MATEMATICKÁ ANALÝZA 1, ZIMNÍ SEMESTR 2022–2023
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA E

LUBOŠ PICK

Příklad E1. Spočtěte limitu posloupnosti.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\left(\frac{2+n}{n} \right)^{\frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{n^2+4}{n^2}} \right).$$

(15 bodů)

Příklad E2. Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} (\operatorname{tg} x) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ 0, & x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \\ 1, & x \in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{cases}$$

Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace funkce f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují.

(15 bodů)

Příklad E3. Spočtěte limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(15 bodů)

Příklad E4. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{2\log x}{1+\log^2 x}\right) & \text{pro } x \in (0,\infty), \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

(a) Dokažte, že funkce f je dobře definovaná.
(b) Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace funkce f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují.
(c) Určete intervaly monotonie funkce f.
(d) Určete obraz množiny $[0, e]$ při zobrazení f.
(e) Určete intervaly konvexity a konkávity funkce f.

(15 bodů)

$\boxed{E1}$ Spočtěte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\left(\frac{2+n}{n}\right)^{\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{n^2+4}{n^2}}\right)$.

<u>Řešení</u>. Platí $n^2\left(\left(\frac{2+n}{n}\right)^{\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{n^2+4}{n^2}}\right) = 4\cdot\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}-\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}{\left(\frac{2}{n}\right)^2}$ pro $n\in\mathbb{N}$.

Položme $$f(x)=\frac{(1+x)^x-\sqrt{1+x^2}}{x^2} \quad \text{pro } x\in(0,\infty).$$ Potom

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{e^{x\log(1+x)}-1+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{e^{x\log(1+x)}-1}{x\log(1+x)}\cdot\frac{\log(1+x)}{x}+\frac{-x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(\frac{e^{x\log(1+x)}-1}{x\log(1+x)}\cdot\frac{\log(1+x)}{x} - \frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) \overset{\text{VOAL}}{\underset{\text{VOLSF(P)}}{=}} \frac{1}{2},$$

neboť

- $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\log(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{-1}{1+\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{2}$,
- $\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\log(1+x)=0$, $x\cdot\log(1+x)\neq 0 \ \forall x>0$, $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$.

Pro $n\in\mathbb{N}$ položme $x_n=\frac{2}{n}$. Potom $\lim x_n=0$, $x_n>0 \ \forall n$. Tedy dle Heineovy věty a VOAL je

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\left(\frac{2+n}{n}\right)^{\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{n^2+4}{n^2}}\right) = 4\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{2}}$$

□

E2 Uvažujte funkci

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right), & x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\},\\ 0, & x\in\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\},\\ 1, & x\in\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.\end{cases}$$

Spočtěte f', případně $f'_{\pm}$ tam, kde existují.

Řešení. Pro $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}$ platí

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)+\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)-\operatorname{tg} x\,.$$

Platí podle věty o součinu omezené funkce a funkce s nulovou limitou

$$\lim_{x\to k\pi} f(x)=0\,,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Dále platí podle VOLSF(P)

$$\lim_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}=1,$$

neboť $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{arctg} y}{y}=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{2}}\frac{1}{\operatorname{tg} x}=0$, $\frac{1}{\operatorname{tg} x}\neq 0\ \forall x\in P\left(\frac{(2k+1)\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Tedy f je spojitá na $\mathbb{R}$. Tudíž pro $k\in\mathbb{Z}$ platí

B2/2

$$f'_-(k\pi) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to(k\pi)_-} f'(x) = \lim_{x\to(k\pi)_-}\left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$f'_+(k\pi) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to(k\pi)_+} f'(x) = \lim_{x\to(k\pi)_+}\left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Tedy $f'(k\pi)$ neexistuje pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

Dále pro $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$f'\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{2}} f'(x) = \lim_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{2}}\left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x\right).$$

Položme $y = g(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $x \in P\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Potom

- $\lim_{x\to\frac{(2k+1)\pi}{2}} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0 \;\forall x \in P\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$,

tedy podle VOLSF(P) platí

$$f'\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\operatorname{arctg} y\left(1+\frac{1}{y^2}\right) - \frac{1}{y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(y^2+1)\operatorname{arctg} y - y}{y^2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{2y\operatorname{arctg} y + (y^2+1)\frac{1}{y^2+1} - 1}{2y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\operatorname{arctg} y = 0.$$

Tedy $f'\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

$\boxed{E3}$ Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Řešení: Jest pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}\right)} = e^{\frac{1}{x^2}\frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}\right)}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}-1\right)}.$$

Platí • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x} = 1$, $\forall x \in P(0,\frac{\pi}{2}) : \frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x} > 0$, $\lim\limits_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$,

tedy (VOLSF(P)) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}\right)}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}-1} = 1$,

• $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}-1\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1+1-\cos x}{x^2\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)x^2} + \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right) \overset{VOAL}{=} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Protože funkce exp je spojitá v bodě $x=1$, plyne z VOAL a VOLSF(S)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^1 = \underline{e}$$

$\square$

$\boxed{E4}$ Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{2\log x}{1+\log^2 x}\right), & x \in (0,\infty) \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Dokažte, že f je dobře definovaná.

(b) Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde neexistují.

(c) Určete intervaly monotonie f.

