MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 - ZIMNÍ SEMESTR 2022–2023
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

1. Logika, množiny a základní číselné obory

1.1. **Logika.** *Logika* je věda o formální správnosti myšlení. Formálně logická správnost spočívá ve správnosti **vyvození** závěru z předpokladů.

Výrokem nazveme jakékoli tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé), nebo že neplatí (je nepravdivé).

Příklady.
- Dnes neprší. (Je výrok. Pravdivost posuďte sami.)
- Beroun je hlavní město USA. (Je výrok, (zatím) nepravdivý.)
- Ahoj! (Není výrok.)
- Kéž by už byl konec hodiny! (Není výrok.)
- Desetinný rozvoj čísla π obsahuje nekonečný počet nul. (Neví se, zda je to pravda, ale je to výrok.)

Z výroků lze vytvářet nové složitější výroky pomocí logických operací.

Negací výroku A rozumíme výrok „Není pravda, že platí A.“, případně „Neplatí A.“ Negaci výroku A značíme $\neg A$.

Konjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A a zároveň platí B.“, případně „Platí A a platí B.“, „Platí A i B.“ Konjunkci výroků A a B značíme $A \wedge B$, někdy také $A \,\&\, B$.

Disjunkcí výroků A a B nazveme výrok „Platí A nebo platí B.“ Disjunkci výroků A a B značíme $A \vee B$.

Implikací nazýváme výrok „Jestliže platí (výrok) A, potom platí (výrok) B.“ Takové spojení výroků A a B značíme $A \Rightarrow B$. Výroku A říkáme **předpoklad** a výroku B **závěr**. Místo výroku „Jestliže platí A, potom platí B.“ používáme také následující obraty.

- Jestliže platí výrok A, pak platí výrok B.
- Výrok A implikuje výrok B.
- Z výroku A plyne výrok B.
- Předpokládejme, že platí výrok A, potom platí výrok B.
- Nechť platí výrok A. Potom platí výrok B.
- Výrok A je postačující podmínkou pro platnost výroku B.
- Výrok B je nutnou podmínkou pro platnost výroku A.

Ekvivalencí výroků A a B nazýváme výrok „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ Ekvivalenci výroků A a B značíme $A \Leftrightarrow B$. Místo „Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“ používáme také následující obraty.

- Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.
- Výrok A je ekvivalentní s výrokem B.
- Výrok A je nutnou a postačující podmínkou pro platnost výroku B.

Následující tabulky uvádějí pravdivostní hodnoty výše definovaných logických operací v závislosti na pravdivosti výroků A a B.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Poznámky.

- Logická spojka *nebo* u disjunkce není vylučující, tj. disjunkce zůstává v platnosti i když platí oba výroky A a B.
- Je-li premisa implikace A nepravdivá, pak implikace platí vždy bez ohledu na platnost závěru B (jinými slovy, z nepravdivého výroku plyne jakýkoli výrok).

Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů (které nazýváme prvky) do jediného celku. Je-li a prvkem množiny A, pak píšeme $a \in A$. Pokud a není prvkem A, píšeme $a \notin A$. Jestliže každý prvek množiny A je i prvkem množiny B, potom říkáme, že A je podmnožinou B a píšeme $A \subset B$. Prázdnou množinou nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek.

Predikátem v logice rozumíme vlastnost, kterou nějakému předmětu přisuzujeme, nebo mu ji upíráme. Predikátová logika se věnuje studiu predikátů a vyšetřování vlastností kvantifikace.

Definice. **Výrokovou formou** budeme nazývat výraz

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \ldots, M_m$.

Definice. Nechť $V(x)$, $x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ platí $V(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M\colon\ V(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným kvantifikátorem**.

Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $V(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M\colon\ V(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním kvantifikátorem**.

Poznámka. Kvantifikátory stejného typu lze libovolně přehazovat, například

$$\forall x\ \forall y\colon V(x,y) \iff \forall y\ \forall x\colon V(x,y) \iff \forall x, y\colon V(x,y).$$

Na druhé straně ale kvantifikátory různého typu obecně přehazovat nelze, aniž by se změnil smysl výroku. Výrok

$$\exists x\ \forall y\colon \quad V(x,y)$$

sice implikuje výrok

$$\forall y\ \exists\ x\colon V(x,y),$$

ale opačná implikace obecně neplatí. Například výrok

$$\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

platí, ale

$$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\colon x > y$$

nikoli.

Příklad. Nechť M je množina osob přítomných v posluchárně a nechť $W(x,y)$ znamená: osoba x zná příjmení osoby y. Zkoumejte platnost výroků

$$\forall x \in M\ \exists y \in M\colon W(x,y),$$
$$\forall y \in M\ \exists x \in M\colon W(x,y),$$
$$\exists x \in M\ \forall y \in M\colon W(x,y),$$
$$\exists y \in M\ \forall x \in M\colon W(x,y).$$

1.2. **Základní metody důkazů.** V matematice vycházíme z několika základních tvrzení, která nedokazujeme. Taková tvrzení nazýváme **axiomy**. Všechna další tvrzení jsou potom odvozována z axiomů a tvrzení již dokázaných. Matematické tvrzení, které považujeme za důležité nebo zajímavé samo o sobě, většinou nazýváme **větou**. K označení tvrzení, které má pomocný charakter, tj. potřebujeme jej pouze k důkazu jiných tvrzení, používáme zpravidla slovo **lemma**. **Definice** vymezují nové pojmy, věty a lemmata hovoří o vlastnostech těchto pojmů a vztazích mezi nimi. Matematická teorie je tak tvořena axiomy, definicemi, větami, lemmaty a důkazy.

Nejčastěji bývá matematická věta formulována ve tvaru implikace, tj. pokud platí předpoklad A, pak platí závěr B. Důkazem je pak posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů věty k jejímu závěru. Mezi základní typy důkazů patří:

- přímý důkaz,
- nepřímý důkaz,
- důkaz sporem,
- důkaz rozborem případů,
- důkaz matematickou indukcí.

konec 2. přednášky (6.10.2022)

Značení. Množinu všech **přirozených** čísel, tj. množinu všech čísel 1, 2, 3, . . . , budeme značit $\mathbb{N}$, množinu všech **celých** čísel $\mathbb{Z}$, množinu všech **racionálních** čísel, tj. množinu čísel tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, budeme značit $\mathbb{Q}$ a množinu všech **reálných** čísel $\mathbb{R}$. **Iracionálním** číslem rozumíme každé reálné číslo, které není racionální.

Příklad. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz tvrzení. Vezměme libovolná čísla $a, b \in \mathbb{R}$. Potom platí $(a-b)^2 \geq 0$. Upravíme-li tuto nerovnost, dostaneme $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Odtud již snadno plyne dokazovaná nerovnost $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq ab$. □

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že potom existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$, přičemž oba případy nemohou nastat zároveň. V prvním případě říkáme, že n je **sudé**, a ve druhém, že je **liché**.

Důkaz. K důkazu první části tvrzení použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ položme $k = 1$. Potom máme $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$, a chceme tvrzení dokázat i pro číslo $n + 1$. Podle indukčního předpokladu existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $n = 2k$, nebo $n = 2k - 1$. V prvním případě platí $n + 1 = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$, ve druhém $n + 1 = 2k$. V prvním případě je tedy hledaným číslem $k + 1$ a ve druhém k.

Pokud by číslo $n \in \mathbb{N}$ bylo zároveň liché i sudé, pak by existovala $k, l \in \mathbb{N}$ taková, že $n = 2k = 2l - 1$. Potom $2(l - k) = 1$, a tedy $l - k = \frac{1}{2}$. Číslo $l - k$ je celé, na rozdíl od čísla $\frac{1}{2}$, což je spor. Metodou důkazu sporem jsme odvodili i druhou část tvrzení. Tím je tvrzení příkladu dokázáno. □

Příklad. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že je-li n^2 liché, potom je i n liché.

Řešení. Provedeme nepřímý důkaz. Předpokládejme, že neplatí, že n je liché. Potom je podle předcházejícího příkladu sudé. Tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ splňující $n = 2k$. Potom $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Protože $2k^2 \in \mathbb{N}$, plyne odtud, že n^2 je sudé. Podle předcházejícího příkladu není n^2 liché. Tím je tvrzení dokázáno metodou nepřímého důkazu.

Příklad (Bernoulliova nerovnost)**.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Důkaz. Použijeme matematickou indukci. Označme symbolem $V(n)$ výrokovou formu

$$\forall x \in \mathbb{R},\, x \geq -1 : (1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Pro $n = 1$ výrok $V(1)$ zřejmě platí. Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Použitím nerovnosti $1 + x \geq 0$, která platí díky předpokladu $x \geq -1$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x,$$

neboť $nx^2 \geq 0$ pro každá $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Platí tedy $V(n+1)$. Podle principu matematické indukce odtud plyne tvrzení. $\square$

Příklad (Bernoulliova nerovnost II)**.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -2$, platí $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Důkaz. Použijeme upravenou matematickou indukci. Označme symbolem $V(n)$ výrokovou formu

$$\forall x \in \mathbb{R},\, x \geq -2 : (1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Dokážeme, že

(a) platí $V(1)$ a $V(2)$,
(b) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n) \Rightarrow V(n+2)$.

Pro $n = 1$ výrok $V(1)$ zřejmě platí. Pro $n = 2$ plyne $V(2)$ z následujícího odhadu:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x.$$

Tím je ověřen bod (a). Předpokládejme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n)$. Použitím zřejmé nerovnosti $(1+x)^2 \geq 0$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, dostáváme z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+2} &= (1+x)^n(1+x)^2 \geq (1+nx)(1+x)^2 \\ &= 1 + (n+2)x + (2+x)nx^2 + x^2.\end{aligned}$$

Protože $x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $2 + x \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$, platí $(2+x)nx^2 + x^2 \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}, x \geq -2$. Odtud dostáváme pro každé $x \geq -2$ nerovnost $(1+x)^{n+2} \geq 1 + (n+2)x$. Tím je dokázána implikace (b), a tedy i Bernoulliova nerovnost. $\square$

Při důkazu výroku

$$\forall x \in M \colon V(x)$$

často postupujeme následujícím způsobem. Zvolíme $x \in M$ pevné, ale libovolné, tj. o x předpokládáme pouze to, že je prvkem M, a nic dalšího. Postupnými dedukcemi ukážeme platnost výroku $V(x)$ pro toto x. Tím je pak důkaz proveden.

Při důkazu výroku

$$\exists x \in M \colon V(x)$$

máme dvě možnosti. Buď přímo nalezneme nějaké $x \in M$, pro které platí $V(x)$, nebo takové $x \in M$ nenalezneme, ale dokážeme, že alespoň jedno musí existovat. Tyto postupy nazýváme po řadě **konstruktivním důkazem** a **nekonstruktivním důkazem**. Nekonstruktivní důkaz také někdy nazýváme **existenčním důkazem**.

Příklad. Dokažte, že existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že platí $x + 2 = 0$.

Příklad. Dokažte, že existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že platí $e^x - 2 = x$.

konec 3. přednášky (11.10.2022)

Příklad. Dokažte, že existují iracionální čísla a, b taková, že a^b je číslo racionální.

Řešení. 1. možnost (konstruktivní důkaz): Položme $a = \sqrt{2}$ a $b = \log_2 9$, kde $\log_2$ označuje logaritmus o základu 2. Potom platí

$$a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\log_2(3^2)} = 2^{\log_2 3} = 3.$$

O čísle $\sqrt{2}$ víme díky klasickému Eukleidovu důkazu, že je iracionální. Stačí tedy odvodit, že číslo $\log_2 9$ je iracionální. Použijeme metodu důkazu sporem. Předpokládejme, že $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Poněvadž je číslo $\log_2 9$ kladné, musí být p přirozené. Potom $9 = 2^{\log_2 9} = 2^{\frac{p}{q}}$, a tedy

$9^q = 2^p$. Je-li $p > 0$, pak je číslo 2^p sudé a číslo je 9^q liché, což je spor. Je-li $p \leq 0$, pak je $2^p \leq 1 < 9^q$, což je opět spor.

2. možnost (nekonstruktivní důkaz): Využijeme opět iracionalitu čísla $\sqrt{2}$. Pokud by číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ bylo racionální, pak bychom byli s důkazem hotovi. Pokud by tomu tak nebylo, pak by čísla $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $\sqrt{2}$ byla iracionální, přitom ale číslo

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

je racionální. Tím je tvrzení dokázáno, neboť alespoň jedna dvojice čísel

$$a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{2} \qquad \text{nebo} \qquad a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ b = \sqrt{2}$$

splňuje zadání úlohy. Výše uvedený postup však neříká, zda je řešením první nebo druhá dvojice čísel.

Poznamenejme ještě, že lze ukázat, že číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ je iracionální. Důkaz je však velmi obtížný. □

1.3. Množiny a množinové operace.

Definice. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu vytvořenou všemi prvky, které patří alespoň do jedné z množin A či B. Sjednocení množin A a B značíme symbolem $A \cup B$.

Je-li $\mathcal{A}$ systém množin, pak jeho **sjednocení** $\bigcup \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, pro které existuje $A \in \mathcal{A}$ takové, že $a \in A$.

Definice. **Průnikem** dvou množin A a B nazveme množinu všech prvků, které náležejí současně do A i do B. Průnik množin A a B značíme symbolem $A \cap B$. Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.

Je-li $\mathcal{A}$ neprázdný systém množin, pak jeho **průnik** $\bigcap \mathcal{A}$ definujeme jako množinu všech prvků a, které pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňují $a \in A$.

Definice. **Rozdílem množin** A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.

Definice. **Kartézským součinem** množin $A_1, \ldots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \ldots, a_n];\ a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla)**.** *Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je neprázdný systém množin. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} = \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a

$$X \setminus \bigcap \mathcal{A} = \bigcup \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

Důkaz. Provedeme důkaz prvního z uvedených tvrzení. Máme dokázat dvě inkluze, a sice

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \subset \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$$

a zároveň

$$X \setminus \bigcup \mathcal{A} \supset \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}.$$

Je-li $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, znamená to, že x patří do X, ale nepatří do sjednocení $\bigcup \mathcal{A}$. Tedy $x \notin A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. To ale znamená, že pro každé $A \in \mathcal{A}$ je $x \in X \setminus A$, a tudíž $x \in \bigcap \{X \setminus A; A \in \mathcal{A}\}$. Tím je první inkluze dokázána.

Nechť $x \in X \setminus A$ pro každou množinu $A \in \mathcal{A}$. Tedy $x \in X$, ale $x \notin A$ pro každoua $A \in \mathcal{A}$. Takže $x \notin \bigcup \mathcal{A}$. Tudíž $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{A}$, čímž je završen důkaz druhé inkluze.

Druhé de Morganovo pravidlo lze dokázat obdobně. □

1.4. **Zobrazení.**

Definice. Nechť A a B jsou množiny. **Binární relací** (nebo krátce **relací**) mezi prvky množin A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Místo zápisu $[a, b] \in R$ někdy píšeme $a\, R\, b$. Pokud $A = B$, říkáme, že R je **relace na** A.

Definice. Nechť A a B jsou množiny a nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak relaci $R^{-1} \subset B \times A$ definovanou předpisem

$$[x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$$

nazýváme **inversní relací** k relaci R.

Definice. Nechť A a B jsou množiny. Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme **zobrazením** (někdy též **funkcí**) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon \big(([x, y_1] \in F \ \&\ [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2\big).$$

Poznámka. Je-li F je zobrazení z množiny A do množiny B, pak pro každé $x \in A$ existuje nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $[x, y] \in F$. Pokud pro dané $x \in A$ takové y existuje, je určeno jednoznačně. Značíme je symbolem $F(x)$.

Definice. Nechť F je zobrazení z množiny A do množiny B. **Definičním oborem** zobrazení F nazýváme množinu

$$\{x \in A; \exists y \in B\colon F(x) = y\},$$

kterou značíme $\mathcal{D}(F)$. **Oborem hodnot** zobrazení F nazýváme množinu

$$\{y \in B; \exists x \in A\colon F(x) = y\},$$

kterou značíme $\mathcal{H}(F)$. **Grafem** zobrazení F rozumíme množinu

$$\{[x, F(x)] \in A \times B; x \in \mathcal{D}(F)\},$$

kterou značíme $\operatorname{graf}(F)$.

