MATEMATICKÁ ANALÝZA 1, ZIMNÍ SEMESTR 2022–2023
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA D

LUBOŠ PICK

Příklad D1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \operatorname{arccotg}(nx)}{\sqrt{n^2+1}} (\cos x)^n$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$. **(15 bodů)**

Příklad D2. Uvažujte funkci

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg} |x - \sqrt{3}|.$$

Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace funkce f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují. **(15 bodů)**

Příklad D3. Spočtěte limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x} \right)^{\frac{1}{\arcsin(x^3)}}.$$

(15 bodů)

Příklad D4. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x})^2}{e^x}.$$

(a) Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace funkce f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují.
(b) Určete intervaly monotonie funkce f.
(c) Nalezněte všechny lokální i globální extrémy funkce f.
(d) Určete intervaly konvexity a konkávity funkce f.
(e) Nalezněte všechny inflexní body funkce f.

(15 bodů)

D1 Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \operatorname{arccotg}(nx)}{\sqrt{n^2+1}} (\cos x)^n$$

v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení: Jest $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arccotg}(nx) = \begin{cases} 0, & x>0 \\ \frac{\pi}{2}, & x=0 \\ \pi, & x<0 \end{cases}$

Nechť $x\in(0,\infty)$. Potom $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \cdot |\cos x|^n \le 1$, tedy podle věty o limitě součinu omezené posloupnosti a posloupnosti s nulovou limitou je $\lim |a_n| = 0$, kde $a_n = \frac{n \operatorname{arccotg}(nx)}{\sqrt{n^2+1}} (\cos x)^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, a tedy také $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Nechť $x=0$. Potom $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1$, $n\in\mathbb{N}$, a tedy $\lim a_n = \frac{\pi}{2}$.

Nechť $x\in(-\infty,0) \setminus \{-k\pi;\ k\in\mathbb{N}\}$. Potom $|\cos x|<1$, a tedy $\lim |a_n| = 0$, a tedy $\lim a_n = 0$.

Nechť $x \in \{-2k\pi;\ k\in\mathbb{N}\}$. Potom $\cos x = 1$, a tedy (dle VOAL) $\lim a_n = \pi$.

Nechť $x \in \{(-2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{N}\}$. Potom $\cos x = -1$, a tedy

$$\lim a_{n_j} = \begin{cases} -\pi & \text{pro } n_j = 2j,\ j\in\mathbb{N}, \\ \pi & \text{pro } n_j = (2j+1),\ j\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Podle věty o limitě vybrané posloupnosti tedy $\lim a_n$ neexistuje.

Celkem: $\lim a_n = \begin{cases} 0, & x\in(0,\infty) \cup (-\infty,0) \setminus \{-k\pi;\ k\in\mathbb{N}\} \\ \frac{\pi}{2}, & x=0 \\ \pi, & x = -2k\pi,\ k\in\mathbb{N} \\ \ldots \end{cases}$ $\square$

D2 Uvažujte funkci $f(x) = |x| + \operatorname{arctg}|x-\sqrt{3}|$.

Spočtěte f', $f'_\pm$ všude, kde existují.

<u>Řešení</u>: Pro $x \in (-\infty, 0)$ je $f(x) = -x - \operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{1+(x-\sqrt{3})^2} = \frac{-2-(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2}.$$

Pro $x \in (0, \sqrt{3})$ je $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+(x-\sqrt{3})^2} = \frac{(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2}.$$

Pro $x \in (\sqrt{3}, \infty)$ je $f(x) = x + \operatorname{arctg}(x-\sqrt{3})$, a tedy

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+(x-\sqrt{3})^2} = \frac{2+(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2}.$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ (složení spojitých funkcí), a tedy

$$f'_-(0) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{-2-(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = \frac{-5}{4},$$

$$f'_+(0) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = \frac{3}{4},$$

$$f'_-(\sqrt{3}) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to \sqrt{3}-} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = 0,$$

$$f'_+(\sqrt{3}) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x\to \sqrt{3}+} f'(x) = \lim_{x\to \sqrt{3}+} \frac{2+(x-\sqrt{3})^2}{1+(x-\sqrt{3})^2} = 2.$$

D3 Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{\arcsin(x^3)}}$.

Řešení: Pro $x\in P(0,1)$ je

$$\left(\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{\arcsin(x^3)}}=\exp\left(\frac{x^3}{\arcsin(x^3)}\cdot\frac{\log\left(\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)}{\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}-1}\cdot\frac{\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}-1}{x^3}\right).$$

Protože $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\arcsin y}=1$ a $x^3\neq 0$ pro $x\in P(0,1)$, je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\arcsin(x^3)}=1$.

Protože $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}=1$, $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{\log y}{y-1}=1$ a $\dfrac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\neq 1$ pro $x\in P(0,1)$ (neboť $\operatorname{tg} x\neq \sin x$ pro $x\in P(0,1)$),

je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\left(\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)}{\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}-1}=1$. Dále platí pro $x\in P(0,1)$

$$\frac{\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}-1}{x^3}=\frac{1+\sin x-(1+\operatorname{tg} x)}{(1+\operatorname{tg} x)\,x^3}=\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\cdot x^3}=\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\cdot x^3}=\frac{\sin x(\cos x-1)}{(\cos x+\sin x)\,x^3}$$

$$=\frac{1}{\cos x+\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}.$$ Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}-1}{x^3}\overset{\text{VOAL}}{=}\frac{1}{1+0}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to 0}$ (argument funkce exp) $\overset{\text{VOAL}}{=} 1.1.\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

Protože funkce exp je spojitá v bodě $x=-\frac{1}{2}$, plyne odtud, že

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{\arcsin(x^3)}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.\qquad\square$$

$\boxed{D4}$ Uvažujte funkci $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{e^x}$. (a) Určete $f', f'_\pm$, (b) určete intervaly monotonie, (c) najděte všechny extrémy, (d) určete intervaly konvexity a konkávity, (e) najděte všechny inflexní body.

