MATEMATICKÁ ANALÝZA 4 - LETNÍ SEMESTR 2023–2024
POČETNÍ PŘÍKLADY

LUBOŠ PICK

Obsah

1. Stejnoměrná konvergence posloupnosti a řad funkcí 1
1.1. Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí 1
1.2. Stejnoměrná konvergence řad funkcí 2
2. Mocninné řady 4
3. Funkce s omezenou variací a absolutně spojité funkce 5
4. Fourierovy řady 6
5. Metrické prostory III 8

1. Stejnoměrná konvergence posloupnosti a řad funkcí

1.1. Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí.

Příklad 1.1. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in [0,\infty).$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0,\infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.2. Nechť posloupnost funkcí f_n je zadána předpisem

$$f_n(x) = \sqrt{x}\ n^{-\sqrt{x}}\ \log n, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in [0,\infty).$$

Vyšetřete,zda:
(i) f_n konverguje bodově na intervalu $[0,\infty)$ (pokud ano, určete limitní funkci f),
(ii) f_n konverguje stejnoměrně na intervalu $[0,\infty)$,
(iii) f_n konverguje stejnoměrně na intervalu $(0,\infty)$,
(iv) f_n konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(0,\infty)$.

Výsledek: $f_n \to 0$ na $[0,\infty)$ a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,\infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.3. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in [0,\infty).$$

Výsledek: $f_n \rightrightarrows f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0,3] \\ x, & x \in [3,\infty) \end{cases}$ na $[0,\infty)$

Příklad 1.4. Nechť posloupnost funkcí f_n je dána předpisem

$$f_n(x) = (x+1)^3 \operatorname{arccotg}\left(-nx^3\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

(i) Vyšetřete bodovou konvergenci posloupnosti f_n a najděte její bodovou limitu;
(ii) rozhodněte, zda posloupnost f_n konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$;
(iii) rozhodněte, zda posloupnost f_n konverguje lokálně stejnoměrně na $(-\infty,0)$.
Bonifikační otázka: rozhodněte, zda posloupnost f_n konverguje lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$.

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(-\infty,0)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.5. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \sqrt{n^2+1}\left(e^{\frac{1}{nx}} - 1\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (0,\infty).$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \frac{1}{x}$ na $(0,\infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.6. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = n^2\left(1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \frac{x^2}{2}$ na $\mathbb{R}$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.7. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{x}\left(2^{\frac{x^2}{\sqrt{n}}} - 1\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (0,\infty).$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} (\log 2)x$ na $(0,\infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.8. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \log\left(1 + \frac{1}{nx^2}\right)\sqrt{n^2+2}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (-\infty,0).$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \frac{1}{x^2}$ na $(0,\infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.9. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 1.10. Nechť $p, q > 0$. Určete bodovou limitu posloupnosti

$$f_n(x) = \frac{x^{pn}}{1+n+x^{qn}}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (0,\infty).$$

v závislosti na parametrech p a q. Rozhodněte, zda f_n konverguje na $(0,\infty)$ stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně.

Příklad 1.11. Rozhodněte, zda posloupnost

$$f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$$

konverguje bodově či stejnoměrně na intervalu $[0,1]$, případně zda konverguje lokálně stejnoměrně na některé podmnožině tohoto intervalu.

1.2. **Stejnoměrná konvergence řad funkcí.**

Příklad 1.12. Nalezněte definiční obor funkce f, definované předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)x^2}}{n^2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $f'(0)$ a pokud ano, spočtěte ji.

Příklad 1.13. Nechť f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(x^n).$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkcí f a f' v jejich definičním oboru.

Příklad 1.14. Vyšetřete, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1+\frac{x}{n})}{\sqrt{n}}$$

konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně na intervalu $[-1,1]$. Označme součet řady v bodě x jako $f(x)$. Spočtěte $f'(0)$.

Příklad 1.15. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arcsin((-x)^n)}{1+\log n}.$$

Rozhodněte, pro která $x \in [-1,1]$ řada bodově konverguje. Je tato konvergence stejnoměrná nebo lokálně stejnoměrná?

Výsledek: $\sum f_n \rightrightarrows$ na $(-1,1]$ a diverguje pro $x=-1$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.16. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2\cos(x))^{2n}}{\sqrt{\log n}}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru.

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $[(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]] + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ke spojité funkci, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.17. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \arccos(x^n)}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Rozhodněte, pro která $x \in [-1,1]$ řada bodově konverguje. Je tato konvergence stejnoměrná nebo lokálně stejnoměrná?

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(-1,1]$ a diverguje v bodě -1.