Značení. Nechť A a B jsou množiny. Potom symbolem

$$F\colon A \to B$$

značíme fakt, že

- F je zobrazení z A do B,
- $A = \mathcal{D}(F)$,
- $\mathcal{H}(F) \subset B$.

Hovoříme o **zobrazení množiny** A do množiny B.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$, $M \subset A$, $P \subset B$.

- **Obrazem** množiny M při zobrazení f rozumíme množinu

  $$\{y \in B; \exists x \in M\colon f(x) = y\},$$

  kterou značíme $f(M)$.
- **Vzorem** množiny P při zobrazení f nazveme množinu

  $$\{x \in A; f(x) \in P\},$$

  kterou značíme $f^{-1}(P)$.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$. Řekneme, že f je

- **prosté** (**injektivní**), jestliže

  $$\forall x, y \in A\colon (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y),$$

- **„na“** (**surjektivní**), jestliže

  $$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon f(x) = y,$$

- **bijekce** (**vzájemně jednoznačné**), jestliže je zároveň prosté a „na“.

Příklad. Nechť zobrazení f je definováno předpisem $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $A = B = [0, \infty)$, pak $f : A \to B$ je bijekce. Je-li $A = \mathbb{R}$ a $B = [0, \infty)$, pak $f : A \to B$ je „na“, ale není prosté. Je-li $A = [0, \infty)$ a $B = \mathbb{R}$, pak $f : A \to B$ je prosté, ale není „na“. Je-li $A = B = \mathbb{R}$ pak $f : A \to B$ není ani prosté, ani „na“.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ a $C \subset A$. Pak zobrazení $g\colon C \to B$ definované předpisem $g\colon x \mapsto f(x)$ pro $x \in C$ nazýváme **restrikcí** (též **zúžením**) zobrazení f na množinu C. Zobrazení g označujeme symbolem $f|_C$.

Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak zobrazení $g \circ f$ je definováno předpisem $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ pro všechna $x \in \mathcal{D}(f)$ taková, že $f(x) \in \mathcal{D}(g)$. Zobrazení $g \circ f$ nazýváme **složeným zobrazením**, přičemž g nazýváme **vnějším** zobrazením a f nazýváme **vnitřním** zobrazením.

konec 4. přednášky (11.10.2022)

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je prosté. Pak **inversní zobrazení** k f je definováno jako inversní relace k f. Inversní zobrazení k f značíme f^{-1}.

Poznámka. Je-li $f\colon A \to B$ prosté, pak

$$f^{-1}\colon f(A) \to A.$$

Poznámka. K neprostému zobrazení nelze definovat inversní zobrazení.

1.5. **Mohutnost množin.**

Definice. Nechť X je množina. Potom **potenční množinou** množiny X rozumíme množinu všech podmnožin množiny X. Značíme ji symbolem $\mathcal{P}(X)$.

Definice. Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B. Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B. Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy platí $A \preceq B$, ale neplatí $A \approx B$.

Definice. Řekneme, že množina X je **konečná**, jestliže je buď prázdná, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X \approx \{1, \dots, n\}$. Řekneme, že množina X je **nekonečná**, jestliže není konečná. Řekneme, že množina X je **spočetná**, jestliže je buď konečná, nebo $X \approx \mathbb{N}$. Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Příklady. Konečné množiny jsou například množiny $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\{x\}$. Nekonečné spočetné množiny jsou například množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$. Nespočetné množiny jsou například množiny $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(0, 1)$, $\{\{a_1, a_2, a_3, \dots\}; a_n \in \{0, 1\},\ n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Věta 1.2 (Cantorova–Bernsteinova)**.** *Nechť X, Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a $Y \preceq X$. Potom $X \approx Y$.*

Věta 1.3 (Cantorova)**.** *Nechť X je množina. Pak $X \prec \mathcal{P}(X)$.*

Důkaz. Zobrazení $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$ definované předpisem $\varphi(x) = \{x\}$, je prosté, takže platí $X \preceq \mathcal{P}(X)$.

Zbývá ukázat, že množiny X a $\mathcal{P}(X)$ nemají stejnou mohutnost. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje bijekce $\varphi\colon X \to \mathcal{P}(X)$. Označme $A = \{x \in X; x \notin \varphi(x)\}$. Zobrazení φ je bijekce, a proto můžeme nalézt $a \in X$ takové, že $\varphi(a) = A$. Pokud $a \in A$, pak podle definice množiny A platí $a \notin \varphi(a)$, což je spor, neboť $\varphi(a) = A$. Pokud $a \notin A$, pak podle definice množiny A platí $a \in \varphi(a) = A$, což je opět spor. Tím je předpoklad existence bijekce φ přiveden ke sporu a tvrzení je dokázáno. $\square$

Věta 1.4 (vlastnosti spočetných množin)**.**

(a) *Každá podmnožina spočetné množiny je spočetná.*
(b) *Jestliže A je množina a existuje $f\colon A \to \mathbb{N}$ prosté, potom je A spočetná.*
(c) *Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.*
(d) *Obraz spočetné množiny je spočetná množina.*
(e) *Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

1.6. **Reálná čísla.** Množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností:

- vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah,
- vztah uspořádání a operací sčítání a násobení,
- vlastnost suprema.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}: \ w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme jej 0 a říkáme mu **nulový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R} \, \exists z \in \mathbb{R}: \ x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme je $-x$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \forall x \in \mathbb{R}: \ v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme jej 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists y \in \mathbb{R}: \ x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme jej x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \& \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (0 \leq x \ \& \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Značení. Symbol $x \geq y$ znamená totéž, jako $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**). Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat **kladnými** (resp. **zápornými**). Reálná čísla, pro něž $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$), budeme nazývat **nezápornými** (resp. **nekladnými**).

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}$ je

- **horní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a \leq x$,
- **dolní závorou** množiny A, jestliže pro každé $a \in A$ platí $x \leq a$.

Řekneme, že množina A je

- **shora omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je horní závorou množiny A,
- **zdola omezená**, jestliže existuje prvek $x \in X$, který je dolní závorou množiny A,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in A \colon x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \ \exists x \in A \colon G' < x$,

nazýváme **supremem** množiny A. Má-li množina A supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme je $\sup A$.

konec 5. přednášky (13.10.2022)

III. Vlastnost existence suprema

- Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Věta 1.5 (existence a jednoznačnost množiny reálných čísel)**.** *Existuje čtveřice* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *splňující podmínky I–III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice* $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus, \odot, \leq^*)$ *splňuje mutatis mutandis podmínky I–III, pak existuje bijekce* $\varphi : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ *taková, že pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí*

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$,
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$,
- $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq^* \varphi(y)$.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Číslo $g \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in A\colon g \leq x$,
- $\forall g' \in \mathbb{R},\ g < g'\ \exists x \in A\colon x < g'$,

nazýváme **infimem** množiny A. Má-li množina A infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme je $\inf A$.

Poznámka. Jestliže existuje $\sup A$, potom $\sup A$ může a nemusí být prvkem A (obdobně pro infimum).

Příklady. Uvedeme několik jednoduchých příkladů množin a jejich suprem.

- $A = [0, 1]$, pak $\sup A = 1$ a $\sup A \in A$,
- $B = [0, 1)$, pak $\sup B = 1$ a $\sup B \notin B$,
- $C = [0, 1] \cup \{2\}$, pak $\sup C = 2$ a $\sup C \in C$,
- $D = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, pak $\sup D = 1$ a $\sup D \notin D$,
- $E = \{x \in \mathbb{Q}; x \leq \sqrt{2}\}$, pak $\sup E = \sqrt{2}$ a $\sup E \notin E$.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny A, jestliže $a \in A$ a a je horní závorou množiny A. Obdobně definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) A. Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max A$ a $\min A$.

Poznámka. Jestliže existuje $\max A$, potom platí $\max A \in A$ (obdobně pro minimum). Jestliže existuje $\max A$, potom existuje i $\sup A$ a platí $\max A = \sup A$ (obdobně pro minimum a infimum).

Příklady. Ve výše uvedených příkladech existují maxima množin A, C, neexistují maxima množin B, D, E, existují minima množin A, B, C, D a neexistuje minimum množiny E.

Poznámka. Jestliže existuje $\sup A$, potom $\sup A$ je nejmenší horní závorou množiny A. Jestliže existuje $\inf A$, potom $\inf A$ je největší dolní závorou množiny A.

Definice. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** předpisem

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jestliže } x \geq 0, \\ -x, & \text{jestliže } x < 0. \end{cases}$$

Poznámka. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Potom platí:

(a) $|x| \geq 0$,
(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(c) $|x| = |-x|$,
(d) $||x|| = |x|$,
(e) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\colon |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$,
(f) $|x| = \max\{x, -x\}$,
(g) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
(h) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Tvrzení (g) nazýváme **trojúhelníkovou nerovností** reálných čísel.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Definujeme množiny

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\},\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\},\\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\},\\
(-\infty,\infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Pak množiny (a,b), $(-\infty,b)$, (a,∞) a $(-\infty,\infty)$ nazýváme **otevřenými intervaly**, množinu $[a,b]$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a množiny $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,b]$ a $[a,\infty)$ nazýváme **polouzavřenými intervaly**.

Poznámka. Prázdná množina je intervalem, neboť $(a,a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je intervalem, neboť $[a,a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Množina $A \subset \mathbb{R}$ je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in A\ \forall z \in \mathbb{R}\colon (x < z < y \Rightarrow z \in A).$$

Věta 1.6 (existence infima)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je zdola omezená neprázdná množina. Potom existuje infimum množiny M a označíme-li*

$$-M = \{x \in \mathbb{R}; -x \in M\},$$

pak platí $\inf M = -\sup(-M)$.

Důkaz. Množina $-M$ je zřejmě neprázdná. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je dolní závorou M. Pro každé $x \in -M$ platí $-x \in M$, takže $K \leq -x$, tedy $x \leq -K$. Odtud plyne, že $-K$ je horní závorou $-M$. Množina $-M$ je tedy shora omezená. Z vlastnosti III plyne existence suprema $-M$, které označíme G. Dokážeme, že prvek $g = -G$ je infimem množiny M. Pro každé $x \in M$ platí $-x \in -M$, tedy $-x \leq G$, takže $g \leq x$. Číslo g je proto dolní závorou M. Tím je ověřena první podmínka z definice infima. Předpokládejme, že $g' \in \mathbb{R}$ a $g < g'$. Položme $G' = -g'$. Potom $G' < G$, a z druhé vlastnosti suprema tedy vyplývá, že existuje $y \in -M$ takové, že $G' < y$, takže $-y < g'$. Protože $-y \in M$, je tím ověřena i druhá podmínka z definice infima. □

Věta 1.7 (existence celé části reálného čísla)**.** *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k+1$.*

Důkaz. Jednoznačnost. Nechť $k, j \in \mathbb{Z}$ splňují $k \neq j$, $k \leq x < k+1$ a $j \leq x < j+1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $j < k$. Potom $k \leq x$ a $x < j+1$, takže $0 < k - j < 1$. Protože $k - j \in \mathbb{Z}$ a $0 < k - j$, platí $1 \leq k - j$. To je spor s tím, že $k - j < 1$.

Existence. Označme $M = \{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$. Číslo x je horní závorou M, a proto je M shora omezená. Ukážeme, že M je neprázdná. Předpokládejme, že $M = \emptyset$. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí $x < n$, a proto je množina $\mathbb{Z}$ zdola omezená. Množina $\mathbb{Z}$ je neprázdná, a tedy existuje infimum g množiny $\mathbb{Z}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{Z}$ platí $g \leq n$. Je-li $n \in \mathbb{Z}$, pak i $n - 1 \in \mathbb{Z}$, a proto $g \leq n - 1$. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ potom platí $g + 1 \leq n$. Prvek $g + 1$ je tedy dolní závorou množiny $\mathbb{Z}$, což je spor s tím, že $g = \inf \mathbb{Z}$. Množina M je tudíž neprázdná. Existuje tedy supremum $G \in \mathbb{R}$ množiny M. K němu nalezneme $k \in M$ takové, že $G - 1 < k$. Pak platí $G < k + 1$, a tedy $k + 1 \notin M$. Odtud a z toho, že $k \in M$, plyne $k \in \mathbb{Z}$ a $k \leq x < k + 1$. □

konec 6. přednášky (18.10.2022)

Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \leq x < k+1$ (jehož existenci a jednoznačnost zaručuje Věta 1.7), nazýváme **celou částí** čísla x a značíme je symbolem $[x]$.

Věta 1.8 (Archimédova vlastnost reálných čísel)**.** *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.*

Důkaz. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Položme $n = \max\{[x] + 1, 1\}$. Potom zřejmě $n \in \mathbb{N}$. Jestliže $x \leq 0$, pak $x < 1 \leq n$. Jestliže $x > 0$, pak dle Věty 1.7 platí $x < [x] + 1 \leq n$. Číslo n tedy má požadované vlastnosti. □

Věta 1.9 (hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $y \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < y < b$.*

Důkaz. Protože $b - a > 0$, je $\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$. Podle Věty 1.8 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že platí $\frac{1}{b-a} < n$. Je tedy $na + 1 < nb$. Položíme $y = \frac{[na]+1}{n}$. Potom $y \in \mathbb{Q}$ a podle Věty 1.7 platí

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na]+1}{n} \leq \frac{na+1}{n} < \frac{nb}{n} = b.$$

□

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takové, že $a < z < b$.

1.7. **Komplexní čísla.** Množinou **komplexních čísel** $\mathbb{C}$ rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = [a, b]$ a $y = [c, d]$ definujeme operace sčítání a násobení předpisy

- $x + y = [a + c, b + d]$,
- $x \cdot y = [ac - bd, ad + bc]$.

Nechť $x = [a, b] \in \mathbb{C}$. Pak prvek a nazýváme **reálnou částí** komplexního čísla x a prvek b nazýváme **imaginární částí** x. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla x rozumíme nezáporné reálné číslo $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dále definujeme $0 = [0, 0]$, $1 = [1, 0]$ a $i = [0, 1]$. **Komplexně sdruženým číslem** k x rozumíme číslo $\overline{x} = [a, -b]$. Symbol $-x$ značí číslo $[-a, -b]$ a symbol $\frac{1}{x}$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) komplexní číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

2. Limita posloupnosti

2.1. Vlastní limita posloupnosti.

Definice. (Nekonečnou) posloupností reálných čísel rozumíme každé zobrazení $n \mapsto a_n, n \in \mathbb{N}$, množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Takovou posloupnost obvykle značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně jen $\{a_n\}$. Číslo a_n nazýváme **n-tým členem** této posloupnosti.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ splňující $a_n = c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ se nazývá **konstantní**.

Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom posloupnost $\{\alpha q^n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **geometrickou posloupností**.

Definice. Fibonacciova posloupnost je zadána následujícím způsobem: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Říkáme, že posloupnost je zadána **rekurentně**.

Příklady. $\{n$-té prvočíslo$\}$, $\{n + 2016\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n}\}$, **look and say sequence**.

Poznámka. Symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, případně $\{a_n\}$, označuje posloupnost, tedy zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, zatímco symbol $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ značí **množinu všech členů** této posloupnosti, tedy podmnožinu $\mathbb{R}$. Známe-li $\{a_n\}$, pak známe i $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, ale nikoli naopak. Zadání posloupnosti kromě informace o oboru hodnot totiž navíc udává pořadí prvků z tohoto oboru. Například posloupnosti $\{(-1)^n\}$ a $\{(-1)^{n+1}\}$ jsou různé, ale mají stejnou množinu všech členů, a to $\{-1, 1\}$.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu rovnou** A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Řekneme, že $\{a_n\}$ **má vlastní limitu**, neboli **konverguje** (je **konvergentní**), jestliže existuje reálné číslo A takové, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A, tedy

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| < \varepsilon.$$

Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, pak říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**).

konec 7. přednášky (20.10.2022)

Lemma (o libovolně malých veličinách). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, platí $|a - b| \leq K\varepsilon$, potom $a = b$.*

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že ačkoli jsou podmínky lemmatu pro reálná čísla a, b splněny, jsou čísla a a b různá. Předpokládejme nejprve, že $a > b$. Položme $\varepsilon = \frac{a-b}{2K}$. Číslo ε je kladné, a proto podle předpokladu platí $0 < |a-b| \leq K\varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)$. Odtud vyplývá $0 < a-b \leq \frac{1}{2}(a-b)$, což je spor. Pokud $a < b$, pak položíme $\varepsilon = \frac{1}{2K}(b-a)$ a spor obdržíme obdobně jako v předchozím případě. □

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou B. Potom platí $A = B$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_A$, je $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Potom platí $n_0 \geq n_A$ i $n_0 \geq n_B$, a tedy $|a_{n_0} - A| < \varepsilon$ i $|a_{n_0} - B| < \varepsilon$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - a_{n_0} + a_{n_0} - B| \\ &\leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $|A - B| < 2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, je podle lemmatu $A = B$. □

Značení. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu, pak tato limita je určena jednoznačně a označujeme ji symbolem $\lim a_n$, případně $\lim_{n\to\infty} a_n$. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ reálné číslo A, pak píšeme $\lim a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $a_n \overset{n\to\infty}{\to} A$, nebo $a_n \to A$.

Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$. Dokažte, že $\lim a_n = c$.

Příklad. Dokažte, že $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Příklad. Spočtěte $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{n\}$ nemá vlastní limitu.

Příklad. Dokažte, že posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech jejích členů je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech jejích členů je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže je omezená shora i zdola.

Příklady. Posloupnosti $\{(-1)^n\}$, $\{\frac{1}{n}\}$ a $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ jsou omezené. Posloupnost $\{n\}$ je omezená zdola, ale nikoli shora.

Věta 2.2 (charakterisace omezenosti posloupnosti)**.** *Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je omezená právě tehdy, když existuje číslo $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Díky omezenosti množiny $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ nalezneme čísla $A, B \in \mathbb{R}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $A \leq a_n \leq B$. Položme $K = \max\{|A|, |B|\}$. Pak zřejmě platí $-K \leq a_n \leq K$, a tedy $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$ splňuje $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $-K \leq a_n \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená. □

Poznámka. Omezená posloupnost nemusí být konvergentní. Příkladem je posloupnost $\{(-1)^n\}$, která je omezená a divergentní.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$,
- **rostoucí** jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,
- **nerostoucí** jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- **klesající**, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,
- **monotónní**, jestliže je neklesající nebo nerostoucí,
- **ryze monotónní**, jestliže je rostoucí, nebo klesající.

Příklady. Každá konstantní posloupnost je monotónní (oběma způsoby), není však ryze monotónní. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ není monotónní. Posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}$ a $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$ jsou klesající. Posloupnost $\{n\}$ je rostoucí.

Poznámka. Výrok „posloupnost je neklesající“ není negací výroku „posloupnost je klesající“ (podobně pro nerostoucí a rostoucí).

Věta 2.3 (limita posloupnosti a absolutní hodnota)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\lim a_n = A$. Potom $\lim |a_n| = |A|$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí podle trojúhelníkové nerovnosti odhad $||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon$. Celkem tedy máme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ ||a_n| - |A|| < \varepsilon.$$

To ale podle definice znamená, že $\lim |a_n| = |A|$. □

Poznámka. Z výroku $\lim |a_n| = |A|$ obecně neplyne výrok $\lim a_n = A$. Příkladem je posloupnost $\{(-1)^n\}$, která splňuje $\lim |a_n| = 1$, přičemž $\lim a_n$ neexistuje.

konec 8. přednášky (25.10.2022)

Věta 2.4 (nulová limita posloupnosti a absolutní hodnota)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\lim a_n = 0$ právě tehdy, když $\lim |a_n| = 0$.*

Důkaz. Podle definice limity je $\lim a_n = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ |a_n - 0| < \varepsilon,$$

zatímco $\lim |a_n| = 0$, právě když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon\ ||a_n| - 0| < \varepsilon.$$

Protože

$$||a_n| - 0| = ||a_n|| = |a_n| = |a_n - 0|\,,$$

jsou oba výroky ekvivalentní. □

Věta 2.5 (charakterisace existence limity posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon |a_n - A| < K\varepsilon. \tag{1}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\lim a_n = A$. Pak z definice limity plyne, že (1) platí pro $K = 1$.

$\Leftarrow$ Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, je číslo splňující (1). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Podle (1) k tomuto ε' existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < K\varepsilon' = \varepsilon$. K zadanému $\varepsilon > 0$ jsme tedy nalezli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme $|a_n - A| < \varepsilon$. Jinými slovy, $\lim a_n = A$. □

Věta 2.6 (vztah konvergence a omezenosti posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost reálných čísel. Potom je $\{a_n\}$ omezená.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathbb{R}$ splňuje $\lim a_n = A$. Položme $\varepsilon = 1$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je $|a_n - A| < 1$. Množina $\{|a_n|; n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy je omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je její horní závora. Potom

$$|a_n| \leq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ |A| + 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Položme $K = \max\{M, |A| + 1\}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$, a tedy je posloupnost $\{a_n\}$ omezená. □

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme **vybranou posloupností** z posloupnosti $\{a_n\}$, případně **podposloupností** posloupnosti $\{a_n\}$.

Poznámka. Posloupnosti $\{a_n\}$, $\{a_{n+1}\}$, $\{a_{n+k_0}\}$ pro nějaké $k_0 \in \mathbb{N}$, $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n+1}\}$, $\{a_{n^2}\}$ jsou příklady podposloupností posloupnosti $\{a_n\}$.

Věta 2.7 (limita vybrané posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a $A \in \mathbb{R}$. Jestliže $\lim a_n = A$, pak $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

K důkazu věty budeme potřebovat následující lemma.

Lemma. *Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$.*

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Protože $n_1 \in \mathbb{N}$, zřejmě máme $n_1 \geq 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $n_k \geq k$. Potom platí $n_{k+1} > n_k \geq k$, neboť $\{n_k\}$ je rostoucí, a tedy $n_{k+1} \geq k+1$. Tím je tvrzení podle principu matematické indukce dokázáno. $\square$

Důkaz Věty 2.7. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ |a_n - A| < \varepsilon. \tag{2}$$

Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$, platí díky lemmatu nerovnost $n_k \geq k \geq n_0$, a tedy podle (2) dostaneme $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$. Tím je věta dokázána. $\square$

Poznámka. Jestliže existují dvě podposloupnosti posloupnosti $\{a_n\}$ mající různé limity, pak je $\{a_n\}$ divergentní. Označíme-li například $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je tedy divergentní.

Věta 2.8 (aritmetika vlastních limit)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
(c) *jestliže navíc $B \neq 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $b_n \neq 0$, pak $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existují přirozená čísla n_A, n_B taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, je $|A - a_n| < \varepsilon$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, je $|B - b_n| < \varepsilon$. Položíme-li $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí obě uvedené nerovnosti.

(a) Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Věty 2.5 pro $K = 2$.

(b) Posloupnost $\{b_n\}$ je konvergentní, a tedy podle Věty 2.6 je také omezená. Jinými slovy existuje $L \in \mathbb{R}, L > 0$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| \leq L$. Úpravou výrazu $a_n b_n - AB$ a použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}|a_n b_n - AB| &= |(a_n b_n - b_n A) + (b_n A - AB)| \leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \\ &= |b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B|\,.\end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dále platí

$$|b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B| < L\varepsilon + |A|\varepsilon = (L + |A|)\varepsilon,$$

a tedy

$$|a_n b_n - AB| < (L + |A|)\varepsilon.$$

Dokazované tvrzení tedy vyplývá z Věty 2.5 pro $K = L + |A|$.

(c) Obdobnými úpravami jako v důkazech předchozích tvrzení dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - A b_n}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - A b_n}{b_n B}\right| \\ &\leq \left|\frac{a_n B - AB}{b_n B}\right| + \left|\frac{AB - A b_n}{b_n B}\right| \\ &= \frac{|a_n - A|}{|b_n|} + \frac{|A|\,|b_n - B|}{|b_n|\,|B|}.\end{aligned} \tag{3}$$

Podle definice limity existuje ke kladnému číslu $\frac{|B|}{2}$ takové $n_1 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$|B - b_n| < \frac{|B|}{2}.$$

Tedy podle trojúhelníkové nerovnosti pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$\frac{|B|}{2} > |B - b_n| \geq |B| - |b_n|,$$

a tudíž

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}. \tag{4}$$

Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí podle (3) a (4)

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| \leq \frac{2}{|B|}|a_n - A| + \frac{2|A|}{B^2}|b_n - B| < \frac{2}{|B|}\varepsilon + \frac{2|A|}{B^2}\varepsilon = \left(\frac{2}{|B|} + \frac{2|A|}{B^2}\right)\varepsilon.$$

Tvrzení tudíž plyne z Věty 2.5. □

konec 9. přednášky (1.11.2022)

Věta 2.9 (limita součinu členů omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž $\lim a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Potom $\lim a_n b_n = 0$.*

Důkaz. Protože $\{b_n\}$ je omezená, nalezneme číslo $K > 0$ splňující $|b_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $\lim a_n = 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tudíž platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < K\varepsilon.$$

Podle Věty 2.5 platí $\lim a_n b_n = 0$. □

Poznámka. Tvrzení Věty 2.9 neplyne z Věty 2.8, protože posloupnost $\{b_n\}$ nemusí mít vlastní limitu.

Příklad. Spočtěte $\lim(3 + (-1)^n)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Věta 2.10 (limita posloupnosti a uspořádání)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$.*

(a) *Nechť $A < B$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$.*
(b) *Nechť existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n \geq b_n$. Potom $A \geq B$.*

Důkaz. (a) Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. Pak podle definice limity existuje $n_A \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, platí $a_n < A + \varepsilon$ a $n_B \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, platí $b_n > B - \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2} = B - \varepsilon < b_n.$$

(b) Předpokládejme, že $A < B$. Potom podle tvrzení (a) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < b_n$. Položme $m = \max\{n_0, n_1\}$. Pak $a_m < b_m \leq a_m$, což je spor. Tedy $A \geq B$. □

Poznámka. Z toho, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n > b_n$, neplyne $A > B$. Příkladem jsou posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ definované předpisy $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.11 (o dvou strážnících)**.** *Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:*

(a) *existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq c_n \leq b_n$,*

(b) *existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = A$.*

Potom $\lim c_n = A$.

Důkaz. Označme $\lim a_n = A$. Nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. K němu podle předpokladu (b) existují $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, platí

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, platí

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon.$$

Položme $n_1 = \max\{n_0, n_A, n_B\}$. Potom odtud a z předpokladu (a) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

a tedy $|c_n - A| < \varepsilon$. □

Příklad. Dokažte, že pro každé $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, platí $\lim \sqrt[n]{A} = 1$.

2.2. **Nevlastní limita posloupnosti.**

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $\{a_n\}$ má **limitu rovnou** ∞, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n > K.$$

Řekneme, že $\{a_n\}$ má **limitu rovnou** $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n < K.$$

Má-li posloupnost limitu rovnou ∞, nebo $-\infty$, říkáme, že má **nevlastní limitu**. Jestliže má posloupnost limitu rovnou ∞, pak říkáme, že **diverguje** k ∞. Jestliže má posloupnost limitu rovnou $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje** k $-\infty$.

Příklad. Dokažte, že $\{\sqrt[n]{n!}\}$ má limitu rovnou ∞.

Definice. Rozšířenou reálnou osou nazýváme množinu $\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a značíme ji $\mathbb{R}^*$. Na množinu $\mathbb{R}^*$ rozšíříme aritmetické operace a relaci uspořádání definované na $\mathbb{R}$ následujícím způsobem.

Operace sčítání:

- $\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \colon -\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$,
- $\forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \colon \infty + a = a + \infty = \infty$,
- $-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty$.

Operace násobení:

- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$,
- $\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$,
- $\forall a \in \{-\infty\} \cup (-\infty, 0) \colon a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$,
- $(\infty)^{-1} = 0, (-\infty)^{-1} = 0$.

Relace uspořádání:

- $\forall a \in \mathbb{R} \colon -\infty < a, a < \infty$,
- $-\infty < \infty$.

Absolutní hodnota je na množině $\mathbb{R}^*$ definována předpisem $|x| = \max\{x, -x\}$, a tedy $|\infty| = \infty$, $|-\infty| = \infty$.

Poznámka. Následující výrazy nejsou definovány:

$$\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0, \quad \frac{\text{cokoli}}{0}.$$

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ a $G \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že platí následující podmínky:

(a) $\forall a \in A\colon a \le G$,

(b) $\forall G' \in \mathbb{R}^*, G' < G\ \exists a \in A\colon G' < a$.

Pak G nazýváme **supremem** množiny A. Obdobně definujeme **infimum** množiny A.

Poznámka. Pro neprázdnou a shora omezenou podmnožinu reálných čísel se pojem suprema shoduje s pojmem zavedeným dříve. Supremum shora neomezené množiny je rovno ∞ a supremum prázdné množiny je rovno $-\infty$. Infimum zdola neomezené množiny je rovno $-\infty$ a infimum prázdné množiny je rovno ∞. Supremum a infimum jsou určena jednoznačně a budeme je značit obvyklým způsobem.

Věta 2.12 (jednoznačnost limity posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A, B \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že $\{a_n\}$ má limitu rovnou A a zároveň $\{a_n\}$ má limitu rovnou B. Potom $A = B$.*

Důkaz. Díky Větě 2.1 víme, že nejvýše jedno reálné číslo může být limitou posloupnosti $\{a_n\}$. Zbývá dokázat, že nemůže nastat žádný z případů:

- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞,
- posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu $-\infty$,
- posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞ a současně $-\infty$.

Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní a současně má limitu ∞. Podle Věty 2.6 je $\{a_n\}$ omezená, a tím spíš je omezená shora. Tudíž existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \le K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože ale současně má posloupnost $\{a_n\}$ limitu ∞, existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, je $a_n > K$, což je spor.

Ve zbývajících dvou případech lze postupovat obdobně. $\square$

Značení. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ nevlastní limitu, označujeme hodnotu této limity opět symbolem $\lim a_n$. Píšeme tedy $\lim a_n = \infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$.

Poznámka. Pro každou posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ nastává právě jedna z následujících možností:

$$\lim a_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \text{nevlastní, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty, \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. Potom **okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru

$$B(c,\varepsilon) = \begin{cases} (c-\varepsilon, c+\varepsilon), & \text{jestliže } c \in \mathbb{R}, \\ (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}), & \text{jestliže } c = -\infty, \\ (\frac{1}{\varepsilon}, \infty), & \text{jestliže } c = \infty, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

konec 10. přednášky (3.11.2022)

Lemma (o disjunktních okolích)**.** *Nechť $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^*$, $A \neq \tilde{A}$. Potom existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, takové, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\tilde{A} \in \mathbb{R}$. Je-li také $A \in \mathbb{R}$, pak položíme $\varepsilon = \frac{|\tilde{A}-A|}{2}$. Potom zřejmě platí $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = \infty$ nebo $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět dostaneme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Nyní předpokládejme, že $\tilde{A} = \infty$. Je-li $A \in \mathbb{R}$, položíme $\varepsilon = \frac{1}{|A|+1}$. Odtud opět plyne, že $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$. Je-li $A = -\infty$, zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, libovolně a opět obdržíme $A \notin B(\tilde{A}, \varepsilon)$.

Případ $\tilde{A} = -\infty$ je obdobný případu $\tilde{A} = \infty$. $\square$

Věta 2.13 (limita a okolí)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel a* $A \in \mathbb{R}^*$*. Pak* $\lim a_n = A$ *právě tehdy, když platí*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \in B(A, \varepsilon). \tag{5}$$

Důkaz. Nechť $A \in \mathbb{R}$. Pak je výrok $a_n \in B(A, \varepsilon)$ shodný s výrokem $|a_n - A| < \varepsilon$, a tedy podle definice limity je formule (5) shodná s výrokem $\lim a_n = A$.

Nechť $A = \infty$.

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Položme $K = \frac{1}{\varepsilon}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$. To podle definice okolí znamená, že $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$, a tedy platí (5).

$\Leftarrow$ Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{K} & \text{jestliže } K > 0, \\ 1 & \text{jestliže } K \leq 0. \end{cases}$$

K tomuto ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \in B(\infty, \varepsilon)$. Potom $a_n > \frac{1}{\varepsilon} \geq K$, a tedy $a_n > K$. Odtud plyne $\lim a_n = A$.