(d) Určete obraz množiny $[0,e]$ při zobrazení f.

(e) Určete intervaly konvexity a konkávity f.

Řešení: (a) Pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí $(y \pm 1)^2 \geq 0$, tedy $y^2+1 \geq 2y$ a $-y^2-1 \leq +2y$, takže $\dfrac{2y}{y^2+1} \leq 1$ a $\dfrac{2y}{y^2+1} \geq -1$.

Tedy $\forall x \in (0,\infty)$ je $\dfrac{2\log x}{1+\log^2 x} \in [-1,1] = D(\arccos)$, takže f je dobře definovaná na $(0,\infty)$, a tedy i na $[0,\infty)$.

(b) Pro $x \in (0, \frac{1}{e})$ platí $f'(x) =$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{4\log^2 x}{(1+\log^2 x)^2}}} \cdot \frac{\frac{2}{x}(1+\log^2 x) - 2\log x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}}{(1+\log^2 x)^2}$$

$$= \frac{-(1+\log^2 x)}{\sqrt{1+2\log^2 x+\log^4 x-4\log^2 x}} \cdot \frac{2(1+\log^2 x-2\log^2 x)}{x\,(1+\log^2 x)^2}$$

$$= \frac{-2(1-\log^2 x)}{x\sqrt{(1-\log^2 x)^2}\;(1+\log^2 x)}$$

$$= \frac{-2}{x(1+\log^2 x)} \cdot \frac{(1-\log^2 x)}{|1-\log^2 x|} = \frac{-2\,\mathrm{sign}(1-\log^2 x)}{x\,(1+\log^2 x)}$$

Protože f je spojitá v $x=\frac{1}{e}$ a v $x=e$, platí

$$f'_-\left(\frac{1}{e}\right) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to\frac{1}{e}-} f'(x) = \lim_{x\to\frac{1}{e}-} \frac{2}{x(1+\lg^2 x)} = \frac{2e}{2} = e,$$

$$f'_+\left(\frac{1}{e}\right) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to\frac{1}{e}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{e}+} \frac{-2}{x(1+\log^2 x)} = \frac{-2e}{2} = -e,$$

$$f'_-(e) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to e-} f'(x) = \lim_{x\to e-} \frac{-2}{x(1+\lg^2 x)} = \frac{-2}{e\cdot 2} = -\frac{1}{e},$$

$$f'_+(e) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to e+} f'(x) = \lim_{x\to e+} \frac{2}{x(1+\lg^2 x)} = \frac{2}{e\cdot 2} = \frac{1}{e},$$

takže $f'(x)$ neexistuje pro $x\in\{\frac{1}{e}, e\}$.

Zbývá $f'_+(0)$. Jest $\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, neboť

$\lim_{x\to 0+} \frac{2\lg x}{1+\lg^2 x} = 0$, $\frac{2\lg x}{1+\lg^2 x} \neq 0$ pro $x\in P_+(0,1)$, $\lim_{y\to 0} \arccos y = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{takže} \quad f'_+(0) \overset{\text{VOCD}}{=} \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2}{x(1+\log^2 x)} = \infty .$$ [E4|3

(c) Dle (b) je $f'>0$ na $(0,\frac{1}{e})$, $f'<0$ na $(\frac{1}{e},e)$ a $f'>0$ na (e,∞).

Tedy f je rostoucí na $[0,\frac{1}{e}]$ a na $[e,\infty]$ a klesající na $[\frac{1}{e},e]$.

(d) ~~Dle~~ Jest $f(0)=\frac{\pi}{2}$, $f(\frac{1}{e}) = \arccos(-1) = \pi$, $f(e) = \arccos(1) = 0$

a f je spojitá a monotónní na $[0,\frac{1}{e}]$ i na $[\frac{1}{e},e]$, takže

$$f([0,e]) = [0,\pi].$$

(e) Pro $x\in(0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},e)\cup(e,\infty)$ je

$$f''(x) = \operatorname{sign}(1-\log^2 x)\, \frac{2\left(1+\log^2 x + x\cdot 2\log x\cdot \frac{1}{x}\right)}{x^2(1+\log^2 x)^2}$$

$$= \operatorname{sign}(1-\log^2 x)\, \frac{2\left(1+\log^2 x + 2\log x\right)}{x^2(1+\log^2 x)^2}$$

$$= \operatorname{sign}(1-\log^2 x)\, \frac{2(1+\log x)^2}{x^2(1+\log^2 x)^2} .$$

Tedy $f''<0$ na $(0,\frac{1}{e})$, $f''>0$ na $(\frac{1}{e},e)$, $f''<0$ na (e,∞).

Tedy f je konkávní na $(0,\frac{1}{e})$ a na (e,∞) a konvexní na $(\frac{1}{e},e)$. $\square$

Hodnocení

E1

výpočet ... 7 bodů

zdůvodnění ... 8 bodů

E2

$f'(x)$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ ... 3 body

spojitost f v 0 a 1 ... 2 body

$f'(k\pi)$ ... 3 body

$f'\left(\frac{(2k+1)}{2}\pi\right)$ ... 7 bodů

E3

výpočet ... 7 bodů

zdůvodnění ... 8 bodů

E4

(a) ... 2 body

(b) ... 5 bodů

(c) ... 2 body

(d) ... 2 body

(e) ... 4 body