MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 - LETNÍ SEMESTR 2022–2023
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

6. Číselné řady

6.1. Základní pojmy.

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme **nekonečnou řadou**, případně zkráceně **řadou**, přičemž číslo a_n je **n-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Položíme-li pro $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

nazýváme číslo s_n **n-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definice. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je limita posloupnosti $\{s_n\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní.

Pro jemnější rozlišení mezi dvěma různými typy divergentních řad budeme někdy říkat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje k** ∞, respektive **diverguje k** $-\infty$, jestliže $\lim s_n = \infty$, respektive $\lim s_n = -\infty$, a že že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (osciluje)**, jestliže $\lim s_n$ neexistuje.

Poznámka. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí jednak řadu, jednak součet řady, pokud tento součet existuje. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme použít k označení prvku z množiny $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada má součet. Potom uvedená dvojznačnost nepůsobí žádné potíže.

Poznámka. Podle chování posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ můžeme provést toto rozlišení:

$$\lim s_n \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{vlastní, pak řada konverguje,} \\ \text{nevlastní a je rovna} \begin{cases} \infty, \text{pak řada diverguje k } \infty, \\ -\infty, \text{pak řada diverguje k } -\infty, \end{cases} \end{cases} \\ \text{neexistuje, pak řada diverguje (osciluje).} \end{cases}$$

Poznámka. Pojem nekonečné řady je možné zobecnit v podobném smyslu, jako jsme to provedli pro posloupnosti. Nechť $k \in \mathbb{Z}$ a $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Potom symbol $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ označuje **řadu**, kde sčítací index probíhá množinu $\mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_n\}_{n=k}^{\infty}$, kde

$$s_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n,$$

pak tuto limitu nazýváme **součtem řady** a značíme ji opět $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **konvergentní**, je-li jejím součtem reálné číslo. Řekneme, že řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ je **divergentní**, jestliže $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ je divergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$. Potom platí:

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{je-li } n \text{ liché,} \\ 0, & \text{je-li } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odtud plyne, že $\lim s_n$ neexistuje. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ tedy diverguje (osciluje).

Definice. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Potom řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nazýváme **geometrickou řadou** a číslo q jejím **kvocientem**.

Příklad. Nechť $q \in \mathbb{R}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Jestliže $q = 1$, pak $s_n = n + 1$, a tedy $\lim s_n = \infty$, takže řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ diverguje. Jestliže $q \neq 1$, potom $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Jestliže $|q| < 1$, potom $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$, a tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje. Jestliže $q > 1$, potom $\lim s_n = \infty$, a řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ tedy diverguje. Jestliže $q = -1$, pak řada diverguje podle předcházejícího příkladu. Jestliže $q < -1$, potom

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} s_{2k} = \infty.$$

Odtud vyplývá, že

$$\liminf s_n = -\infty \quad \text{a} \quad \limsup s_n = \infty,$$

takže $\lim s_n$ neexistuje, a řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ tedy diverguje.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní a její součet je roven 1.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Potom

$$\lim s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Definice. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme **harmonickou řadou**.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní a její součet je ∞.

Řešení. Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{s_n\}$ rostoucí, a tedy má limitu. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$. Potom

$$s_{2n_0} - s_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \geq n_0 \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}.$$

Posloupnost $\{s_n\}$ tedy nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, takže $\lim s_n = \infty$. Odtud plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Poznámka. Všimněme si rozdílu mezi úlohou vyjádřit hodnotu součtu dané řady (pokud existuje) pomocí známých konstant a úlohou rozhodnout, zda daná řada konverguje či diverguje. Řešení první úlohy dává výsledek i pro druhou. Určit součet dané řady může být však velmi obtížné až neřešitelné. V takovém případě je pro nás otázka konvergence řady velice důležitá.

Poznámka. Změna konečně mnoha členů řady nemá vliv na konvergenci či divergenci řady či na existenci jejího součtu. Změnou konečně mnoha členů řady však můžeme samozřejmě změnit hodnotu součtu řady.

konec 0. přednášky (6.1.2023)

Věta 6.1 (nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Označme $s_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$ pro $m \in \mathbb{N}$ a $s_0 = 0$. Potom $a_m = s_m - s_{m-1}$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Podle předpokladu existuje vlastní $\lim s_m$, kterou označíme A. Tedy existuje také $\lim s_{m-1}$ a platí $\lim s_{m-1} = A$. Tedy $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = A - A = 0$. □

Poznámka. Opačná implikace v tvrzení Věty 6.1 neplatí. Například $\lim \frac{1}{n} = 0$, avšak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Poznámka. Větu 6.1 lze užít k odvození divergence řady. Například $\lim(-1)^n$ neexistuje, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje. Věta 6.1 nám tak poskytuje jiné řešení příkladu.