Jestliže $A = -\infty$, lze tvrzení dokázat obdobně. $\square$

Poznámka. Věty o limitě vybrané posloupnosti, o limitě a absolutní hodnotě, o limitě a uspořádání a o dvou strážnících platí v nezměněné podobě i tehdy, připustíme-li nevlastní limity.

Věta 2.14 (nevlastní limita posloupnosti a jednostranná omezenost)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *je posloupnost reálných čísel. Jestliže* $\lim a_n = \infty$*, potom je* $\{a_n\}$ *zdola omezená. Jestliže* $\lim a_n = -\infty$*, potom je* $\{a_n\}$ *shora omezená.*

Důkaz. Dle definice nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq 1$. Množina $\{a_n; n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy omezená. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je některá její dolní závora. Potom

$$a_n \geq \begin{cases} M, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, 1 \leq n < n_0, \\ 1, & \text{jestliže } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0. \end{cases}$$

Položme $K = \min\{M, 1\}$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tedy máme $a_n \geq K$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je zdola omezená. $\square$

Věta 2.15 (o andělovi)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel splňující:*

(a) *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0$*, platí* $a_n \leq c_n$*,*
(b) $\lim a_n = \infty$.

Potom $\lim c_n = \infty$.

Důkaz. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí $a_n > K$. Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$, pak platí $c_n \geq a_n$, a tedy $c_n > K$. Odtud plyne, že $\lim c_n = \infty$. $\square$

Věta 2.16 (o ďáblovi)**.** *Nechť* $\{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel splňující:*

(a) *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0$*, platí* $c_n \leq b_n$*,*
(b) $\lim b_n = -\infty$.

Potom $\lim c_n = -\infty$.

Důkaz. Tvrzení lze dokázat obdobně jako tvrzení Věty 2.15. $\square$

Věta 2.17 (změna konečně mnoha členů posloupnosti)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim a_n = A$*. Nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0$*, platí* $a_n = b_n$*. Potom* $\lim b_n = A$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \colon a_n \in B(A, \varepsilon).$$

Položme $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$, platí $b_n = a_n$, a tedy $b_n \in B(A, \varepsilon)$. Odtud vyplývá, že $\lim b_n = A$. $\square$

Poznámka. Z Věty 2.17 plyne, že změníme-li u dané posloupnosti konečně mnoho členů, pak se konvergenční vlastnosti posloupnosti nezmění.

Věta 2.18 (aritmetika limit)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $A, B \in \mathbb{R}^*$, $\lim a_n = A$ *a* $\lim b_n = B$*. Potom platí:*

(a) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *jestliže je výraz na pravé straně definován,*
(b) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *jestliže je výraz na pravé straně definován,*
(c) $\lim a_n/b_n = A/B$, *jestliže pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $b_n \neq 0$ *a výraz na pravé straně definován.*

Důkaz. Tvrzení lze dokázat obdobně jako tvrzení Věty 2.8. Uvedeme pouze důkaz tvrzení (b) v případě, kdy $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$, a $B = -\infty$.

Chceme dokázat, že

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{pokud } A < 0, \\ -\infty, & \text{pokud } A > 0. \end{cases}$$

Nechť nejprve $A < 0$ a $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = -\frac{A}{2}$. K němu nalezneme $n_A \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, platí $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, tedy speciálně $a_n < \frac{A}{2}$. Dále nalezneme $n_B \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$, platí $b_n < \min\{0, \frac{2K}{A}\}$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n \cdot b_n > \frac{A}{2} \cdot \frac{2K}{A} = K,$$

takže $\lim (a_n \cdot b_n) = \infty$. V případě $A > 0$ lze tvrzení dokázat obdobně. □

Poznámka. Předpoklad, že výrazy na pravých stranách jsou definovány, nelze z věty o aritmetice limit vynechat. Například pro posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ platí $\lim a_n = 0$, ale $\lim \frac{1}{a_n} = \lim (-1)^n n$ neexistuje ani nevlastní. Podobně, nechť $c \in \mathbb{R}$, $\{a_n\} = \{n\}$ a $\{b_n\} = \{-n + c\}$. Pak

$$\lim a_n = \infty, \quad \lim b_n = -\infty \quad \text{a} \quad \lim (a_n + b_n) = c.$$

Věta 2.19 (nevlastní limita podílu)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel, přičemž pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $b_n \neq 0$*. Nechť* $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim a_n = A$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *platí* $b_n > 0$*. Potom* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Důkaz. Posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ je dobře definována, neboť $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$ a položme $L = \max\{1, K\}$.

Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. K němu nalezneme $n_A \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_A$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Speciálně tedy platí

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_A \colon a_n > A - \varepsilon = \frac{A}{2}.$$

Dále nalezneme $n_B \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_B$ platí $b_n < \frac{A}{2L}$. Položme

$$n_1 = \max\{n_0, n_A, n_B\}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{A}{2} \cdot \frac{2L}{A} = L \geq K,$$

a tedy $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

Nyní předpokládejme, že $A = \infty$. Potom nalezneme $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_A \colon a_n > 1,$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_B \colon b_n < \frac{1}{L}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_0, n_A, n_B\}$, platí

$$\frac{a_n}{b_n} > L \geq K,$$

a tedy $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$. □

konec 11. přednášky (8.11.2022)

2.3. **Hlubší věty o limitě posloupnosti.**

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\{a_n\}$ je neklesající právě tehdy, když platí

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m < n \colon a_m \leq a_n.$$

Implikaci $\Rightarrow$ lze dokázat snadno matematickou indukcí, opačná implikace je zřejmá. Obdobná tvrzení platí i pro ostatní typy monotonie.

Věta 2.20 (limita monotónní posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel. Potom existuje $\lim a_n$. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a navíc není shora omezená. Potom $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \infty$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > K$. Protože $\{a_n\}$ je neklesající, platí díky poznámce pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $a_n \geq a_{n_0} > K$. Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \infty$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je neklesající a shora omezená, tedy $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a označme $A = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Z definice suprema nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Protože však $\{a_n\}$ je neklesající, je $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Nerovnost $a_n < A + \varepsilon$ platí dokonce pro všechna $n \in \mathbb{N}$, neboť A je horní závorou množiny všech členů posloupnosti $\{a_n\}$. Ke zvolenému ε jsme tedy nalezli $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

To podle definice limity znamená, že $\lim a_n = A$.

Nyní předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Pak lze tvrzení dokázat obdobně, můžeme ale také postupovat následujícím způsobem. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\{-a_n\}$ je neklesající. Podle již dokázané části věty je tedy $\lim(-a_n) = \sup\{-a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Podle Věty 1.6 odtud plyne, že $\lim(-a_n) = -\inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Konečně podle Věty 2.18(b) dostáváme

$$\lim a_n = \lim(-1)(-a_n) = -\lim(-a_n) = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

□

Důsledek. (a) *Nechť $\{a_n\}$ je neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel. Potom je $\{a_n\}$ konvergentní.*

(b) *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí zdola omezená posloupnost reálných čísel. Potom je $\{a_n\}$ konvergentní.*

Důkaz. (a) Z Věty 2.20 vyplývá, že $\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Z omezenosti posloupnosti shora dále plyne, že $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy konvergentní. Tvrzení (b) lze dokázat obdobně. □

Poznámka. Věta 2.20 umožňuje ověřit existenci limity posloupnosti, aniž by bylo nutné ji explicitně vypočítat. V některých případech je ale informace o existenci limity nezbytnou součástí jejího výpočtu. Tento jev ilustruje následující příklad.

Příklad. Nechť $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$. Spočtěte limitu posloupnosti $\{a_n\}$, která je zadána následujícím způsobem:

$$a_1 = \sqrt{c}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že posloupnost $\{a_n\}$ je dobře definovaná. První člen je definován explicitně a je nezáporný. Předpokládáme-li, že a_n je definováno a je nezáporné, pak je definováno i a_{n+1} a je nezáporné. Podle principu matematické indukce je pak posloupnost $\{a_n\}$ definovaná a její členy jsou nezáporné.

Je-li $c = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = 0$, a tedy $\lim a_n = 0$.

Předpokládejme tedy, že $c > 0$. Nejprve dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je monotónní. Zřejmě platí $a_1 < a_2$. Jestliže pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n-1} < a_n$, pak

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} + c} < \sqrt{a_n + c} = a_{n+1}.$$

Podle principu matematické indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Zřejmě platí $a_1 < \sqrt{c} + 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < \sqrt{c} + 1$. Potom

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{\sqrt{c} + 1 + c} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{(\sqrt{c} + 1)^2} = \sqrt{c} + 1.$$

Z principu matematické indukce tedy plyne, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < \sqrt{c} + 1$, takže $\{a_n\}$ je shora omezená. Ověřili jsme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje předpoklady věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.20). Podle této věty má tedy posloupnost $\{a_n\}$ vlastní limitu. Označme ji symbolem A.

Posledním krokem řešení bude výpočet hodnoty A. Z (6) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1}^2 = a_n + c$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti (Věta 2.7) odvodíme, že také $\lim a_{n+1} = A$, a z věty o aritmetice limit dostaneme vztahy $\lim a_{n+1}^2 = A^2$ a $\lim(a_n + c) = A + c$. Získali jsme kvadratickou rovnici $A^2 = A + c$ pro neznámou hodnotu A, o které zatím víme jen, že existuje. Výpočtem zjistíme, že A je rovno buď $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$ nebo $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$. Hodnota $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$ však nemůže být limitou posloupnosti $\{a_n\}$, protože je to záporné číslo a všechny prvky posloupnosti $\{a_n\}$ jsou nezáporné. To by bylo ve sporu s Větou 2.10(b) (do níž bychom dosadili $B = 0$ a $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$). Odtud vyplývá, že $\lim a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$.

Poznámka. Důležitou součástí řešení předcházejícího příkladu bylo ověření existence limity posloupnosti $\{a_n\}$. Bez tohoto kroku by bylo řešení neúplné. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$ definovanou rekurentně předpisem

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = -a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za předpokladu, že $\lim a_n$ existuje a je rovna prvku $A \in \mathbb{R}^*$, bychom podobně jako v řešení Příkladu 2.3 odvodili, že $A = -A$, a tedy $A = 0$. Limita posloupnosti $\{a_n\}$ ale není rovna 0, neboť $a_n = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jak lze snadno ověřit.

Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí a shora omezená a posloupnost $\{b_n\}$ je klesající a zdola omezená, a tedy jsou obě posloupnosti konvergentní, a že navíc platí $\lim a_n = \lim b_n$.

Řešení. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti plyne odhad

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Algebraickými úpravami odtud odvodíme nerovnost

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > \frac{n+1}{n},$$

a tedy

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2},$$

jinými slovy

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}.$$

Odtud vyplývá, že posloupnost $\{b_n\}$ je klesající.

Nyní dokážeme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom z Bernoulliovy nerovnosti plyne, že

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2} > 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Odtud dostaneme

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Tedy

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Dokázali jsme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1},$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

Z monotonie posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dostaneme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4.$$

Z věty o limitě monotónní posloupnosti (Věta 2.20) tedy plyne, že existují vlastní limity $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.10) platí $A, B \in [2, 4]$. Výraz $\frac{B}{A}$ je tedy definovaný, a navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí $a_n > 0$, takže podle věty o limitě podílu (Věta 2.18(c)) platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Z definice posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ však plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

a tedy $A = B$. Tím je tvrzení dokázáno.

Definice. Označme

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Číslo e nazýváme **Eulerovým číslem**.

Věta 2.21 (Bolzano–Weierstrass). *Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Potom existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která je konvergentní.*

Důkaz. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, a proto existují $m, M \in \mathbb{R}$ taková, že $m \leq a_n \leq M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $\alpha_1 = m$, $\beta_1 = M$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ a $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Je-li množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in [\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}]\}$ nekonečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \alpha_k$ a $\beta_{k+1} = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$. Je-li množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in [\alpha_k, \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}]\}$ konečná, pak položíme $\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$ a $\beta_{k+1} = \beta_k$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq \beta_k$ a $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}] \subset [\alpha_k, \beta_k]$. Navíc $\beta_k - \alpha_k = \frac{M-m}{2^{k-1}}$.

konec 12. přednášky (10.11.2022)

Posloupnost $\{\alpha_k\}$ je neklesající a posloupnost $\{\beta_k\}$ je nerostoucí. Navíc pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_1$, takže posloupnost $\{\alpha_k\}$ je shora omezená. Obdobně lze dokázat, že posloupnost $\{\beta_k\}$ je zdola omezená. Tudíž existují vlastní limity posloupností $\{\alpha_k\}$ a $\{\beta_k\}$. Označme $A = \lim \alpha_k$ a $B = \lim \beta_k$. Protože $A, B \in \mathbb{R}$, je $B - A$ definovaný výraz. Z věty o aritmetice limit plyne, že $\lim(\beta_k - \alpha_k) = B - A$. Jest

$$\lim_{k\to\infty} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{M-m}{2^{k-1}} = 0,$$

takže $A = B$.

Položme $n_1 = 1$ a předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme zvolena přirozená čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ taková, že pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $j \leq k$, platí $a_{n_j} \in [\alpha_j, \beta_j]$. Podle výše uvedené konstrukce je množina $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ nekonečná. Tudíž také množina $\{n \in \mathbb{N}; n > n_k,\ a_n \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]\}$ je nekonečná. Tedy existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$. Dle věty o dvou strážnících tedy platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Protože $A \in \mathbb{R}$, nalezli jsme konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{a_n\}$. □

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže je $\{a_n\}$ shora omezená, definujeme

$$b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost reálných čísel, a tedy existuje $\lim b_n$.

Jestliže je $\{a_n\}$ zdola omezená, definujeme

$$c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N}, k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak je $\{c_n\}$ neklesající posloupnost reálných čísel, a tedy existuje $\lim c_n$.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Položme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže } \{a_n\} \text{ je shora omezená,} \\ \infty, & \text{jestliže } \{a_n\} \text{ není shora omezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme **limes superior** posloupnosti $\{a_n\}$. Obdobně definujeme **limes inferior** posloupnosti $\{a_n\}$ předpisem

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže } \{a_n\} \text{ je zdola omezená,} \\ -\infty, & \text{jestliže } \{a_n\} \text{ není zdola omezená.} \end{cases}$$

Místo $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ často píšeme $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$.

Poznámky. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.

(a) Pojmy $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou dobře definovány.

(b) Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ existují a splňují $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$ a $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

(c) Hodnoty $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ se nemusí rovnat. Například pro posloupnost $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ platí $\limsup a_n = 1$ a $\liminf a_n = -1$. Pro posloupnost $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}$ platí $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = -\infty$.

(d) Je-li $\{a_n\}$ omezená, pak můžeme definovat posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jako výše. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$.

Věta 2.22 (o vztahu limity, limes superior a limes inferior)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim a_n = A$ právě tehdy, když $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme nejprve, že platí $A \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní, a tedy omezená. Můžeme tedy definovat posloupnosti

$$b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, \quad c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak je $\{b_n\}$ nerostoucí a $\{c_n\}$ neklesající a zřejmě platí $c_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > A - \varepsilon$, z definice infima dostáváme nerovnost $c_{n_0} \geq A - \varepsilon$. Podobně lze odvodit nerovnost $b_{n_0} \leq A + \varepsilon$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$A - \varepsilon \leq c_{n_0} \leq c_n \leq b_n \leq b_{n_0} \leq A + \varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání (Věta 2.10(b)) dostáváme

$$A - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq A + \varepsilon,$$

a tedy

$$|\liminf a_n - A| \leq \varepsilon, \quad |\limsup a_n - A| \leq \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně, platí podle lemmatu o libovolně malých veličinách $\limsup a_n = \liminf a_n = A$.

Je-li $A = \infty$, pak $\{a_n\}$ není shora omezená, ale je omezená zdola. Tedy podle definice dostáváme $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = \lim c_n$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n > K$, a tedy také $c_n \geq K$. Odtud plyne $\lim c_n = \infty$, a tudíž $\liminf a_n = \infty$.

Je-li $A = -\infty$, postupujeme obdobně jako v předcházejícím případě.