Řešení: (a) Pro $x \neq 0$ je $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}e^x - \sqrt[3]{x^2}\,e^x}{e^{2x}} = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{3} - x\right)$.

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ (skládání spojitých funkcí). Tedy

$$f'_-(0) \overset{VOLD}{=} \lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{3} - x\right) \overset{VOAL}{=} 1 \cdot (-\infty) \cdot \frac{2}{3} = -\infty,$$

$$f'_+(0) \overset{VOLD}{=} \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{3} - x\right) \overset{VOAL}{=} 1 \cdot \infty \cdot \frac{2}{3} = \infty.$$

(b) Pro $x \in (-\infty, 0)$ je $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající na $(-\infty, 0)$,

pro $x \in (0, \frac{2}{3})$ je $f'(x) > 0$, a tedy f je rostoucí na $(0, \frac{2}{3})$,

pro $x \in (\frac{2}{3}, \infty)$ je $f'(x) < 0$, a tedy f je klesající na $(\frac{2}{3}, \infty)$.

(c) Z (b) (a spojitosti f na $\mathbb{R}$) plyne, že f má lokální minimum $[0,0]$ a lokální maximum v $\left[\frac{2}{3}, \sqrt[3]{\frac{4}{9}}\,e^{-\frac{2}{3}}\right]$. Bod $[0,0]$ je zároveň globální minimum, protože $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0$. Funkce f nemá globální maximum, protože $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. Jiné extrémy funkce nemá, protože $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{2}{3}\}$ $\exists f'(x) \neq 0$, takže není splněna nutná podmínka extrému.

(d) Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{2}{3}\}$ jest

$$f''(x) = \frac{\left(-e^{-x}\left(\frac{2}{3} - x\right) - e^{-x}\right)\sqrt[3]{x} - e^{-x}\left(\frac{2}{3} - x\right)\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^{-2}}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\left(x - \frac{5}{3}\right) - \frac{\frac{1}{3}e^{-x}\left(\frac{2}{3} - x\right)}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^4}}\left(x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{9}\right).$$

D4/2

Spočteme kořeny rovnice $x^2-\frac{4}{3}x-\frac{2}{9}=0$. Jest

$$x_{1,2} = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{8}{9}}}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{24}{9}}}{2} = \frac{\frac{4}{3} \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{6}}{3}.$$

Povšimneme si, že $\frac{2-\sqrt{6}}{3}<0<\frac{2+\sqrt{6}}{3}$. Tedy

pro $x\in\left(-\infty, \frac{+2-\sqrt{6}}{3}\right)$ je $f''(x)>0$, a tedy f je konvexní na $\left(-\infty, \frac{+2-\sqrt{6}}{3}\right]$,

pro $x\in\left(\frac{+2-\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ je $f''(x)<0$, a tedy f je konkávní na $\left[\frac{+2-\sqrt{6}}{3}, 0\right)$,

pro $x\in\left(0, \frac{2+\sqrt{6}}{3}\right)$ je $f''(x)<0$, a tedy f je konkávní na $\left(0, \frac{2+\sqrt{6}}{3}\right]$,

pro $x\in\left(\frac{2+\sqrt{6}}{3}, \infty\right)$ je $f''(x)>0$, a tedy f je konvexní na $\left[\frac{2+\sqrt{6}}{3}, \infty\right)$.

(e) Platí $f''>0$ na $P_-\left(\frac{2-\sqrt{6}}{3}, \delta\right)$ a $f''<0$ na $P_+\left(\frac{2-\sqrt{6}}{3}, \delta\right)$ pro $\delta=-\frac{2-\sqrt{6}}{3}>0$, a $f''<0$ na $P_-\left(\frac{2+\sqrt{6}}{3}, \delta\right)$ a $f''>0$ na $P_+\left(\frac{2+\sqrt{6}}{3}, \delta\right)$ pro $\delta=\frac{2+\sqrt{6}}{3}>0$.

Podle postačující podmínky pro inflexi jsou body $\frac{2\pm\sqrt{6}}{3}$ inflexe f.

Pro $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0, \frac{2\pm\sqrt{6}}{3}\right\}$ $\exists f''(x)\neq 0$ a pro $x=0$ neexistuje $f'(0)$, takže pro ně není tedy splněna nutná podmínka pro inflexi, takže jiné inflexní body funkce nemá. $\square$

HODNOCENÍ

D1

$x > 0$ ... 3 body

$x = 0$ ... 2 body

$x \in (-\infty, 0) \setminus \{-k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ ... 3 body

$x = -2k\pi$ ... 3 body

$x = -(2k+1)\pi$ ... 4 body

D2

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \sqrt{3}\}$ ... 3 body

$f'_\pm(0)$, $f'_\pm(\sqrt{3})$ ... 12 bodů (4×3)

D3

výpočet ... 7 bodů

zdůvodnění ... 8 bodů

D4

(a) ... 2 body

(b) ... 2 body

(c) ... 3 body

(d) ... 4 body

(e) ... 4 body