MATEMATICKÁ ANALÝZA 1, ZIMNÍ SEMESTR 2022–2023
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA C

LUBOŠ PICK

Příklad C1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(e^n + \pi^n\right) \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+7} - \sqrt[3]{\sqrt{n^3}+1} \right).$$

(15 bodů)

Příklad C2. Uvažujte funkci

$$f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - x) \operatorname{arctg}^2(x-1).$$

Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace funkce f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují.

(15 bodů)

Příklad C3. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \frac{\arccos\left(\frac{x-1}{\log x}\right)}{\sqrt{1-x}}$$

je definovaná na nějakém levém prstencovém okolí bodu $x = 1$ a spočtěte $\lim_{x\to 1_-} f(x)$.

(15 bodů)

Příklad C4. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$f(x) = e^{x+\frac{2}{x}}.$$

(a) Určete definiční obor f.
(b) Určete obor hodnot f.
(c) Určete intervaly monotonie funkce f.
(d) Rozhodněte, zda je f konvexní na intervalu $(0, 2)$.
(e) Rozhodněte, zda f má asymptotu v $-\infty$ a v ∞ a pokud ano, určete je.

(15 bodů)

C1 Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \log(e^n+\pi^n)\left(\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+7}-\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+1}\right).$$

Řešení. Jest

$$\log(e^n+\pi^n) = \log\left(\pi^n\left(1+\left(\tfrac{e}{\pi}\right)^n\right)\right) = n\log\pi + \log\left(1+\left(\tfrac{e}{\pi}\right)^n\right),$$

a

$$\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+7}-\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+1} = \frac{\sqrt{n^3}+7-(\sqrt{n^3}+1)}{(n^{\frac{3}{2}}+7)^{\frac{2}{3}}+(n^{\frac{3}{2}}+7)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{1}{3}}+(n^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{6}{(n^{\frac{3}{2}}+7)^{\frac{2}{3}}+(n^{\frac{3}{2}}+7)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{1}{3}}+(n^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{6}{n}\cdot\frac{1}{(1+7n^{-\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}+(1+7n^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}(1+n^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}+(1+n^{-\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}}$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \log(e^n+\pi^n)\left(\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+7}-\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6\left(n\log\pi+\log\left(1+\left(\frac{e}{\pi}\right)^n\right)\right)}{n}\cdot\frac{1}{(1+7n^{-\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}+(1+7n^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}(1+n^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}+(1+n^{-\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(6\log\pi+\frac{\log\left(1+\left(\frac{e}{\pi}\right)^n\right)}{n}\right)\cdot\frac{1}{\dots} \overset{\text{VOAL}}{=} \frac{6\log\pi}{3} = \underline{\underline{2\log\pi}}. \quad \square$$

$\boxed{C2}$ Uvažujte funkci $f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - x)\operatorname{arctg}^2(x-1)$. Spočtěte $f', f'_\pm$.

Řešení. Jest $\operatorname{sign}(x^2-x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-\infty,0)\cup(1,\infty) \\ 0 & \text{pro } x \in \{0,1\} \\ -1 & \text{pro } x \in (0,1), \end{cases}$

$$\text{takže} \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}^2(x-1) & \text{pro } x \in (-\infty,0)\cup(1,\infty) \\ 0 & \text{pro } x \in \{0,1\} \\ -\operatorname{arctg}^2(x-1) & \text{pro } x \in (0,1), \end{cases}$$

$$\text{a tedy} \quad f'(x) = \frac{2\operatorname{arctg}(x-1)}{1+(x-1)^2} \quad \text{pro } x \in (-\infty,0)\cup(1,\infty),$$

$$f'(x) = \frac{-2\operatorname{arctg}(x-1)}{1+(x-1)^2} \quad \text{pro } x \in (0,1).$$

Dále jest $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\operatorname{arctg}^2(x-1)}{x} = -\infty$

a $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-\operatorname{arctg}^2(x-1)}{x} = -\infty,$

takže $f'(0) = -\infty$. Konečně platí

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{-\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1}\cdot\operatorname{arctg}(x-1) \overset{VOAL}{=} -1\cdot 0 = 0,$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1}\cdot\operatorname{arctg}(x-1) \overset{VOAL}{=} 1\cdot 0 = 0.$$

Tedy $f'(1) = 0$. $\square$

C3 Dokažte, že funkce $f(x) = \dfrac{\arccos\left(\frac{x-1}{\log x}\right)}{\sqrt{1-x}}$ je definovaná na nějakém (levém) prstencovém okolí bodu 1 a spočtěte $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$.

Řešení. Položme $g(x) = x-1-\log x$ pro $x \in (0,1]$. Potom $g'(x) = 1-\frac{1}{x} < 0$ pro každé $x \in (0,1)$, a tedy je g klesající na $(0,1]$. Protože g je spojitá zleva v 1 a platí $g(1)=0$, je $g(x)>0$ pro každé $x \in (0,1)$. Tedy $x-1 > \log x$ pro každé $x \in (0,1)$, tak že $0 < \frac{x-1}{\log x} < 1$ pro $x \in (0,1)$. Odtud plyne, že f je dobře definovaná na ~~(0,1)~~ $P_-(1,1)$.