$\Leftarrow$ Nejprve opět předpokládejme, že platí $A \in \mathbb{R}$. Potom je podle definice limes superior a limes inferior posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Nechť posloupnosti $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou definovány stejně jako v předchozí části důkazu. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n \leq b_n$. Navíc z předpokladu vyplývá, že $\lim c_n = \lim b_n = A$. Pomocí věty o dvou strážnících tedy dostáváme $\lim a_n = A$.

Nechť $A = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená, takže je možné definovat posloupnost $\{c_n\}$ jako výše. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $c_n \leq a_n$. Z definice limes inferior navíc víme, že $\liminf a_n = \lim c_n$, a tedy podle předpokladu platí $\lim c_n = \infty$. Podle Věty 2.15 tedy platí $\lim a_n = \infty$.

Jestliže $A = -\infty$, pak lze tvrzení dokázat obdobně jako v případě, kdy $A = \infty$, přičemž místo Věty 2.15 je třeba použít Větu 2.16. $\square$

konec 13. přednášky (15.11.2022)

Poznámky. Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel.

(a) Platí

$$\begin{aligned}\liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf(a_n + b_n) \leq \liminf a_n + \limsup b_n \\ &\leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.\end{aligned}$$

Posloupnosti $a_n = \{0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots\}$ a $b_n = \{2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots\}$ ukazují, že všechny čtyři nerovnosti mohou být ostré.

(b) Předpokládejme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \text{ a } \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je **hromadná hodnota** posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 2.23 (limes superior, limes inferior a hromadné hodnoty). *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}$ a pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$.*

Důkaz. Označme $A = \limsup a_n$. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}$. Pak $\{a_n\}$ je shora omezená. Položme $b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak je posloupnost $\{b_n\}$ nerostoucí a $\lim b_n = A$. Tudíž existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $b_{m_1} < A + 1$. Z definice b_{m_1} vyplývá, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq m_1$, splňující $a_{n_1} > b_{m_1} - 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme určena přirozená čísla $m_1, \dots, m_k$ a $n_1, \dots, n_k$. Protože $\lim b_n = A$, existuje $m_{k+1} \in \mathbb{N}$ takové, že $m_{k+1} > n_k$ a $b_{m_{k+1}} < A + \frac{1}{k+1}$. Z definice $b_{m_{k+1}}$ vyplývá, že existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, takové, že $n_{k+1} \geq m_{k+1}$ a $a_{n_{k+1}} > b_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1}$. Takto postupně definujeme všechny členy posloupností $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Z vlastností posloupnosti $\{b_n\}$ plyne, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$b_{m_k} \geq b_{n_k} \geq a_{n_k}.$$

Tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ pak platí

$$|a_{n_k} - A| \leq |a_{n_k} - b_{m_k}| + |b_{m_k} - A| = b_{m_k} - a_{n_k} + b_{m_k} - A < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k},$$

a tedy $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Odtud vyplývá, že $A \in H(\{a_n\})$.

Předpokládejme nyní, že $A = \infty$. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n_1} > 1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ jsme již určili přirozená čísla $n_1, \dots, n_k$. Množina $\{a_j; j > n_k\}$ je shora neomezená. Můžeme tedy nalézt $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$, takové, že $a_{n_{k+1}} > k + 1$. Podle Věty 2.15 platí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, takže $\infty \in H(\{a_n\})$.

Konečně předpokládejme, že $A = -\infty$. Platí $\liminf a_n \leq -\infty$, tedy $\liminf a_n = -\infty$. To podle Věty 2.22 znamená, že $\lim a_n = -\infty$. Odtud bezprostředně vyplývá, že $A \in H(\{a_n\})$, neboť posloupnost $\{a_n\}$ je svou vlastní podposloupností. Dokázali jsme, že $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$. Obdobně lze dokázat, že $\liminf a_n \in H(\{a_n\})$.

Zbývá dokázat, že pro každou hromadnou hodnotu A posloupnosti $\{a_n\}$ platí $\liminf a_n \leq A \leq \limsup a_n$. Předpokládejme, že $y \in H(\{a_n\})$. Je-li $\limsup a_n = \infty$, pak zřejmě platí $y \leq \limsup a_n$. Je-li $\limsup a_n < \infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$. Nechť $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel splňující $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = y$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a_{n_k} \leq b_{n_k}$, a tedy dle věty o limitě a uspořádání platí $y \leq \limsup a_n$. Obdobně lze dokázat, že $y \geq \liminf a_n$. □

Poznámka. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Potom
(a) $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$,
(b) $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$ (ve smyslu množiny $\mathbb{R}^*$),
(c) jestliže $\lim a_n = A$ pro nějaké $A \in \mathbb{R}^*$, pak $H(\{a_n\}) = \{A\}$.

Definice. Řekneme, že posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ splňuje **Bolzanovu–Cauchyovu podmínku**, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Poznámka. Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku právě tehdy, když

$$\exists K \in \mathbb{R}, K > 0\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| < K\varepsilon.$$

Věta 2.24 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro posloupnosti)**.** *Posloupnost reálných čísel $\{a_n\}$ je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme symbolem A vlastní limitu posloupnosti $\{a_n\}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Z definice limity k tomuto ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ tedy díky poznámce splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$, platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Potom pro $m = n_0$ dostáváme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, nerovnosti $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon$. Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N},\ j \geq n_0\}$ je tedy omezená. Množina $\{a_j; j \in \mathbb{N},\ j < n_0\}$ je konečná, a proto je také omezená. Odtud plyne, že posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, takže můžeme definovat posloupnosti

$$b_n = \sup\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, \quad c_n = \inf\{a_k; k \in \mathbb{N},\ k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z definice $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ vyplývají pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, odhady

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq a_{n_0} + \varepsilon,$$

a tedy také

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Odtud dostáváme $\liminf a_n \in \mathbb{R}$, $\limsup a_n \in \mathbb{R}$ a

$$0 \leq \limsup a_n - \liminf a_n < 2\varepsilon,$$

a tedy, protože ε bylo zvoleno libovolně, díky lemmatu o libovolně malých veličinách,

$$\liminf a_n = \limsup a_n \in \mathbb{R}.$$

Označme $A = \liminf a_n$. Pak podle Věty 2.22 platí $\lim a_n = A$. Protože $A \in \mathbb{R}$, má posloupnost $\{a_n\}$ vlastní limitu. □

konec 14. přednášky (22.11.2022)

Příklad. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$.

Příklad. Dokažte, že existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Věta 2.25 (Borelova věta). *Nechť I je uzavřený interval a $\mathcal{S}$ je množina otevřených intervalů taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{S}_0 \subset S$ taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.*

Důkaz. Nechť $I = [a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Označme symbolem M množinu všech $x \in [a, b]$, pro které existuje konečná množina $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{S}$ taková, že $[a, x] \subset \bigcup \mathcal{S}_x$. Dle předpokladu existuje otevřený interval $I_a \in \mathcal{S}$ splňující $a \in I_a$. Položme $\mathcal{S}_a = \{I_a\}$. Potom je $\mathcal{S}_a$ konečná množina a platí $[a, a] \subset \bigcup \mathcal{S}_a$. Tedy $a \in M$. Označme $y = \sup M$. Z vlastností suprema plyne, že $y \in [a, b]$, protože $a \in M$ a b je horní závorou množiny M.

Dokážeme, že $y \in M$. Díky předpokladu nalezneme otevřený interval $I_y \in \mathcal{S}$ splňující $y \in I_y$. Tedy existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $(y - \delta, y] \subset I_y$. Díky vlastnostem suprema nalezneme $z > y - \delta$ splňující $z \in M$. Potom $y - \delta < z \leq y$. Tedy existuje konečná množina $\mathcal{S}_z \subset \mathcal{S}$ splňující $[a, z] \subset \bigcup \mathcal{S}_z$. Položme $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}_z \cup \{I_y\}$. Potom je $\mathcal{S}_y \subset \mathcal{S}$ konečná množina a platí

$$[a, y] = [a, z] \cup (z, y] \subset \bigcup \mathcal{S}_z \cup I_y = \bigcup \mathcal{S}_y.$$

Odtud vyplývá, že $y \in M$.

Zbývá dokázat, že $y = b$. Předpokládejme, že $y < b$. Nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $[y, y + \varepsilon) \subset I_y$. Zvolme $t \in (y, y + \varepsilon)$. Potom

$$[a, t] = [a, y] \cup (y, t] \subset [a, y] \cup (y, y + \varepsilon) \subset \bigcup \mathcal{S}_y \cup I_y = \bigcup \mathcal{S}_y.$$

Tedy $t \in M$. Avšak $t > y$, což je spor s tím, že $y = \sup M$. Tudíž $y = b$, tedy $b \in M$. Odtud vyplývá tvrzení věty. □

3. Limita a spojitost funkce

3.1. Limita a spojitost funkce v bodě.

Definice. Reálnou funkcí jedné reálné proměnné f (dále jen **funkcí**) rozumíme zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tj. $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$. **Prstencovým okolím bodu** c nazýváme každou množinu tvaru

$$P(c, \varepsilon) = B(c, \varepsilon) \setminus \{c\},$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Definice. Řekneme, že prvek $A \in \mathbb{R}^*$ je **limitou** funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in P(c, \delta):\ f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 3.1 (jednoznačnost limity funkce). *Nechť f je funkce a $c, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^*$. Nechť A_1 je limitou f v c a A_2 je limitou f v c. Potom $A_1 = A_2$.*

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že $A_1 \neq A_2$. Díky lemmatu o disjunktních okolích nalezneme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(A_1, \varepsilon) \cap B(A_2, \varepsilon) = \emptyset$. K němu podle definice limity nalezneme $\delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_1 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_1)\colon f(x) \in B(A_1, \varepsilon),$$

a $\delta_2 \in \mathbb{R}$, $\delta_2 > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta_2)\colon f(x) \in B(A_2, \varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Zvolme $x \in P(c, \delta)$. Potom

$$f(x) \in B(A_1, \varepsilon_1) \cap B(A_2, \varepsilon_2),$$

což je spor. □

Značení. Jestliže je $A \in \mathbb{R}^*$ limitou funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$, píšeme

$$\lim_{x \to c} f(x) = A.$$

Poznámka. Jestliže existuje $\lim_{x\to c} f(x)$, pak funkce f musí být definována alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu c. Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak f může a nemusí být definována v c. Hodnota $f(c)$ (pokud existuje) nemá na hodnotu limity vliv.

Definice. Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. **Pravým okolím bodu** c rozumíme každou množinu tvaru

$$B_+(c,\varepsilon) = \begin{cases} [c, c+\varepsilon) & \text{jestliže } c \in \mathbb{R}; \\ B(c,\varepsilon) & \text{jestliže } c = -\infty, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a **pravým prstencovým okolím bodu** c rozumíme libovolnou množinu tvaru

$$P_+(c,\varepsilon) = B_+(c,\varepsilon) \setminus \{c\},$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. **Levým okolím** bodu c rozumíme každou množinu tvaru

$$B_-(c,\varepsilon) = \begin{cases} (c-\varepsilon, c] & \text{jestliže } c \in \mathbb{R}; \\ B(c,\varepsilon) & \text{jestliže } c = \infty, \end{cases}$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, a **levým prstencovým okolím bodu** c nazýváme libovolnou množinu tvaru

$$P_-(c,\varepsilon) = B_-(c,\varepsilon) \setminus \{c\},$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Definice. (a) Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zprava** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \,\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \,\forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

(b) Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě c **limitu zleva** rovnou A, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \,\exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0 \,\forall x \in P_-(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

konec 15. přednášky (24.11.2022)

Poznámka. Je-li $c \in \mathbb{R}^*$ a f je funkce, potom f má v c nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva.

Značení. Má-li funkce f v bodě $c \in \mathbb{R}^*$ limitu zprava nebo zleva rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, pak píšeme po řadě

$$\lim_{x\to c_+} f(x) = A \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to c_-} f(x) = A.$$

Věta 3.2 (limita a jednostranné limity). *Nechť f je funkce, $c \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$ právě tehdy, když $\lim_{x\to c_+} f(x) = \lim_{x\to c_-} f(x) = A$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Potom platí

$$\forall x \in P_+(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon)$$

a

$$\forall x \in P_-(c,\delta)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon),$$

neboť $P_+(c,\delta) \cup P_-(c,\delta) = P(c,\delta)$. Tedy $\lim_{x\to c_+} f(x) = A$ a $\lim_{x\to c_-} f(x) = A$.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podle definice limity zprava nalezneme $\delta_+ \in \mathbb{R}$, $\delta_+ > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_+(c,\delta_+)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Dále podle definice limity zleva nalezneme $\delta_- \in \mathbb{R}$, $\delta_- > 0$, takové, že platí

$$\forall x \in P_-(c,\delta_-)\colon f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Položme $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$. Potom $P(c,\delta) \subset P(c,\delta_+) \cup P(c,\delta_-)$, takže pro každé $x \in P(c,\delta)$ máme $f(x) \in B(A,\varepsilon)$. Dokázali jsme tak, že platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$. $\square$

Definice. Nechť f je funkce a $c \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je **spojitá** v bodě c, jestliže $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Řekneme, že funkce f je v bodě c **spojitá zprava** (**zleva**), jestliže $\lim_{x\to c_+} f(x) = f(c)$ ($\lim_{x\to c_-} f(x) = f(c)$).

Definice. (a) Definujme funkci $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x > 0, \\ 0, & \text{jestliže } x = 0, \\ -1, & \text{jestliže } x < 0. \end{cases}$$

(b) Funkci D, definovanou předpisem

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nazýváme **Dirichletovou funkcí**.

(c) Funkci R, definovanou předpisem

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ nesoudělná}, \\ 0 & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{jestliže } x = 0, \end{cases}$$

nazýváme **Riemannovou funkcí**.

Poznámky. (a) Platí $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign}(x) = 1$, $\lim_{x\to 0_-} \operatorname{sign}(x) = -1$ a $\lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x)$ neexistuje. Funkce sign je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Dirichletova funkce nemá limitu v žádném bodě, a tedy není v žádném bodě spojitá.

(c) Riemannova funkce splňuje $\lim_{x\to c} R(x) = 0$ pro každé $c \in \mathbb{R}$, a tedy je spojitá v každém bodě $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(d) Položme $f(x) = x \cdot D(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom f je spojitá pouze v bodě 0.

3.2. Věty o limitách.

Věta 3.3 (limita složené funkce). *Nechť $c, D, A \in \mathbb{R}^*$, f, g jsou funkce,* $\lim_{x\to c} g(x) = D$ *a* $\lim_{y\to D} f(y) = A$. *Předpokládejme, že je splněna alespoň jedna z podmínek*

(P) *existuje $\eta \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(c, \eta)$ platí $g(x) \neq D$,*

(S) *f je spojitá v D.*

Potom

$$\lim_{x\to c} (f \circ g)(x) = A.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\psi \in \mathbb{R}$, $\psi > 0$, takové, že

$$\forall y \in P(D, \psi)\colon f(y) \in B(A, \varepsilon). \tag{7}$$

Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon g(x) \in B(D, \psi). \tag{8}$$

Jestliže platí (P), položme $\delta' = \min\{\delta, \eta\}$. Potom pro každé $x \in P(c, \delta')$ platí $g(x) \in B(D, \psi) \setminus \{D\}$, neboli

$$\forall x \in P(c, \delta')\colon g(x) \in P(D, \psi).$$

Odtud a z (7) dostaneme

$$\forall x \in P(c, \delta')\colon f(g(x)) \in B(A, \varepsilon),$$

tedy $\lim_{x\to c} (f \circ g)(x) = A$. Jestliže platí (S), potom $f(D) = A$, a tedy

$$\forall y \in B(D, \psi)\colon f(y) \in B(A, \varepsilon).$$

Odtud a z (8) dostaneme

$$\forall x \in P(c, \delta)\colon f(g(x)) \in B(A, \varepsilon),$$

tedy $\lim_{x\to c} (f \circ g)(x) = A$. $\square$

Poznámky. (a) Není-li splněna podmínka (P) ani (S), pak závěr věty nemusí platit. Položme $f = |\mathrm{sign}|$, $g = 0$ a $c = 0$. Potom $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, takže $D = 0$. Platí $\lim_{y\to D} f(y) = 1$, takže $A = 1$. Avšak $\lim_{x\to c}(f \circ g)(x) = 0 \neq A$.

(b) Je-li bod D nevlastní, pak je podmínka (P) automaticky splněna.