Příklad 1.18. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2x}{x^2+n^2}\right), \qquad x \in [0,\infty).$$

Rozhodněte, zda řada konverguje na intervalu $[0,\infty)$ bodově nebo lokálně stejnoměrně.

BONIFIKAČNÍ ÚLOHA: Rozhodněte, zda řada konverguje na intervalu $[0,\infty)$ stejnoměrně.

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $[0,\infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.19. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{sign}(\operatorname{tg} x))^n \sqrt{n} 3^n (\operatorname{tg}(x))^{2n}}{n+1}.$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru.

Výsledek: $\sum f_n$ konverguje absolutně na $(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi)$ a neabsolutně pro $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jinde diverguje. Konvergence je lokálně stejnoměrná a není stejnoměrná, limitní funkce je na svém definičním oboru spojitá

Příklad 1.20. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n)}{\sqrt{n+1}}.$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru.

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(-1,\infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 1.21. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}}, \qquad x \in [0,\infty).$$

Rozhodněte, na kterých podintervalech intervalu $x \in [0,\infty)$ řada konverguje bodově, stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na intervalu $[0,\infty)$.

Výsledek: $\sum f_n \rightrightarrows$ na $[0,\infty)$ ke spojité funkci

Příklad 1.22. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n(\log n)^2}\right).$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru.

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$, konvergence není stejnoměrná

2. Mocninné řady

Příklad 2.1. Následující funkce vyjádřete jako součet mocninné řady o středu 0 na maximálním otevřeném intervalu.

$$e^{-x^2}, \quad \cos^2 x, \quad ,\sin^3 x, \quad \frac{x^{10}}{1-x}, \quad \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}, \quad \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \frac{x}{1+x-2x^2}, \quad \frac{1}{x^2+x+1}, \quad \log(1+x+x^2+x^3).$$

Příklad 2.2. Na intervalu konvergence sečtěte mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1(-1)^k k^2 x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k, \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}.$$

Příklad 2.3. Pomocí vhodně zvolené mocninné řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}.$$

Příklad 2.4. Užitím Abelovy věty sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}.$$

Příklad 2.5. Pomocí vhodně zvolené mocninné řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{(n+1)2^n}.$$

Příklad 2.6. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(n+3)x^{2n}$$

na jejím definičním oboru. Rozhodněte, zda na svém definičním oboru řada konverguje absolutně.

Příklad 2.7. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-1)}{3^n n!} x^n$$

na jejím definičním oboru.

Příklad 2.8. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{(2n-1)!}$$

na jejím definičním oboru.

Příklad 2.9. Nalezněte definiční obor funkce f, zadané předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\right)^n x^n.$$

Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje absolutně.

Příklad 2.10. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n(n-1)x^{n-1}}{(2n)!}$$

na jejím definičním oboru.

Příklad 2.11. Pomocí vhodně zvolené mocninné řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n!2^n}.$$

Příklad 2.12. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}.$$

Příklad 2.13. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}, \quad a>0; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n \quad \text{(těžké)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n.$$

Výsledky.

- Příklad 2.12: (i) $R=\frac{1}{3}$, AK pro $-\frac{4}{3} \le x < -\frac{2}{3}$, K pro $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$;
  (ii) $R=4$, AK i K pro $-4<x<4$;
  (iii) $R=\frac{1}{e}$, AK i K pro $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$;
  (iv) $R=\frac{1}{e}$, AK pro $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$, K pro $-\frac{1}{e}\le x<\frac{1}{e}$.
- Příklad 2.13: (i) $R=1$, pro $-1<x<1$ AK pro všechna $a>0$, pro $x=\pm 1$ AK i K pro $a\in(1,\infty)$;
  (ii) $R=1$, AK pro $-1<x<1$ K pro $-1\le x<1$;
  (iii) $R=1$, AK i K pro $-1<x<1$;
  (iv) $R=1$, AK pro $-1<x<1$ K pro $-1<x\le 1$;
  (v) $R=\frac{1}{e}$, AK i K pro $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$.

3. Funkce s omezenou variací a absolutně spojité funkce

Příklad 3.1. Dokažte, že funkce

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos(\frac{\pi}{x^2}) & \text{pro } x\in(0,1], \\ 0 & \text{pro } x=0, \end{cases}$$

je diferencovatelná, ale nemá omezenou variaci na $[0,1]$.

Příklad 3.2. Dokažte, že má-li funkce na intervalu $[a,b]$ omezenou derivaci, pak tam má omezenou variaci.

Příklad 3.3. Dokažte, že funkce

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos(\frac{\pi}{x}) & \text{pro } x\in(0,1], \\ 0 & \text{pro } x=0, \end{cases}$$

má omezenou variaci na $[0,1]$.