Dále jest

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\arccos\left(\frac{x-1}{\log x}\right)}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\arccos\left(\frac{x-1}{\log x}\right)}{\sqrt{1-\frac{x-1}{\log x}}} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{x-1}{\log x}}{1-x}}.$$

Protože • $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{x-1}{\log x} = 1$, $\forall x \in P_-(1,1): \frac{x-1}{\log x} < 1$, $\lim\limits_{y\to 1-} \frac{\arccos y}{\sqrt{1-y}} = \sqrt{2}$,

platí $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\arccos\left(\frac{x-1}{\log x}\right)}{\sqrt{1-\frac{x-1}{\log x}}} = \sqrt{2}$. Dále platí

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1-\frac{x-1}{\log x}}{1-x} = \lim_{x\to 1-} \frac{\log x - x + 1}{(1-x)\log x} = \lim_{x\to 1-} \frac{x-1}{\log x} \cdot \frac{\log x - x + 1}{(x-1)^2} \cdot (-1).$$

Platí $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{x-1}{\log x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{\log x - x + 1}{(x-1)^2} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1-} \frac{1-x}{2(x-1)x}$

$$= \lim_{x \to 1-} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Tedy dle VOAL je $\displaystyle\lim_{x \to 1-} \frac{1 - \frac{x-1}{\log x}}{1-x} = \frac{1}{2}.$

Protože funkce $y \mapsto \sqrt{y}$ je spojitá v bodě $y = \frac{1}{2}$, platí

$$\lim_{x \to 1-} \sqrt{\frac{1 - \frac{x-1}{\log x}}{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tedy dle VOAL $\displaystyle\lim_{x \to 1-} \frac{\arccos\left(\frac{x-1}{\log x}\right)}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{1}.$ $\square$

[C4] Uvažujte funkci $f(x) = e^{x+\frac{2}{x}}$. [C4

(a) určete $D(f)$, (b) určete $H(f)$, (c) určete intervaly monotonie f, (d) rozhodněte, zda je f konvexní na $(0,2)$, (e) určete asymptoty.

Řešení: (a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (exp je def. na $\mathbb{R}$), f je spojitá na $D(f)$.

(b) $f'(x) = e^{x+\frac{2}{x}}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, takže

$f' > 0$ na $(-\infty,-\sqrt{2})$ a na $(\sqrt{2},\infty)$, $f' < 0$ na $(-\sqrt{2},0)$ a na $(0,\sqrt{2})$,

tedy f je rostoucí na $(-\infty,-\sqrt{2}]$ a na $[+\sqrt{2},\infty)$ a klesající na $[-\sqrt{2},0)$ a na $(0,\sqrt{2}]$. Tedy má f bod lokálního maxima v $x=-\sqrt{2}$ a bod lokálního minima v $x=\sqrt{2}$. Dále platí

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$,

takže $f((-\infty,-\sqrt{2}]) = f([-\sqrt{2},0)) = (0,e^{-2\sqrt{2}}]$ a $f((0,\sqrt{2}]) = f([\sqrt{2},\infty)) = [e^{2\sqrt{2}},\infty)$.

Odtud plyne, že $H(f) = (0,e^{-2\sqrt{2}}] \cup [e^{2\sqrt{2}},\infty)$.

(c) Z (b) plyne, že $f \uparrow$ na $(-\infty,-\sqrt{2}]$ a $[\sqrt{2},\infty)$, $f \downarrow$ na $[-\sqrt{2},0)$ a $(0,\sqrt{2}]$.

(d) $f''(x) = e^{x+\frac{2}{x}}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^2 + e^{x+\frac{2}{x}} \cdot \frac{4}{x^3}$ ~~$\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{4}{x^4}\right)$~~ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

~~[illegible]~~ tedy $f'' > 0$ na $(0,\infty)$, tedy f je konvexní na $(0,2)$.

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, takže 0 je asymptotou f v $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, takže asymptota v ∞ neexistuje. $\square$

HODNOCENÍ

C1

výpočet limit ... 10 bodů

zhodnocení -- 5 bodů

C2

$f'(x)$ pro $x \in (-\infty, 0)$ ... 2

$f'(x)$ pro $x \in (0, 1)$ ... 2

$f'(x)$ pro $x \in (0, 1]$ ... 2

$f'_{\pm}(0)$ ------ 4

$f'_{\pm}(1)$ ------ 5

C3

důkaz, že f je def. na $\underline{P}(1, \delta)$ ... 5

výpočet limit ... 5

zdůvodnění --- 5

C4

(a) 1 bod

(b) 6 bodů

(c) 2 body

(d) 3 body

(e) 3 body