Důsledek (spojitost složené funkce)**.** *Jestliže funkce g je spojitá v bodě $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je spojitá v bodě $g(c)$, pak je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě c.*

Věta 3.4 (Heine)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na prstencovém okolí bodu c. Potom $\lim_{x\to c} f(x) = A$ právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ splňující*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \quad a \quad \forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq c \tag{9}$$

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme posloupnost $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$ splňující (9). Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezeneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in B(c, \delta).$$

Protože $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, plyne odtud

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon x_n \in P(c, \delta).$$

Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon f(x_n) \in B(A, \varepsilon),$$

jinými slovy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

$\Leftarrow$ Dokážeme tvrzení nepřímo. Nechť neplatí $\lim_{x\to c} f(x) = A$, tedy

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \forall \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \exists x \in P(c, \delta) \colon f(x) \notin B(A, \varepsilon).$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta = \frac{1}{n}$. Nalezneme $x_n \in P(c, \frac{1}{n})$ takové, že $f(x_n) \notin B(A, \varepsilon)$. Pro takto zkonstruovanou posloupnost $\{x_n\}$ platí $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ a $f(x_n) \notin B(A, \varepsilon)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\{x_n\}$ splňuje podmínky (9), ale $\lim f(x_n) \neq A$. $\square$

Důsledek (Heineova věta pro spojitost)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce f je definována na nějakém okolí bodu c. Potom je f spojitá v c právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset D(f)$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.*

Věta 3.5 (aritmetika limit funkcí)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $B \in \mathbb{R}^*$. Nechť f a g jsou funkce a platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$ a $\lim_{x\to c} g(x) = B$. Potom*

(a) $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = A + B$, *je-li výraz na pravé straně definován,*
(b) $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = AB$, *je-li výraz na pravé straně definován,*
(c) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, *je-li výraz na pravé straně definován.*

Důsledek (spojitost a aritmetické operace)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a nechť jsou funkce f a g spojité v bodě c. Potom jsou funkce $f + g$ a fg spojité v bodě c. Je-li navíc $g(c) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě c.*

konec 16. přednášky (29.11.2022)

Věta 3.6 (o srovnání)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$.*

(a) *Nechť*

$$\lim_{x\to c} f(x) > \lim_{x\to c} g(x).$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) > g(x).$$

(b) *Nechť existuje* $\delta > 0$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \leq g(x).$$

Nechť existuje $\lim_{x \to c} f(x)$ *a* $\lim_{x \to c} g(x)$. *Potom platí*

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

(c) *(o dvou strážnících) Nechť existuje* $\eta > 0$ *takové, že platí*

$$\forall x \in P(c, \eta) \colon f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Dále předpokládejme, že

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = A \in \mathbb{R}^*.$$

Potom existuje rovněž $\lim_{x \to c} h(x)$ *a rovná se* A.

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **shora omezená na** M, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in M \colon f(x) \leq K$,
- **zdola omezená na** M, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in M \colon f(x) \geq K$,
- **omezená na** M, jestliže $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in M \colon |f(x)| \leq K$.

Věta 3.7 (vlastní limita funkce a omezenost)**.** *Nechť* $c \in \mathbb{R}^*$, f *je funkce a existuje vlastní* $\lim_{x \to c} f(x)$. *Potom existuje* $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* f *je na* $P(c, \delta)$ *omezená.*

Důkaz. Označme $A = \lim_{x \to c} f(x)$. Podle předpokladu je $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon f(x) \in B(A, 1).$$

Potom

$$\forall x \in P(c, \delta) \colon |f(x)| \leq |A| + 1,$$

a tedy je f na $P(c, \delta)$ omezená. □

Věta 3.8 (nevlastní limita podílu pro funkce)**.** *Nechť* $A, c \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, f, g *jsou funkce,* $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to c} f(x) = A$. *Jestliže existuje* $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, *takové, že* $\forall x \in P(c, \delta) \colon g(x) > 0$, *potom* $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Definice. Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **neklesající na** M, jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) \leq f(y)$,
- **rostoucí na** M jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) < f(y)$,
- **nerostoucí na** M jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) \geq f(y)$,
- **klesající na** M, jestliže pro každá $x, y \in M$, $x < y$, platí $f(x) > f(y)$,
- **monotónní na** M, jestliže je neklesající na M nebo nerostoucí na M,
- **ryze monotónní na** M, jestliže je rostoucí na M, nebo klesající na M.

Věta 3.9 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. *Nechť funkce* f *je monotónní na* (a, b). *Potom existují* $\lim_{x \to a_+} f(x)$ *a* $\lim_{x \to b_-} f(x)$, *přičemž platí:*

- *je-li* f *na* (a, b) *neklesající, pak*

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \inf\{f(x); x \in (a, b)\}, \qquad \lim_{x \to b_-} f(x) = \sup\{f(x); x \in (a, b)\},$$

- *je-li* f *na* (a, b) *nerostoucí, pak*

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = \sup\{f(x); x \in (a, b)\}, \qquad \lim_{x \to b_-} f(x) = \inf\{f(x); x \in (a, b)\}.$$

Důkaz. Dokážeme, že $\lim_{x \to a_+} f(x) = \inf f((a, b))$ platí pro neklesající zdola omezenou funkci f a pro a $a \in \mathbb{R}$. V ostatních případech lze tvrzení dokázat obdobně. Označme $m = \inf f((a, b))$. Potom $m \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Díky vlastnostem infima nalezneme $y \in f((a, b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Nalezneme $x' \in (a, b)$ splňující $y = f(x')$. Protože f je neklesající, platí

$$\forall x \in (a, x') \colon f(x) \leq f(x') < m + \varepsilon.$$

Protože m je dolní závora množiny $f((a,b))$, platí

$$\forall x \in (a,b)\colon m \leq f(x),$$

a tedy

$$\forall x \in (a,x')\colon m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Položme $\delta = x' - a$. Potom

$$\forall x \in P_+(a,\delta)\colon f(x) \in B(m,\varepsilon),$$

tedy $\lim_{x \to a_+} f(x) = m$. □

3.3. **Elementární funkce.**

Věta 3.10 (zavedení exponenciální funkce)**.** *Existuje právě jedna funkce* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující podmínky*

(E1) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$,
(E2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$.

Poznámka. Platí

- $\exp(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$,
- $\exp$ je spojitá na $\mathbb{R}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \exp x > 0$,
- $\exp$ je rostoucí na $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} \exp x = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$,
- $\mathcal{H}(\exp) = (0,\infty)$,
- $\exp(1) = e$.

Definice.

(a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inversní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.
(b) Je-li $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}, \quad x \in (0,\infty).$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu** a.
(c) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log(a))$.
(d) Nechť $a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.
(e) Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, definujeme jako inversní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, n**-tou odmocninu** $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $x \in [0,\infty)$, definujeme jako inversní funkci k funkci $x \mapsto x^n$, $x \in [0,\infty)$.

Poznámka. Platí

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ (\exp(y))^x = \exp(x \log(\exp(y)) = \exp(xy),$$

speciálně (pro $y = 1$)

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ e^x = (\exp(1))^x = \exp(x).$$

Místo $\exp x$ můžeme tedy psát e^x.

Poznámka (vlastnosti logaritmu)**.** Platí

- $D(\log) = (0,\infty)$,
- $\mathcal{H}(\log) = \mathbb{R}$,
- log je rostoucí na $(0,\infty)$,
- log je spojitá na $(0,\infty)$,
- $\forall x, y \in (0,\infty): \ \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
- $\forall a \in (0,\infty), b \in \mathbb{R}: \ \log a^b = b \log a$,
- $\lim\limits_{x \to 0_+} \log x = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} \log x = \infty$,

- $\log(e) = 1$.

Definice. Řekneme, že funkce f je

- **lichá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = -f(x)$,
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $-x \in \mathcal{D}(f)$ a $f(-x) = f(x)$,
- **periodická** s periodou $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, jestliže pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí $x + a \in \mathcal{D}(f)$, $x - a \in \mathcal{D}(f)$ a $f(x + a) = f(x - a) = f(x)$.

Věta 3.11 (zavedení sinu, kosinu a čísla π). *Existuje právě jedna funkce* $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *právě jedna funkce* $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a právě jedno kladné reálné číslo* π *splňující následující vlastnosti:*

(S1) $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
(S2) $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \forall x, y \in \mathbb{R}:\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
(S3) $\sin$ *je lichá funkce a* $\cos$ *je sudá funkce,*
(S4) $\sin(0) = 0$, $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *a* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$,
(S5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Poznámka. Platí

- $\cos(0) = 1$,
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$,
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x,\ \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin(x + \pi) = -\sin x,\ \cos(x + \pi) = -\cos x$,
- $\sin$ a $\cos$ jsou spojité na $\mathbb{R}$,
- $\sin x = 0$ právě když $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a $\cos x = 0$ právě když $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

konec 17. přednášky (1.12.2022)

Definice. Funkce **tangens** a **kotangens** definujeme předpisy

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\},\\
\operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Poznámka. Funkce tg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá, π-periodická a rostoucí na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Platí $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x = \infty$ a $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}_+} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Funkce cotg je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá, π-periodická a klesající na $(0, \pi)$. Platí $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{cotg} x = \infty$ a $\lim_{x\to \pi_-} \operatorname{cotg} x = -\infty$.

Definice. Cyklometrické funkce arkussinus, **arkuskosinus**, **arkustangens** a **arkuskotangens** definujeme předpisy

$$\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1};\\
\arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1};\\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1};\\
\operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Poznámky. (a) Funkce arcsin je spojitá, lichá a rostoucí na $[-1, 1]$. Platí $\mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(b) Funkce arccos je spojitá a klesající na $[-1, 1]$. Platí $\mathcal{H}(\arccos) = [0, \pi]$.
(c) Funkce arctg je spojitá, lichá a rostoucí na $\mathbb{R}$. Platí $\mathcal{H}(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
(d) Funkce arccotg je spojitá a klesající na $\mathbb{R}$. Platí $\mathcal{H}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.

Definice. Funkce **hyperbolický sinus**, **hyperbolický kosinus**, **hyperbolický tangens** a **hyperbolický kotangens** definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

3.4. **Funkce spojité na intervalu.**

Definice. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (neboli interval, který obsahuje nekonečně mnoho bodů). Řekneme, že funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je **spojitá na intervalu** J, jestliže platí:

- f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu J, pokud je tento prvkem J,
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu J, pokud je tento prvkem J,
- f je spojitá v každém vnitřním bodě J.

Věta 3.12 (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = y$.*

Důkaz. Zvolme $y \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a, b]; f(z) < y\}$. Označme $\xi = \sup M$. Potom $a \in M$. Množina M je tudíž neprázdná, a tedy $\xi \in [a, b]$. Ukážeme, že $f(\xi) = y$. Předpokládejme, že $f(\xi) > y$. Pak $\xi > a$. Díky spojitosti f nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi - \delta, \xi)$ platí $f(x) > y$. Potom $M \subset [a, \xi - \delta]$, což je spor. Předpokládejme, že $f(\xi) < y$. Pak $\xi < b$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\xi, \xi + \delta)$ platí $f(x) < y$. Potom $(\xi, \xi + \delta) \subset M$, což je spor. Odtud plyne, že $f(\xi) = y$. □

Poznámka. Obdobné tvrzení platí i v případě, kdy $f(a) > f(b)$.

Věta 3.13 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť J je interval. Nechť funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu J. Potom je množina $f(J)$ interval.*

Důkaz. Zvolme $y_1, y_2 \in f(J)$ a $z \in \mathbb{R}$ taková, že $y_1 < z < y_2$. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Díky Větě 3.12 nalezneme x v intervalu s krajními body x_1, x_2 takové, že $f(x) = z$. tedy $z \in f(J)$. Množina $f(J)$ je tedy interval. □

Definice. Nechť f je funkce, $M \subset \mathcal{D}(f)$ a $x \in M$. Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima** (**minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \le f(x) \quad (\forall y \in M\colon f(y) \ge f(x)).$$

Bod x pak nazýváme **bodem maxima** (**bodem minima**) funkce f na M.

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $G = \sup M$. Potom existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků M splňující $\lim x_n = G$.

Věta 3.14 (nabývání extrémů)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je funkce spojitá na $[a, b]$. Potom f nabývá na $[a, b]$ svého maxima i minima.*

konec 18. přednášky (6.12.2022)

Důkaz. Označme $G = \sup f([a, b])$. Nalezneme posloupnost $\{y_n\} \subset f([a, b])$ splňující $\lim y_n = G$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $x_n \in [a, b]$ splňující $f(x_n) = y_n$. Potom je posloupnost $\{x_n\}$ omezená, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a \le x_n \le b$. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty nalezneme konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$. Označme

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}.$$

Protože $a \leq x_{n_k} \leq b$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, platí podle věty o limitě a uspořádání $x^* \in [a,b]$. Podle Heineovy věty pro spojitost platí $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Protože $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je posloupnost $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti platí

$$f(x^*) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} y_n = G.$$

Tedy $f(x^*) = G$. Odtud plyne, že $G \in \mathbb{R}$ a x^* je bodem maxima funkce f na $[a,b]$. Existenci bodu minima lze dokázat obdobně. □

Věta 3.15 (spojitost a omezenost)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je funkce spojitá na $[a,b]$. Potom je f na $[a,b]$ omezená.*

Důkaz. Podle předchozí věty nabývá funkce f na intervalu $[a,b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ a $K = \max\{|m|, |M|\}$. Potom platí

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq K,$$

a tedy f je omezená na $[a,b]$. □

Věta 3.16 (spojitost inversní funkce)**.** (a) *Nechť f je spojitá a rostoucí funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí na intervalu $f(J)$.*

(b) *Nechť f je spojitá a klesající funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a klesající na intervalu $f(J)$.*

Důkaz. (a) Podle Věty 3.13 je $f(J)$ interval, f^{-1} je na něm dobře definovaná a rostoucí. Nechť $y_0 \in f(J)$ není pravý koncový bod intervalu $f(J)$. Dokážeme spojitost f^{-1} v bodě y_0 zprava. Označme $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Bod x_0 není pravým koncovým bodem J, neboť f je rostoucí na J. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Zvolme dále $x_1 \in J \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ a položme $\delta = f(x_1) - y_0$. Odtud plyne, že $[y_0, y_0 + \delta] \subset f(J)$, a tedy

$$f^{-1}(B_+(y_0, \delta)) = f^{-1}([y_0, y_0 + \delta)) = [x_0, x_1) \subset B(x_0, \varepsilon) = B(f^{-1}(y_0), \varepsilon).$$

Obdobně lze dokázat spojitost zleva funkce f^{-1} v každém bodě intervalu $f(J)$, který není levým koncovým bodem $f(J)$.

Tvrzení (b) lze dokázat obdobně. □

4. Derivace

4.1. Základní vlastnosti.

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Jestliže existuje limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme **derivací funkce f v bodě** a a značíme ji $f'(a)$. Obdobně definujeme **derivaci zprava** a **derivaci zleva funkce f v bodě** a předpisy

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámky. (a) Mohou nastat tyto případy:

$$\text{derivace funkce } f \text{ v bodě } a \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje a je} \begin{cases} \textbf{vlastní}\text{, tj. je rovna reálnému číslu,} \\ \textbf{nevlastní}\text{, tj. je rovna } \infty \text{ nebo } -\infty. \end{cases} \end{cases}$$

(b) Platí

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

má-li alespoň jedna ze stran smysl. Obdobné rovnosti platí pro jednostranné derivace.

(c) Jestliže existuje $f'(a)$, pak existuje okolí bodu a, na němž je funkce f definovaná. Obdobná tvrzení platí pro jednostranné derivace.

(d) Derivace funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ existuje právě tehdy, když v a existuje derivace f zprava i zleva a rovnají se.

Značení. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, a pro každé $x \in M$ existuje vlastní $f'(a)$. Potom definujeme zobrazení $f'\colon M \to \mathbb{R}$ předpisem $f'\colon x \mapsto f'(x)$.

