzení (b) a (c) jsou zřejmá. Tvrzení (d) plyne z toho, že pro každou funkci $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(f * K_n)(t) = \frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi} f(t-s)\sum_{k=0}^{n} D_k(s)\,ds = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k^f(t) = \sigma_n^f(t).$$

Pro důkaz tvrzení (e) zvolme $\delta \in (0,\pi)$. Potom díky (a) pro každé $t \in [\delta, 2\pi-\delta]$ platí

$$0 \le K_n(t) \le \frac{1}{n+1}\frac{1}{(\sin(\frac{\delta}{2}))^2},$$

a tedy $K_n \rightrightarrows 0$ na $[\delta, 2\pi-\delta]$. Protože δ bylo zvoleno libovolně, tvrzení (e) vyplývá z Věty 13.4. □

Poznámka. Fejérovo jádro má některé „lepší“ vlastnosti než Dirichletovo jádro. Například je nezáporné a navíc splňuje $K_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0, 2\pi)$. To neplatí pro Dirichletovo jádro, neboť například $D_n(\pi) = \frac{(-1)^n}{2}$.

Značení. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{R}$. Budeme značit $f(t+) = \lim_{s\to t_+} f(s)$ a $f(t-) = \lim_{s\to t_-} f(s)$, pokud tyto limity existují.

Věta 16.4 (Fejérova)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $t \in \mathbb{R}$.*

(a) *Jestliže existují vlastní $f(t+)$ a $f(t-)$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}.$$

(b) *Jestliže $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a f spojitá na (a,b), potom $\sigma_n^f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b).*

konec 8. přednášky (15.4.2024)

Důkaz. (a) Zvolme $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a označme $s = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$. Platí

$$\begin{aligned}\sigma_n^f(t) - s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Díky tomu, že K_n je sudá, platí podle věty o substituci

$$\int_{-\pi}^{0}(f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau = \int_0^{\pi}(f(t+\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau,$$

a tedy

$$\sigma_n^f(t) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s)K_n(\tau)\,d\tau.$$

Podle předpokladu platí

$$\lim_{\tau\to 0_+}(f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s) = 0.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$|f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s| < \varepsilon \quad \text{pro každé } \tau \in (0,\delta).$$

K tomuto δ nalezneme díky Větě 16.3(e) $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $K_n(\tau) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$ a každé $\tau \in [\delta, \pi]$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$\begin{aligned}
\left|\sigma_n^f(t) - s\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s|\, K_n(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta |f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s|\, K_n(\tau)\, d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi |f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s|\, K_n(\tau)\, d\tau \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^\delta K_n(\tau)\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_\delta^\pi |f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s|\, d\tau \\
&< \varepsilon\left(1 + \frac{\|f\|_1}{\pi} + |s|\right).
\end{aligned}$$

Tedy $\sigma_n^f(t) \to s$ pro $n \to \infty$.

(b) Zvolme $A, B \in \mathbb{R}$ splňující $a < A < B < b$. Nalezneme $\omega \in (0, \pi)$ takové, že $[A-\omega, B+\omega] \subset (a, b)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti f na $[A-\omega, B+\omega]$ nalezneme $\delta \in (0, \omega)$ takové, že

$$\forall t \in [A, B]\ \forall \tau \in (-\delta, \delta) : |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a každé $\tau \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ platí $K_n(\tau) < \varepsilon$. Zvolme $t \in [A, B]$ a $n \geq n_0$. Potom

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_n^f(t) - f(t)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi (f(t-\tau) - f(t))\, K_n(\tau)\, d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(t-\tau) - f(t)|\, K_n(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(t-\tau) - f(t)|\, K_n(\tau)\, d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi |f(t-\tau) - f(t)|\, K_n(\tau)\, d\tau \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(t-\tau) - f(t)|\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_\delta^\pi |f(t-\tau) - f(t)|\, d\tau \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|f(t-\tau)| + |f(t)|)\, d\tau + \varepsilon \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\left(\|f\|_1 + 2\pi\|f\|_{C([0,2\pi])}\right) + \varepsilon \\
&\leq \varepsilon\left(\frac{\|f\|_1}{2\pi} + \|f\|_{C([0,2\pi])} + 1\right).
\end{aligned}$$

Tedy $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[A, B]$. Protože A, B byla zvolena libovolně, plyne z Věty 13.4, že $\sigma_n^f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a, b). □

Poznámka. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$ a existují vlastní limity $f(t+)$ a $f(t-)$. Potom jediným možným kandidátem na $s^f(t)$ je $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$ (tedy $f(t)$, je-li f spojitá v t). To plyne z Fejérovy věty a z toho, že cesàrovská metoda zachovává součty konvergentních řad.

