MATEMATICKÁ ANALÝZA 1, ZIMNÍ SEMESTR 2022–2023
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA A

LUBOŠ PICK

Příklad A1. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}\right)^{\frac{\log n}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}}.$$

(15 bodů)

Příklad A2. Uvažujte funkci

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\log\left(\frac{2+\sin x}{2}\right)}{x}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace funkce f ve všech bodech, kde existují. Určete body, kde tyto derivace neexistují. **(15 bodů)**

Příklad A3. Spočtěte limitu funkce.

$$\lim_{x\to 0_-}\frac{\sqrt{e^{x^6}-1}}{\arcsin x-\operatorname{tg} x}.$$

(15 bodů)

Příklad A4. Uvažujte funkci f definovanou předpisem

$$f(x)=\arcsin\left|\frac{1-x}{1-2x}\right|.$$

(a) Určete definiční obor f.
(b) Spočtěte první derivaci i jednostranné první derivace funkce f ve všech bodech, kde existují.
(c) Určete intervaly monotonie funkce f.
(d) Určete obor hodnot f.
(e) Rozhodněte, zda f má asymptotu v $-\infty$ a v ∞ a pokud ano, určete je.

(15 bodů)

$\boxed{A1}$ Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}\right)^{\frac{\log n}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

<u>Řešení</u>: Platí $\left(\lim \frac{\log(n+1)}{\log(n+3)} = \lim \frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n+\log\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim \frac{1+\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}}{1+\frac{\log\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\log n}} \overset{VOAL}{=} \frac{1+0}{1+0}=1\right)$

$$\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}\right)^{\frac{\log n}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}} = e^{\frac{\log n}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\log\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}\right)}{\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}-1\right)}\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}-1\right)}.$$

Dále jest $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}=1$, $\forall n\in\mathbb{N}\ \frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}\neq 1$, $\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}=1$, takže dle VOLSF$^{(P)}$ a Heineovy věty platí $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}\right)}{\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}-1}=1$. Dále

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log(n+3)}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\log(n+1)-\log(n+3)}{\frac{1}{n}}.$$

Máme $\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log(n+3)}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\overset{Heine}{=}1$ $\left(\frac{1}{n}\to 0,\ \frac{1}{n}\neq 0\ \forall n,\ \frac{\sin y}{y}\xrightarrow{y\to 0}1\right)$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)-\log(n+3)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1-\frac{2}{n+3}\right)}{-\frac{2}{n+3}}\cdot\frac{-\frac{2}{n+3}}{\frac{1}{n}}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+3}\right)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}: 1-\frac{2}{n+3}\neq 1$, $\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}$, je dle Heineho $\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1-\frac{2}{n+3}\right)}{-\frac{2}{n+3}}=1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{2}{n+3}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(-2)\frac{n}{n+3}=-2$,

takže $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)-\log(n+3)}{\frac{1}{n}}\overset{VOAL}{=}1\cdot(-2)=-2$. Celkem (VOAL) $\lim_{n\to\infty}(\text{exponent})=-2$. Protože exp je spojitá v $x=-2$, máme dle VOLSF(S): $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n+1)}{\log(n+3)}\right)^{\frac{\log n}{\sin\frac{1}{n}}}=\underline{\underline{e^{-2}}}$. $\square$

A2 Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log\left(\frac{2+\sin x}{2}\right)}{x}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Spočtěte f' a $f'_\pm$ ve všech bodech, kde existují.

Řešení: Pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ platí

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{2+\sin x}\cdot\frac{\cos x}{2}\cdot x - \log\left(\frac{2+\sin x}{2}\right)}{x^2} = \frac{x\cos x - (2+\sin x)\log\left(\frac{2+\sin x}{2}\right)}{x^2(2+\sin x)}.$$

Platí

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\log\left(\frac{2+\sin x}{2}\right) - \frac{1}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{\sin x}{2}\right) - \frac{x}{2}}{x^2} \overset{l'H\%}{=}$$

$$\overset{l'H\%}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{2+\sin x}\cdot\frac{\cos x}{2} - \frac{1}{2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos x - 2 - \sin x}{4x(2+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sin x}\left(\frac{\cos x - 1}{2x} - \frac{\sin x}{4x}\right) \overset{VOAL}{=} \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Tedy $f'(0) = -\frac{1}{8}$. □

$\boxed{A3}$ Spočtěte limitu $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{e^{x^6}-1}}{\arcsin x - \operatorname{tg} x}$.

<u>Řešení</u>: Pro $x \in (-\infty,0)$ je $\sqrt{x^6} = -x^3$, takže $\sqrt{e^{x^6}-1} = \sqrt{\frac{e^{x^6}-1}{x^6}} \cdot (-x^3)$.

Označme L zadanou limitu. Potom tedy $L = \displaystyle\lim_{x\to 0-} \sqrt{\frac{e^{x^6}-1}{x^6}} \cdot \frac{x^3}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}$.

Jest $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0-} x^6 = 0$, $\forall x \in (-\infty,0): x^6 \neq 0$, takže (VOLSF(P)) $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{e^{x^6}-1}{x^6} = 1$.

Funkce $y \mapsto \sqrt{y}$ je spojitá v bodě $y=1$, a tedy (VOLSF(S1)) $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \sqrt{\frac{e^{x^6}-1}{x^6}} = 1$.