Příklady. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Spočtěte $f'(a)$, pokud existuje, kde
(a) $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$
(b) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
(c) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$
(d) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
(e) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$
(f) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Věta 4.1 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f'(a)$. Potom je f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Podle věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

neboť $f'(a)$ existuje vlastní, a tedy je výraz $f'(a) \cdot 0$ definován. Tedy

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

neboli f je v bodě a spojitá. □

Poznámka.
- $\log'(x) = \frac{1}{x}$ pro každé $x \in (0, \infty)$,
- $\cos'(x) = -\sin(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
- $\operatorname{cotg}'(x) = \frac{-1}{\sin(x)^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro každé $x \in (-1, 1)$,
- $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro každé $x \in (-1, 1)$,
- $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ pro každé $x \in (0, \infty)$.
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro každá $a \in (0, \infty) \setminus 1$ a $x \in (0, \infty)$.

konec 19. přednášky (8.12.2022)

Věta 4.2 (derivace a aritmetické operace)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, f a g jsou funkce a existují $f'(a)$ a $g'(a)$.*

(a) *Platí*
$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(b) *Jestliže je alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
je-li výraz na pravé straně definován.

(c) *Jestliže je funkce g spojitá v bodě a, pak*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$
je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. (a) Podle definice derivace a věty o aritmetice limit platí

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \right) = f'(a)+g'(a).
\end{aligned}
$$

(b) Předpokládejme, že funkce g je spojitá v bodě a. Potom

$$\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a).$$

Podle definice derivace a věty o aritmetice limit pak platí

$$
\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a+h) + f(a) \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \right) \\
&= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).
\end{aligned}
$$

(c) Z předpokladu plyne, že $g(a) \neq 0$. Díky spojitosti g v a nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in B(a,\delta)$. Pak pro každé $x \in B(a,\delta)$ platí

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} &= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\
&= \frac{f(x)g(a)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\
&= \frac{f(x)-f(a)}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(a)} \cdot \frac{g(a)-g(x)}{g(x)}.
\end{aligned}
$$

Potom díky spojitosti g v a platí podle věty o aritmetice limit

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \frac{1}{g(x)} + \frac{f(a)}{g(a)} \cdot \frac{g(a)-g(x)}{x-a} \frac{1}{g(x)} \right) \\
&= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f(a)}{g(a)} \cdot (-g'(a)) \cdot \frac{1}{g(a)} = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}.
\end{aligned}
$$

□

Poznámka. Předpoklady Věty 4.1 není možné vynechat. Položme například

$$
f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}
$$

Potom $f'(0) = \infty$, $g'(0) = -\infty$, ale $(f+g)'(0)$ ani $(fg)'(0)$ neexistují, přestože výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ je definován.

Věta 4.3 (derivace složené funkce)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, f, g jsou funkce, g je spojitá v bodě a a existují $g'(a)$ a $f'(g(a))$. Potom platí*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a), \tag{10}$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$. Díky existenci $f'(b)$ nalezneme $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, takové, že $B(b,\sigma) \subset \mathcal{D}(f)$. Díky spojitosti g v a nalezneme $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho > 0$, takové, že $g(B(a,\varrho)) \subset B(b,\sigma)$. Pak je $f \circ g$ definovaná na $B(a,\varrho)$.

Předpokládejme nejprve, že $g'(a) \neq 0$. Nalezneme $\tilde{\varrho} \in (0, \varrho)$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \tilde{\varrho}) \colon \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0.$$

Potom speciálně platí

(11) $$\forall x \in P(a, \tilde{\varrho}) \colon g(x) \neq b.$$

Označme

$$\varphi(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}, \quad y \in P(b, \sigma).$$

Potom

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = f'(b).$$

Podle Věty 3.3 (podmínka (P) je splněna díky (11)) tedy platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(b)}{g(x) - b} = \lim_{x \to a} (\varphi \circ g)(x) = f'(b).$$

Díky (11) platí

$$\forall x \in P(a, \tilde{\varrho}) \colon \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(b)}{g(x) - b} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$

a tedy, podle věty o aritmetice limit a předpokladu,

$$\lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = f'(b) g'(a).$$

Předpokládejme nyní, že $g'(a) = 0$. Protože výraz na pravé straně (10) je definován, je $f'(b)$ vlastní. Chceme tedy dokázat, že $(f \circ g)'(a) = 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Protože $f'(b)$ je vlastní, nalezneme díky Větě 3.7 $C \in \mathbb{R}, C > 0$, a $\tilde{\sigma} \in (0, \sigma)$ taková, že

$$\forall y \in P(b, \tilde{\sigma}) \colon \left| \frac{f(y) - f(b)}{y - b} \right| < C.$$

Díky spojitosti g v bodě a nalezneme $\psi \in (0, \varrho)$ takové, že

$$\forall x \in B(a, \psi) \colon g(x) \in B(b, \tilde{\sigma}).$$

Díky tomu, že $g'(a) = 0$, nalezneme $\eta \in (0, \psi)$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \eta) \colon \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| < \varepsilon.$$

Zvolme $x \in P(a, \eta)$. Potom buď $g(x) = g(a)$ a

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = 0,$$

nebo $g(x) \neq g(a)$ a

$$\left| \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} \right| = \left| \frac{f(g(x)) - f(b)}{g(x) - b} \right| \cdot \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| < C\varepsilon.$$

Každopádně

$$\forall x \in P(a, \eta) \colon \left| \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} \right| < C\varepsilon,$$

a tedy $(f \circ g)'(a) = 0$. $\square$

Poznámka. Předpoklad spojitosti g v a ve Větě 4.3 nelze vynechat. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases} \quad \text{a} \quad f(y) = |y| \text{ pro } y \in \mathbb{R}.$$

Potom

$$f'\left(g(0)\right) g'(0) = (-1) \cdot \infty = -\infty,$$

a tedy je výraz $f'(g(0))\,g'(0)$ definován, ale

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0,\end{cases}$$

a tedy $(f\circ g)'(0)$ neexistuje.

Značení. Nechť I je interval. Potom symbolem $\operatorname{Int} I$ značíme množinu všech vnitřních bodů I.

Věta 4.4 (derivace inversní funkce)**.** *Nechť I je interval, $a\in\operatorname{Int} I$, f je ryze monotónní a spojitá funkce na I a existuje $f'(a)$. Označme $b=f(a)$.*

(a) *Jestliže $f'(a)\neq 0$, potom $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$.*
(b) *Jestliže $f'(a)=0$ a f je rostoucí, potom $(f^{-1})'(b)=\infty$.*
(c) *Jestliže $f'(a)=0$ a f je klesající, potom $(f^{-1})'(b)=-\infty$.*

Důkaz. (a) Předpokládejme, že f je rostoucí. Označme $J=f(I)$. Potom J je podle Věty 3.13 interval. Dle Věty 3.16 je $f^{-1}\colon J\to I$ spojitá a rostoucí. Protože $a\in\operatorname{Int} I$ a f je rostoucí, je $b\in\operatorname{Int} J$. Nalezneme $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, takové, že $B(b,\varepsilon)\subset J$. Díky tomu, že a je vnitřním bodem I a f je spojitá v a, nalezneme $\delta\in\mathbb{R}$, $\delta>0$, takové, že $B(a,\delta)\subset I$ a $f(B(a,\delta))\subset B(b,\varepsilon)$. Označme

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},\quad x\in P(a,\delta).$$

Potom

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=f'(a).$$

Funkce f^{-1} je spojitá v b, a tedy

$$\lim_{x\to b}f^{-1}(x)=f^{-1}(b).$$

Protože f^{-1} je rostoucí, platí

$$\forall x\in P(b,\varepsilon)\colon f^{-1}(x)\neq f^{-1}(b).$$

Tedy podle Věty 3.3 (varianta s podmínkou (P)) platí

$$\lim_{y\to b}\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}=\lim_{y\to b}(\varphi\circ f^{-1})(y)=f'(a). \tag{12}$$

(a) Podle věty o aritmetice limit a (12) máme

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Označme

$$\psi(y)=\frac{y-b}{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)},\quad y\in P(b,\varepsilon).$$

Potom podle (12) platí

$$\lim_{y\to b}\psi(y)=0.$$

Navíc

$$\forall y\in P(b,\varepsilon)\colon \psi(y)>0,$$

neboť f^{-1} je rostoucí na J. Podle Věty 3.8 tedy platí

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\lim_{y\to b}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}=\infty.$$

Tvrzení (c) lze dokázat obdobně. □

konec 20. přednášky (13.12.2022)

Definice. Nechť f je funkce, $M \subset \mathcal{D}(f)$ a $a \in M$. Řekneme, že f nabývá v bodě a **lokálního maxima** (**lokálního minima**, **ostrého lokálního maxima**, **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $y \in P(a, \delta) \cap M$ platí $f(y) \leq f(a)$ ($f(y) \geq f(a)$, $f(y) < f(a)$, $f(y) > f(a)$). Bodem **(ostrého) lokálního extrému** budeme rozumět bod (ostrého) lokálního maxima či minima. Není-li specifikována množina M, pak jsou všechny extrémy funkce uvažovány vzhledem k jejímu definičnímu oboru.

Věta 4.5 (nutná podmínka existence extrému)**.** *Nechť f je funkce, a je bodem lokálního extrému f a existuje $f'(a)$. Potom $f'(a) = 0$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f'(a) > 0$. Dle Věty 3.6(a) existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta)\colon \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že pro každé $x \in P_+(a, \delta)$ platí $f(a) < f(x)$ a pro každé $x \in P_-(a, \delta)$ platí $f(a) > f(x)$. Tedy f nemá v a lokální extrém. Jestliže $f'(a) < 0$, pak lze tvrzení dokázat obdobně. □

4.2. **Věty o střední hodnotě.**

Věta 4.6 (Rolleova věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je funkce spojitá na $[a, b]$, $f(a) = f(b)$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*

Důkaz. Podle Věty 3.14 nabývá funkce f na intervalu $[a, b]$ svého maxima i minima. Označme $m = \min f\bigl([a, b]\bigr)$ a $M = \max f\bigl([a, b]\bigr)$. Pak

$$m \leq f(a) = f(b) \leq M. \tag{13}$$

Jestliže $m = M$, potom je funkce f konstantní na $[a, b]$, a tedy $f'(c) = 0$ pro každé $c \in (a, b)$.

Předpokládejme, že $m < M$. Potom musí být alespoň jedna z obou nerovností v (13) ostrá. Nechť například platí $f(b) < M$. Nalezneme $c \in [a, b]$ splňující $f(c) = M$. Potom $c \notin \{a, b\}$, a tedy $c \in (a, b)$. Pak f nabývá v bodě c svého maxima na intervalu $[a, b]$ a existuje v něm derivace podle předpokladu. Podle Věty 4.5 platí $f'(c) = 0$. Jestliže $m < f(a)$, pak lze dokázat tvrzení obdobně nebo použít již dokázané tvrzení na funkci $-f$. □

Věta 4.7 (Lagrangeova věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je funkce spojitá na $[a, b]$ a pro každé $x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Položme

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Potom je g spojitá na $[a, b]$ a platí $g(a) = g(b)$. Podle Věty 4.2(a) platí

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

Díky Větě 4.6 nalezneme $c \in (a, b)$ splňující $g'(c) = 0$. Potom $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Věta 4.8 (Cauchyova věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f, g jsou funkce spojité na $[a, b]$, pro každé $x \in (a, b)$ existují $f'(x)$ a $g'(x)$ a pro každé $x \in (a, b)$ je $g'(x)$ vlastní a nenulová. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz. Podle Věty 4.7 nalezneme $d \in (a, b)$ takové, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Z předpokladu vyplývá, že $g'(d) \neq 0$, a tedy $g(a) \neq g(b)$. Položme

$$\varphi(x) = \bigl(f(x) - f(a)\bigr)\bigl(g(b) - g(a)\bigr) - \bigl(g(x) - g(a)\bigr)\bigl(f(b) - f(a)\bigr), \quad x \in [a, b].$$

Potom je φ spojitá na $[a,b]$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ a podle Věty 4.2 platí

$$\varphi'(x) = f'(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(x)\big(f(b) - f(a)\big) \quad \text{pro každé } x \in (a,b).$$

Díky Větě 4.6 nalezneme $c \in (a,b)$ splňující $\varphi'(c) = 0$. Potom

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) - g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = 0,$$

odkud plyne tvrzení. □

Věta 4.9 (vztah derivace a monotonie)**.** *Nechť I je interval, f je funkce spojitá na I a pro každé $x \in \operatorname{Int} I$ platí $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) \leq 0$). Potom je f rostoucí (neklesající, klesající, nerostoucí) na I.*

Důkaz. Předpokládejme, že pro každé $x \in \operatorname{Int} I$ platí $f'(x) > 0$. Zvolme $a, b \in I, a < b$. Pak je f spojitá na $[a,b]$ a pro každé $x \in (a,b)$ existuje $f'(x)$. Díky Větě 4.7 nalezneme $c \in (a,b)$ splňující

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Z předpokladu vyplývá, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0,$$

a tedy $f(a) < f(b)$. Funkce f je tudíž neklesající na I. Ve zbývajících případech lze tvrzení dokázat obdobně. □

Věta 4.10 (L'Hospitalova pravidla)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, f, g jsou funkce a existuje $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Předpokládejme, že buď $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$, nebo $\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$. Potom*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámka. Obdobné tvrzení jako ve Větě 4.10 platí i pro limitu zleva, a tedy i pro limitu.

Příklady. (a) Spočtěte $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
(b) Spočtěte $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.
(c) Spočtěte $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$.
(d) Spočtěte $\lim_{x \to 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{e^3 - e^{3x}}}$.

Poznámky. Předpoklady Věty 4.10 nelze vynechat, například

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x + 5}{2x + 6} \neq \lim_{x \to 0} \frac{3}{2}, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^8}{x + 6 \sin x} \neq \lim_{x \to \infty} \frac{8x^7}{1 + 6 \cos x}.$$

Věta 4.11 (o limitě derivací)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, f je funkce, existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$ a f je spojitá zprava v a. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} f'(x)$.*

Důkaz. Označme $L = \lim_{x \to a_+} f'(x)$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že

$$f'(x) \in B(L, \varepsilon) \quad \text{pro každé } x \in P_+(a, \delta). \tag{14}$$

Zvolme $x \in P_+(a, \delta)$. Potom pro každé $y \in (a, x)$ existuje vlastní $f'(y)$. Podle Věty 4.1 je tedy f spojitá v každém bodě $y \in (a, x]$. Podle předpokladu je navíc spojitá zprava v a. Tedy f je spojitá na $[a, x]$. Díky Větě 4.7 nalezneme $c_x \in (a, x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Protože $c_x \in P_+(a, \delta)$, z (14) plyne, že

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in B(L, \varepsilon).$$

Jinými slovy, $f'_+(a) = L$. □

Poznámka. Obdobné tvrzení jako ve Větě 4.11 platí i pro derivaci zleva, a tedy i pro derivaci.

Poznámka. Předpoklad spojitosti ve Větě 4.11 nelze vynechat. Například $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{sign}'(x) = 0$, ale $\operatorname{sign}'_+(0) = \infty$.

konec 21. přednášky (15.12.2022)

4.3. Konvexní a konkávní funkce, inflexní body.

Definice. Nechť I je interval, f je funkce a $I \subset \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že f je

- **konvexní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I\ \forall \lambda \in [0,1]:\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$
- **konkávní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I\ \forall \lambda \in [0,1]:\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$
- **ryze konvexní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I, x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$
- **ryze konkávní** na I, jestliže
$$\forall x, y \in I, x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1):\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Lemma (ekvivalentní podmínky pro konvexitu)**.** *Nechť I je interval, f je funkce a $I \subset \mathcal{D}(f)$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) *f je konvexní na I,*
(ii) $\forall x, y, z \in I,\ x < y < z\colon \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$,
(iii) $\forall x, y, z \in I,\ x < y < z\colon \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$,
(iv) $\forall x, y, z \in I,\ x < y < z\colon \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.

Obdobná tvrzení platí pro konkávní, ryze konvexní a ryze konkávní funkce.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii) Zvolme $x, y, z \in I$ splňující $x < y < z$. Položme $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$. Potom $\lambda \in (0,1)$ a $y = \lambda x + (1-\lambda)z$. Označme $c = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z)$. Pak

$$\frac{c - f(x)}{y - x} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \tag{15}$$

Z konvexity f na I plyne, že $f(y) \leq c$. Tedy

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Zvolme $x, z \in I$, $x < z$, a $\lambda \in (0,1)$. Položme $y = \lambda x + (1-\lambda)z$ a definujme c jako výše. Potom $x < y < z$, a tedy podle předpokladu a (15) platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{c - f(x)}{y - x}.$$

Odtud plyne, že $f(y) \leq c$, tedy f je konvexní na I. Obdobně lze dokázat ekivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) a (i) $\Leftrightarrow$ (iv). $\square$

Poznámka. Obdobné ekvivalentní podmínky platí pro konkavitu, ryzí konvexitu a ryzí konkavitu.