Věta 16.5 (trigonometrická verse Weierstrassovy věty)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá 2π-periodická funkce. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů, která stejnoměrně konverguje k f na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je σ_n^f trigonometrický polynom. Zvolme $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a < 0$ a $b > 2\pi$. Ze spojitosti f na (a, b) a Fejérovy věty plyne, že $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[0, 2\pi]$, a tedy díky periodicitě i na $\mathbb{R}$. Odtud plyne tvrzení. □

Poznámka. Je-li f reálná, jsou i funkce σ_n^f reálné.

Poznámka. Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom

$$\|f * g\|_1 \leq \tfrac{1}{2\pi}\|f\|_1\|g\|_1 \quad \text{a} \quad \|f * g\|_\infty \leq \tfrac{1}{2\pi}\|f\|_1\|g\|_\infty.$$

Věta 16.6 (konvergence v L^1-normě)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom $\lim_{n\to\infty} \left\|f - \sigma_n^f\right\|_1 = 0$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme spojitou funkci $g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ takovou, že $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Protože $\sigma_n^g \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$, platí $\|g - \sigma_n^g\|_1 \to 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\|g - \sigma_n^g\|_1 < \varepsilon$. Potom pro každé $n \geq n_0$ máme

$$\begin{aligned}\left\|f - \sigma_n^f\right\|_1 &\leq \|f - g\|_1 + \|g - \sigma_n^g\|_1 + \left\|\sigma_n^g - \sigma_n^f\right\|_1 \leq \varepsilon + \varepsilon + \|(g - f) * K_n\|_1 \\ &\leq 2\varepsilon + \tfrac{1}{2\pi}\|g - f\|_1 \|K_n\|_1 \leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení. □

Věta 16.7 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom*

$$\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme spojitou funkci $g\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ takovou, že $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Dále nalezneme díky Větě 16.5 trigonometrický polynom T takový, že $\|g - T\|_\infty < \varepsilon$. Potom

$$\|f - T\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - T\|_1 \leq \|f - g\|_1 + 2\pi\|g - T\|_\infty < (1 + 2\pi)\varepsilon.$$

Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{Z}, |k| \geq k_0 : \hat{T}(k) = 0.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{Z}$ splňující $|k| \geq k_0$ platí

$$\left|\hat{f}(k)\right| = \left|\hat{f}(k) - \hat{T}(k)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t) - T(t))\, e^{-ikt}\, dt\right| \leq \tfrac{1}{2\pi}\|f - T\|_1 \left\|e^{-ikt}\right\|_\infty < \tfrac{1+2\pi}{2\pi}\varepsilon,$$

a tedy $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$. □

Věta 16.8 (o lokalisaci)**.** *Nechť $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $f(\tau) = g(\tau)$ pro $\tau \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \left(s_n^f(t) - s_n^g(t)\right) = 0. \tag{10}$$

Důkaz. Položme

$$h(\tau) = \frac{f(t - \tau) - g(t - \tau)}{\sin\frac{\tau}{2}} \quad \text{pro } \tau \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Potom $h(\tau) = 0$ pro každé $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a tedy $h \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned}s_n^f(t) - s_n^g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t - \tau) - g(t - \tau))\, D_n(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\tau)\sin((n + \tfrac{1}{2})\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \left(h(\tau)e^{i\frac{\tau}{2}}e^{in\tau} - h(\tau)e^{-i\frac{\tau}{2}}e^{-in\tau}\right)\, d\tau.\end{aligned}$$

Funkce $\tau \mapsto h(\tau)e^{i\frac{\tau}{2}}$ a $\tau \mapsto h(\tau)e^{-i\frac{\tau}{2}}$ jsou lebesgueovsky integrovatelné na $[0, 2\pi]$, a tedy patří do $\mathcal{P}_{2\pi}$. Podle Věty 16.7 tudíž platí (10). □

Věta 16.9 (Fourierovy koeficienty určují funkci)**.** *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Jestliže $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, potom $f = g$ skoro všude.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Věty 16.6 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f - \sigma_n^f\|_1 < \varepsilon$ a $\|g - \sigma_n^g\|_1 < \varepsilon$. Protože $\sigma_n^f = \sigma_n^g$, platí

$$\|f - g\|_1 = \|f - \sigma_n^f + \sigma_n^g - g\|_1 \leq \|f - \sigma_n^f\|_1 + \|g - \sigma_n^g\|_1 < 2\varepsilon.$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\|f - g\|_1 = 0$, a tedy $f = g$ skoro všude. □

konec 9. přednášky (22.4.2024)