Dále jest

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x^3}{\operatorname{tg} x - \arcsin x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0-} \frac{3x^2}{\frac{1}{\cos^2 x} - \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}} = \lim_{x\to 0-} \frac{3x^2 \cos^2 x \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} - \cos^2 x}.$$

Platí $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \cos^2 x = 1$ a $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \sqrt{1-x^2} = 1$. Dále platí

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)} + \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0-} \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}+1} + \frac{1-\cancel{\cos}^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x\to 0-} \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}+1} + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \overset{VOAL}{=} -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Protože $\frac{1}{2} \neq 0$, platí dle VOAL $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{3x^2 \cos^2 x \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} - \cos^2 x} =$

$$= \lim_{x\to 0-} 3 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2} - \cos^2 x} \cdot \cos^2 x \cdot \sqrt{1-x^2} \overset{VOAL}{=} 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{6}$$

Celkem tedy dle VOAL platí

$$L = \lim_{x\to 0-} \sqrt{\frac{e^{x^6}-1}{x^6}} \cdot \frac{x^3}{\operatorname{tg} x - \arcsin x} \overset{VOAL}{=} 1 \cdot 6 = \underline{6}.$$

□

A4 Uvažujte funkci $f(x) = \arcsin\left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$.

(a) Určete $D(f)$, ~~[illegible]~~ (b) Spočtěte f', $f'_\pm$ všude, kde existují.

(c) Určete intervaly monotonie. (d) Určete $H(f)$ (e) Určete asymptoty.

Řešení (a) Zřejmě $\frac{1}{2} \notin D(f)$. Nechť $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$. Potom

$-1 \le \frac{1-x}{1-2x} \iff 2x-1 \le 1-x \iff 3x \le 2 \iff x \le \frac{2}{3}$,

$\frac{1-x}{1-2x} \le 1 \iff 1-x \le 1-2x \iff x \le 0$, takže $\frac{1-x}{1-2x} \in [-1,1] \iff x \in (-\infty, 0]$.

Nechť $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$, potom $-1 \le \frac{1-x}{1-2x} \iff 2x-1 \ge 1-x \iff 3x \ge 2 \iff x \ge \frac{2}{3}$,

$\frac{1-x}{1-2x} \le 1 \iff 1-x \ge 1-2x \iff x \ge 0$, takže $\frac{1-x}{1-2x} \in [-1,1] \iff x \in [\frac{2}{3}, \infty)$.

Tedy $D(f) = (-\infty, 0] \cup [\frac{2}{3}, \infty)$.

(b) Nechť $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, potom $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2}} \cdot \frac{(-1)(1-2x)-(-2)(1-x)}{(1-2x)^2}$

$$= \frac{|1-2x|}{\sqrt{(1-2x)^2-(1-x)^2}\,(1-2x)^2} = \frac{1}{|1-2x| \cdot \sqrt{3x^2-2x}}.$$

Nechť $x \in (\frac{2}{3}, 1)$. Potom $f'(x) = \frac{-1}{|1-2x|\sqrt{3x^2-2x}} = \frac{-1}{(2x-1)\sqrt{3x^2-2x}}$

Podle VOAL je f spojitá na svém definičním oboru (zleva v 0 a zprava v $\frac{3}{2}$). Tedy

$$f'_-(0) \overset{VOLD}{=} \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0_-} \frac{1}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}} = \infty,$$

$$f'_+\left(\tfrac{2}{3}\right) \overset{VOLD}{=} \lim_{x\to \frac{2}{3}+} f'(x) = \lim_{x\to\frac{2}{3}+} \frac{1}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}} = -\infty,$$

$$f'_\pm(1) \overset{VOLD}{=} \lim_{x\to 1\pm} f'(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{\mp 1}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}} = \pm 1$$

$f'_+(1) = 1$

$f'_-(1) = -1$.

A4/2

(c) Z (b) plyne, že $f' > 0$ na $(-\infty, 0)$ a na $(1, \infty)$ a $f' < 0$ na $(\frac{2}{3}, 1)$, takže f je rostoucí na $(-\infty, 0]$ a na $[1, \infty)$ a klesající na $[\frac{2}{3}, 1]$.

(d) Z vlastností funkce arcsin plyne, že $H(f) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Dále platí $f(\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{2}$, $f(1) = 0$ a f je spojitá na $[\frac{2}{3}, 1]$. Dle Bolzanovy věty tedy $\forall y \in [0, \frac{\pi}{2}]\ \exists x \in [\frac{2}{3}, 1]$ splňující $f(x) = y$. Tedy $[0, \frac{\pi}{2}] \subset H(f)$, takže celkem $H(f) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

(e) Jest $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ podle věty o nevlastní limitě podílu.

Dále jest $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - 0) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \arcsin \left| \frac{1-x}{1-2x} \right|$.

Jest $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left| \frac{1-x}{1-2x} \right| = \frac{1}{2}$, a platí $\lim\limits_{y \to \frac{1}{2}} \arcsin y = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Protože funkce arcsin je spojitá v $\frac{1}{2}$, platí dle VOLSF(s) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{6}$. Tedy f má v $+\infty$ i v $-\infty$ asymptotu $\frac{\pi}{6}$. $\square$

HODNOCENÍ

$\boxed{A1}$ výpočet ... 7 bodů
zdůvodnění ... 8 bodů

$\boxed{A2}$ $f'(x)$, $x \neq 0$ ... 5 bodů
$f'(0)$ ... 10 bodů

$\boxed{A3}$ výpočet ... 8 bodů
zdůvodnění ... 7 bodů

$\boxed{A4}$ (a) ... 3 body
(b) ... 4 body
(c) ... 2 body
(d) ... 3 body
(e) ... 3 body