Příklad 3.4. Nechť $\alpha\in\mathbb{R}$ a $\beta>0$. Dokažte, že funkce

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha\cos(\frac{\pi}{x^\beta}) & \text{pro } x\in(0,1], \\ 0 & \text{pro } x=0, \end{cases}$$

má omezenou variaci na $[0,1]$ právě tehdy, když $\alpha>\beta$.

Příklad 3.5. Dokažte, že každá funkce s omezenou variací na intervalu $[a, b]$ je na tomto intervalu omezená.

Příklad 3.6. Dokažte, že prostor funkcí s omezenou variací na intervalu $[a, b]$ tvoří algebru vzhledem k násobení.

Příklad 3.7. Rozhodněte, zda prostor funkcí s omezenou variací na intervalu $[a, b]$ tvoří algebru vzhledem ke skládání.

Příklad 3.8. Dokažte, že je-li f lipschitzovská a g má omezenou variací na intervalu $[a, b]$, pak $f \circ g$ má omezenou variací na $[a, b]$.

Příklad 3.9. Dokažte, že je-li f spojitá a $|f|$ má omezenou variací na intervalu $[a, b]$, pak i f má omezenou variací na $[a, b]$. Dokažte, že předpoklad spojitosti nelze odstranit.

Příklad 3.10. Rozhodněte, zda prostor funkcí s omezenou variací na intervalu $[a, b]$ tvoří svaz.

Příklad 3.11. (i) Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(\frac{1}{x})} & \text{pro } x \in (0, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

má omezenou variaci na $[0, \frac{1}{2}]$, ale není α-Hölderovská pro žádné $\alpha > 0$.

(ii) Nechť

$$x_n = \sum_{k-n}^{\infty} \frac{1}{k \log^2 k}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(0) = f(x_n) = 0, \quad f\left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

a f je lineární na intervalech $[x_{n+1}, \frac{x_n+x_{n+1}}{2}]$ a $[\frac{x_n+x_{n+1}}{2}, x_n]$. Dokažte, že f je α-Hölderovská pro každé $\alpha \in (0, 1)$, ale nemá na intervalu $[0, x_2]$ omezenou variaci.

Příklad 3.12. Nechť R je Riemannova funkce. Rozhodněte, pro která $\alpha > 0$ má funkce R^α omezenou variaci na $[0, 1]$.

Příklad 3.13. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(\frac{1}{x^\beta}) & \text{pro } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že f je absolutně spojitá na $[0, 1]$ pokud $0 < \beta < \alpha$ a že f není absolutně spojitá na $[0, 1]$ pokud $0 < \alpha \leq \beta$.

Příklad 3.14. Položme

$$f(x) = \begin{cases} x^2 |\sin(\frac{1}{x})| & \text{pro } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a $g(x) = \sqrt{x}$. Dokažte, že

- funkce f je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- funkce g je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- funkce $f \circ g$ je absolutně spojitá na $[0, 1]$,
- funkce $g \circ f$ není absolutně spojitá na $[0, 1]$.

Příklad 3.15. Nechť funkce f a g jsou absolutně spojité a g je monotónní na intervalu $[a, b]$. Dokažte, že potom je funkce $f \circ g$ absolutně spojitá na $[a, b]$.

4. Fourierovy řady

Příklad 4.1. Rozviňte funkci

$$f(x) := \arcsin \cos x, \quad x \in (-\pi, \pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Příklad 4.2. Rozviňte funkci

$$f(x) := \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|, \quad x \in \mathbb{R},$$

do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Příklad 4.3. Rozviňte funkci

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0] \\ x^2, & x \in [0, \pi) \end{cases},$$

do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet.

Příklad 4.4. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x, & x \in (-\pi, 0], \\ \beta x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Příklad 4.5. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := 1 - \sin(ax), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet.

Příklad 4.6. Rozviňte funkci

$$f(x) := \sin(3x) + 4x, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 2n}{n}.$$

Příklad 4.7. Nechť $a \in \mathbb{Z}$. Rozviňte funkci

$$f(x) := \cos(ax), \quad x \in (0, \pi),$$

do *sinové* Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{4-(2k-1)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^2}{(4-(2k-1)^2)^2},$$

Příklad 4.8. Rozviňte funkci

$$f(x) := \sin(x), \quad x \in (0, \pi),$$

do *cosinové* Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Příklad 4.9. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \begin{cases} x + \sin^3 x, & x \in (-\pi, 0], \\ \pi - x + \sin^3 x, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.10. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \begin{cases} \sin x \cos^2 x, & x \in (-\pi, 0], \\ x^2 + \sin x + \cos^2 x, & x \in (0, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.11. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) = \sin(\frac{x}{2})$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.12. Nechť funkce f je definována na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin(2x)) + \cos^3 x + \sin^3 x.$$

Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet její Fejérovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.13. Nechť funkce f je definována na intervalu $[-\pi, \pi)$ předpisem

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ x + \frac{\pi}{2}, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0), \\ -x + \frac{\pi}{2}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi), \end{cases}$$

a je dodefinována 2π-periodicky na celém $\mathbb{R}$. Spočtěte Fourierovu řadu funkce f a určete součet této řady pro každé $x \in \mathbb{R}$.