Věta 4.12 (konvexita a jednostranné derivace)**.** *Nechť I je interval a f je konvexní funkce na I. Potom pro každé $a \in \operatorname{Int} I$ existují vlastní $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ a platí $f'_-(a) \leq f'_+(a)$.*

Důkaz. Zvolme $a \in \operatorname{Int} I$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, splňující $B(a,\delta) \subset I$. Položme

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P_+(a,\delta),$$
$$\psi(y) = \frac{f(y) - f(a)}{y - a}, \quad y \in P_-(a,\delta).$$

Jestliže $y_1, y_2, x_1, x_2 \in P(a,\delta)$ a $y_2 < y_1 < a < x_1 < x_2$, potom z lemmatu plyne

$$\varphi(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \le \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} = \varphi(x_2)$$

a

$$\psi(y_2) = \frac{f(y_2) - f(a)}{y_2 - a} \le \frac{f(y_1) - f(a)}{y_1 - a} = \psi(y_1).$$

Tedy φ je neklesající na $P_+(a,\delta)$ a ψ je neklesající na $P_-(a,\delta)$. Z lemmatu dále pro každé $x \in P_+(a,\delta)$ a $y \in P_-(a,\delta)$ plyne

$$\psi(y) = \frac{f(a) - f(y)}{a - y} \le \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \varphi(x). \tag{16}$$

Tedy φ je zdola omezená na $P_+(a,\delta)$ a ψ je shora omezená na $P_-(a,\delta)$. Z Věty 3.9 plyne, že

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a_+} \varphi(x)$$

a

$$f'_-(a) = \lim_{y \to a_-} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = \lim_{y \to a_-} \psi(y)$$

existují vlastní. Navíc z (16) a Věty 3.9 plyne pro každé $x \in P_+(a,\delta)$

$$f'_-(a) = \lim_{y \to a_-} \psi(y) \le \varphi(x).$$

Po dalším použití Věty 3.9 dostáváme

$$f'_-(a) \le \lim_{x \to a_+} \varphi(x) = f'_+(a).$$

□

Poznámka. Jestliže f je konkávní funkce na intervalu I, potom pro každé $a \in \operatorname{Int} I$ existují vlastní $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ a platí $f'_-(a) \ge f'_+(a)$.

Věta 4.13 (konvexita a spojitost)**.** *Nechť I je interval a f je konvexní funkce na I. Potom pro každé $a \in \operatorname{Int} I$ je f spojitá v a.*

Důkaz. Zvolme $a \in \operatorname{Int} I$. Podle Věty 4.12 existují vlastní $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$. Podle Věty 4.1 je f spojitá zleva i zprava v a. Tedy f je spojitá v a. □

Definice. Nechť f je funkce a $a \in \mathbb{R}$. **Druhou derivací** f v a nazýváme hodnotu

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h},$$

pokud limita existuje. Jestliže $M \subset \mathbb{R}$ a pro každé $x \in M$ existuje vlastní $f''(x)$, potom definujeme zobrazení $f''\colon M \to \mathbb{R}$ předpisem $f''\colon x \mapsto f''(x)$. Obdobně pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme **n-tou derivaci** funkce f, kterou značíme $f^{(n)}$. Je-li $n = 1, 2, 3$, píšeme také po řadě f', f'', f'''. Symbolem $f^{(0)}$ budeme rozumět f.

Věta 4.14 (druhá derivace a konvexita)**.** *Nechť I je interval, f je spojitá funkce na I a f' je spojitá na $\operatorname{Int} I$. Jestliže f' je rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí) na $\operatorname{Int} I$, potom je f ryze konvexní (ryze konkávní, konvexní, konkávní) na I. Speciálně jestliže pro každé $x \in \operatorname{Int} I$ platí $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$, $f''(x) \ge 0$, $f''(x) \le 0$), potom je f ryze konvexní (ryze konkávní, konvexní, konkávní) na I.*

Důkaz. Předpokládejme, že f' je rostoucí na $\operatorname{Int} I$. Zvolme $x, y, z \in I$ splňující $x < y < z$. Díky Větě 4.7 nalezneme $c \in (x,y)$ a $d \in (y,z)$ splňující

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \quad \text{a} \quad \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(d).$$

Podle předpokladu platí $f'(c) < f'(d)$, a tedy

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Z lemmatu tudíž plyne, že f je ryze konvexní. Jestliže $f''(x) > 0$ pro každé $x \in \operatorname{Int} I$, potom je podle Věty 4.9 f' rostoucí na $\operatorname{Int} I$, a tedy f je ryze konvexní podle již dokázaného tvrzení. Obdobně lze dokázat tvrzení ve zbývajících případech. □

Definice. Nechť f je funkce a $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je **inflexní bod** f, jestliže existuje vlastní $f'(a)$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, takové, že buď

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \;\&\; \forall x \in P_+(a,\delta)\colon f(x) < f(a) + f'(a)(x-a),$$

nebo

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f(x) < f(a) + f'(a)(x-a) \;\&\; \forall x \in P_+(a,\delta)\colon f(x) > f(a) + f'(a)(x-a).$$

konec 22. přednášky (20.12.2022)

Věta 4.15 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, existuje $f''(a)$ a a je inflexní bod a. Potom $f''(a) = 0$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f''(a) > 0$. Nalezneme $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že pro každé $x \in P(a,\delta)$ platí

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} > 0.$$

Odtud plyne, že

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f'(x) < f'(a) \quad \& \quad \forall x \in P_+(a,\delta)\colon f'(x) > f'(a).$$

Zvolme $x \in P_-(a,\delta)$. Podle Věty 4.1 je f je spojitá na $B(a,\delta)$. Díky Větě 4.7 nalezneme $c_x \in (x,a)$ splňující

$$\frac{f(a) - f(x)}{a-x} = f'(c_x).$$

Protože $f'(c_x) < f'(a)$, platí $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a)$, tedy $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$. Nyní zvolme $x \in P_+(a,\delta)$. Obdobně jako výše nalezneme $d_x \in (a,x)$ splňující

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(d_x).$$

Protože $f'(d_x) > f'(a)$, dostáváme $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$. Ze získaných odhadů plyne, že a není inflexní bod f. Jestliže $f''(a) < 0$, pak lze tvrzení dokázat obdobně. □

Poznámka. Z podmínky $f''(a) = 0$ neplyne, že a je inflexní bod f. Položme $f(x) = x^4$ pro $x \in \mathbb{R}$. Potom $f''(0) = 0$, ale 0 není inflexní bod f.

Věta 4.16 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť f je funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že f' je spojitá na $B(a,\delta)$ a platí buď*

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f''(x) > 0 \;\&\; \forall x \in P_+(a,\delta)\colon f''(x) < 0,$$

nebo

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f''(x) < 0 \;\&\; \forall x \in P_+(a,\delta)\colon f''(x) > 0,$$

potom a je inflexní bod f.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že

$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f''(x) > 0 \;\&\; \forall x \in P_+(a,\delta)\colon f''(x) < 0.$$

Z Věty 4.9 plyne, že f' je rostoucí na $(a-\delta, a]$ a klesající na $[a, a+\delta)$. Zvolme $x \in P_-(a,\delta)$. Díky Větě 4.7 nalezneme $c_x \in (a-\delta, a)$ splňující

$$\frac{f(a) - f(x)}{a-x} = f'(c_x) < f'(a).$$

Tedy $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$. Nyní zvolme $x \in P_+(a,\delta)$. K němu obdobně nalezneme $d_x \in (a, a+\delta)$ splňující
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(d_x) < f'(a).$$
Potom $f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)$. Tedy a je inflexní bod f. Jestliže
$$\forall x \in P_-(a,\delta)\colon f''(x) < 0 \ \&\ \forall x \in P_+(a,\delta)\colon f''(x) > 0,$$
pak lze tvrzení dokázat obdobně. □

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Řekneme, že f má v ∞ **asymptotu** $ax+b$, jestliže
$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - ax - b\big) = 0.$$
Obdobně definujeme asymptotu v $-\infty$.

Věta 4.17 (tvar asymptoty)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a f je funkce. Potom f má asymptotu $ax+b$ v ∞ právě tehdy, když*
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a \quad \& \quad \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b.$$
Obdobné tvrzení platí pro asymptotu v $-\infty$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Podle věty o aritmetice limit platí
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)-ax-b}{x} + a + \frac{b}{x}\right) = a,$$
a
$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax) = \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b+b) = b.$$
$\Leftarrow$ Jest
$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b) = b - b = 0,$$
a tedy $x \mapsto ax+b$ je asymptotou funkce f v ∞. □

5. Taylorův polynom

5.1. **Základní vlastnosti.** Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f'(a)$. Potom pro polynom prvního stupně t (tečnu) definovaný předpisem
$$t(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$
platí
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-t(x)}{x-a} = 0.$$
Pro $n \in \mathbb{N}$ hledáme polynom P splňující $\operatorname{st} P \le n$ a
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Definice. Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Položme
$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$
Potom $T_n^{f,a}$ nazýváme **Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.**

Úmluva. Výraz $(x-a)^0$ chápeme jako 1, a to i pro $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ rozumíme f.

Poznámky. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$.

(a) Platí $T_1^{f,a} = t$.
(b) Platí $\operatorname{st} T_n^{f,a} \le n$ a tato nerovnost může být ostrá.
(c) Platí $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$.

Věta 5.1 (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí. Platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - t(x)}{x-a} = 0,$$

a tedy tvrzení platí pro $n = 1$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a předpokládejme, že pro každou funkci g, která má v a vlastní $(n-1)$-ní derivaci, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g,a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0.$$

Podle předpokladu má f' v a vlastní $(n-1)$-ní derivaci, takže

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0. \tag{17}$$

Funkce f je spojitá v bodě a, neboť existuje vlastní $f'(a)$, a tedy $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Zřejmě platí $\lim_{x\to a} T_n^{f,a}(x) = f(a)$, takže

$$\lim_{x\to a} (f(x) - T_n^{f,a}(x)) = 0.$$

Navíc

$$\lim_{x\to a} (x-a)^n = 0,$$

a tedy podle Věty 4.10(a), poznámky (c) a (17) dostaneme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - (T_n^{f,a})'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0.$$

□

konec 23. přednášky (22.12.2022)

Lemma (příliš dobrá aproximace polynomu)**.** *Nechť Q je polynom, $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{st} Q \le n$, $a \in \mathbb{R}$ a*

$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Předpokládejme, že polynom Q není nulový. Pak má Q v bodě a kořen. Tedy existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ a polynom R takový, že $Q(x) = (x-a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$. Odtud plyne, že

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Poslední limita ale buď neexistuje (je-li $k < n$ a $n - k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n - k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (je-li $k = n$). Ve všech případech dostáváme spor. □

Věta 5.2 (jednoznačnost Taylorova polynomu)**.** *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom splňující $\operatorname{st} P \le n$ a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle Věty 5.1 platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Tedy

$$\lim_{x\to a}\frac{T_n^{f,a}(x)-P(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\left(\frac{T_n^{f,a}(x)-f(x)}{(x-a)^n}+\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}\right)=0+0=0.$$

Dále platí $\operatorname{st}\bigl(T_n^{f,a}-P\bigr)\le n$, a tedy je podle lemmatu $T_n^{f,a}-P$ nulový polynom. □

Věta 5.3 (obecný tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n\in\mathbb{N}$, $a,x\in\mathbb{R}$, $a<x$ a pro každé $t\in[a,x]$ existuje vlastní $f^{(n+1)}(t)$. Nechť φ je spojitá funkce na $[a,x]$ mající v každém bodě intervalu (a,x) vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi\in(a,x)$ takové, že*

$$f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důkaz. Položme

$$F(t)=f(x)-\left(f(t)+f'(t)(x-t)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\right)\quad\text{pro } t\in[a,x].$$

Potom je F je spojitá na $[a,x]$ a má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a,x). Podle Věty 4.8 tedy existuje $\xi\in(a,x)$ takové, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.\tag{18}$$

Zvolme $t\in(a,x)$. Potom

$$\begin{aligned}F'(t)&=-\left(f'(t)+f'(t)\cdot(-1)+f''(t)(x-t)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\right)\\&=-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $t=\xi$, dostaneme

$$F'(\xi)=-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Zřejmě platí $F(x)=0$ a $F(a)=f(x)-T_n^{f,a}(x)$. Odtud a z (18) dostáváme

$$f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

□

Poznámky. (a) Obdobné tvrzení platí i pro $x<a$.

(b) Předpoklady Věty 5.3 lze mírně oslabit. Stačí předpokládat, že $f^{(n)}$ je spojitá na $[a,x]$ a $f^{(n+1)}$ existuje (vlastní či nevlastní) na (a,x).

Věta 5.4 (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n\in\mathbb{N}$, $a,x\in\mathbb{R}$, $a<x$ a pro každé $t\in[a,x]$ existuje vlastní $f^{(n+1)}(t)$. Pak existuje $\xi\in(a,x)$ takové, že*

$$f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Důkaz. Položme $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$, $t\in[a,x]$. Pak je φ je spojitá na $[a,x]$ a na (a,x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 5.3 nalezneme $\xi\in(a,x)$ takové, že

$$f(x)-T_n^{f,a}(x)=\frac{1}{n!}\frac{0-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Příklad. Dokažte, že pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^x-T_n^{\exp,0}(x)\right)=0.$$

Věta 5.5 (Cauchyův tvar zbytku)**.** *Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$ a pro každé $t \in [a, x]$ existuje vlastní $f^{(n+1)}(t)$. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)}{n!}.$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = t$, $t \in [a, x]$. Pak je funkce φ je spojitá na $[a, x]$ a na otevřeném intervalu (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Věty 5.3 nalezneme $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{x-a}{1}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)}{n!}.$$

□

5.2. **Symbol „malé o“.**

Definice. Nechť f a g jsou funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je v bodě a **malé** o od g, značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, jestliže platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznámky. (a) Výraz „$f(x) = o(g(x))$, $x \to a$“ chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi.

(b) Tvrzení Věty 5.1 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n), x \to a.$$

(c) Symbol $f(x) = o(1)$, $x \to a$, znamená, že $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

(d) Symbol o lze použít i pro jednostranné limity.

Poznámky. Platí například

$$\begin{aligned} x^3 &= o(x^2),\ x \to 0,\\ x^2 &= o(x^3),\ x \to \infty,\\ x^2 &= o(e^x),\ x \to \infty,\\ 1 - x &= o(\arccos x),\ x \to 1_-. \end{aligned}$$

Věta 5.6 (aritmetika malého o)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.*

(a) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(b) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(c) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(d) *Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(e) *Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(f) *Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \le n$, a $f(x) = o\big((x-a)^n\big)$, $x \to a$, potom $f(x) = o\big((x-a)^m\big)$, $x \to a$.*

konec 24. přednášky (4.1.2023)

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z věty o aritmetice limit. □

Věta 5.7 (malé o složené funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f(y) = o(g(y))$, $y \to b$, $\lim_{x\to a}\varphi(x) = b$ a existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta) : \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))$, $x \to a$.

Důkaz. Tvrzení plyne z věty o limitě složené funkce. □

5.3. **Taylorovy polynomy elementárních funkcí.**

Věta 5.8 (Taylorovy polynomy elementárních funkcí)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak platí*

$$\text{(a) } T_n^{\exp,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

$$\text{(b) } T_{2n+1}^{\sin,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

$$\text{(c) } T_{2n}^{\cos,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

$$\text{(d) } T_n^{\log(1+x),0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1},$$

$$\text{(e) } T_{2n+1}^{\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

$$\text{(f) } T_n^{\operatorname{arctg},0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1},$$

$$\text{(g) } T_n^{(1+x)^\alpha,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Příklad. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sin x - \frac{x^3}{2}}{x^5}.$$

konec 25. přednášky (5.1.2023)