5. Metrické prostory III

Příklad 5.1. Uvažujme prostor spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ s následující metrikou

$$\varrho_{\text{int}}(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ukažte, že tento metrický prostor je první kategorie a není úplný a že jeho jednotková koule je řídká.

Příklad 5.2. Nalezněte metrický prostor (P, ϱ) a posloupnost neprázdných uzavřených množin $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $F_{n+1} \subset F_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

Příklad 5.3. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ukažte, že množina

$$\{f \in \mathcal{C}([a, b]) \colon \exists x \in (a, b) \colon f'(x) \in \mathbb{R}\}$$

je 1. kategorie v prostoru $\mathcal{C}([a, b])$.

Příklad 5.4. Ukažte, že prostor ℓ_2 je separabilní a jeho jednotková koule není totálně omezená.

Příklad 5.5. Ukažte, že metrický prostor (P, ϱ) je totálně omezený právě tehdy, když z každé posloupnosti prvků P lze vybrat cauchyovskou podposloupnost.

Příklad 5.6. Je sjednocení dvou souvislých množin souvislá množina?

Příklad 5.7. Je průnik dvou souvislých množin souvislá množina?

Příklad 5.8. Je vzor souvislé množiny při spojitém zobrazení souvislá množina?

Příklad 5.9. Je množina $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ souvislá?

Příklad 5.10. Nechť P je souvislý metrický prostor, který obsahuje více než jeden bod. Dokažte, že P je nespočetný.

Příklad 5.11. Ukažte, že každý normovaný lineární prostor je souvislý.

Příklad 5.12. Nechť $P = \mathbb{R}$ a

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{je-li } x \neq 0, y = 0; \\ \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x = 0, y \neq 0; \\ 0 & \text{je-li } x = y; \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x \neq 0, y \neq 0, x \neq y. \end{cases}$$

Určete, zda

(i) (P, ϱ) je metrický prostor;

(ii) (P, ϱ) je úplný;

(iii) (P, ϱ) je kompaktní.

Určete $\operatorname{diam} P$. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P, ϱ).

Příklad 5.13. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Určete, zda

(i) (P, ϱ) je metrický prostor;

(ii) (P, ϱ) je úplný;

(iii) (P, ϱ) je kompaktní.

Určete $\operatorname{diam} P$. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P, ϱ). Jsou jednobodové množiny otevřené?

Příklad 5.14. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n + 1.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Lze odtud usoudit, že T není kontrakce na P? Jestliže ne, dokažte to nějak jinak.

Příklad 5.15. Nechť $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n^2.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Dokažte, že přesto je T kontrakce na P. Jak je to možné?

Příklad 5.16. V prostoru $C([0,1])$ se supremovou metrikou definujeme pro dvě dané funkce $g, h \in C([0,1])$ *úsečku*:

$$f : [0,1] \to C([0,1]), \quad f(a) = g + a(h - g).$$

Dokažte, že: (a) úsečka je křivka;

(b) f je stejnoměrně spojitá na $[0,1]$;

(c) $C([0,1])$ je křivkově souvislý prostor.

Všimněte se, že stačí dokázat jen jedno z tvrzení (i)–(iii). Které?

Příklad 5.17. Zkoumejte, jaké vlastnosti musíme vyžadovat od metrického prostoru, aby v něm bylo možno nějakým rozumným způsobem zadefinovat úsečku a aby platila analogie tvrzení z předcházejícího příkladu. Pro jakou třídu metrických prostorů takto automaticky zajistíme křivkovou souvislost?

Příklad 5.18. Ukažte na příkladu, že uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislá množina.

Návod: Graf funkce $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (0,1)$.

Příklad 5.19. Ukažte příklad množin A, B takových, že $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$, A je křivkově souvislá množina, B není křivkově souvislá množina.

Návod: V $\mathbb{R}^2$ vezměte všechny úsečky délky 1 vycházející z počátku a mající směrnice $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. To je množina A. Množinu B vytvořte tak, že k A přidáte ještě úsečku $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \in [\frac{1}{2}, 1], y = 0\}$. Je A křivkově souvislá? Co je $\overline{A}$? Platí $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$? Je B křivkově souvislá?