Věta 6.2 (Bolzanova–Cauchyova podmínka)**.** *Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní právě tehdy, když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,\ m > n\colon \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Důkaz. Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, platí $\sum_{k=n+1}^{m} a_k = s_m - s_n$. Výrok (1) tedy platí právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0\colon |s_m - s_n| < \varepsilon,$$

což nastává právě tehdy, když $\{s_n\}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku pro posloupnosti, tedy právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. □

Poznámka. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku právě tehdy, když

$$\exists C > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0\colon \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < C\varepsilon.$$

Věta 6.3 (řady a aritmetické operace)**.** *Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají součet. Jestliže $\alpha \in \mathbb{R}$ a výraz $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován, potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jestliže je výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ definován, potom má řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ součet a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \alpha s_m = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Podobně

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

Důsledek (linearita množiny konvergentních řad)**.** *Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$.*

Poznámka. Množina všech konvergentních řad tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

Věta 6.4 (konvergentní a divergentní řada)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní řada. Potom je řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ divergentní.*

Důkaz. Provedeme důkaz nepřímo. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ je konvergentní. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní, je podle důsledku také řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. □

6.2. **Kritéria konvergence řad.**

Poznámka. Jestliže je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy, potom je buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, nebo diverguje k ∞. Jinými slovy, řada s nezápornými členy má vždy součet, který je nezáporným prvkem $\mathbb{R}^*$ a může být buď konečný, nebo nekonečný.

Věta 6.5 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $a_n \leq b_n$.*

(a) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
(b) *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Důkaz. (a) Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Posloupnost $\{t_n\}$ je konvergentní, a tedy je posloupnost $\{s_{n_0} + t_n\}$ shora omezená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $s_n \leq s_{n_0} + t_n$, a tedy je i posloupnost $\{s_n\}$ shora omezená. Navíc je neklesající, a tedy konvergentní. Podle definice je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Tvrzení plyne z (a). □

konec 1. přednášky (14.2.2023)

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentní pro každé $\alpha \in [2, \infty)$ a divergentní pro každé $\alpha \in (-\infty, 1]$.

Řešení. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ označme $a_n = n^{-\alpha}$. Nechť $\alpha \in [2, \infty)$. Označme $b_n = \frac{2}{n(n+1)}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom jsou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} = b_n.$$

Z výše uvedeného příkladu vyplývá, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní, a tedy je podle Věty 6.3 konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Podle Věty 6.5(a) je tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Nechť $\alpha \in (-\infty, 1]$. Označme $c_n = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom jsou $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řady s nezápornými členy a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$c_n \leq a_n.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diverguje, podle Věty 6.5(b) diverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka. Zatím nevíme, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje, či diverguje pro $\alpha \in (1, 2)$.

Věta 6.6 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy a existuje* $\lim \frac{a_n}{b_n}$. *Označme* $A = \lim \frac{a_n}{b_n}$.

(a) *Jestliže $A \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*
(b) *Jestliže $A = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
(c) *Jestliže $A = \infty$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Důkaz. (a) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2}. \tag{2}$$

$\Rightarrow$ Z první nerovnosti v (2) vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $b_n < \frac{2}{A} a_n$. Podle Věty 6.3 konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{A} a_n$, a tedy podle Věty 6.5(a) konverguje také $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

$\Leftarrow$ Z druhé nerovnosti v (2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n < \frac{3A}{2} b_n$. Obdobným způsobem jako v důkazu opačné implikace lze nyní dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

(b) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$. Pak $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Podle Věty 6.5(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(c) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \geq b_n$. Podle Věty 6.5(a) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. $\square$

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{5n^4+3}$ je konvergentní.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$a_n = \frac{2n^2+1}{5n^4+3} \qquad \text{a} \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Potom jsou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy a platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{5}$. Podle výše uvedeného příkladu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Podle Věty 6.6(a) je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Věta 6.7 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

(a) *Jestliže*
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\colon\ \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$
pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
(b) *Jestliže* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(c) *Jestliže* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
(d) *Jestliže* $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*

(e) *Jestliže* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. (a) Z předpokladu plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $a_n \leq q^n$. Protože je $q \in (0,1)$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergentní. Podle Věty 6.5(a) je tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(b) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Zvolme $q \in (A, 1)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sup\{\sqrt[n]{a_n}; n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} < q$. Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \sqrt[n]{a_n} < q.$$

Tvrzení tedy plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Označme $A = \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Protože $A > 1$, nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$. Tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $a_{n_k} \geq 1$. To znamená, že neplatí $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$, a tedy ani $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Podle Věty 6.1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Tvrzení plyne z (d). □

Poznámka. Jestliže $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel splňující $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ může konvergovat i divergovat. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, přičemž $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Příklad. Nechť $a > 1$ a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ konverguje.

Řešení. Platí

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

Podle Věty 6.7(c) tedy řada konverguje.

Věta 6.8 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(a) *Jestliže*

$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(b) *Jestliže* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(c) *Jestliže* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(d) *Jestliže* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz. (a) Matematickou indukcí dokážeme výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_n \leq q^{n-n_0} a_{n_0}. \tag{3}$$

Pro $n = n_0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že nerovnost v (3) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n \leq q a_n \leq q q^{n-n_0} a_{n_0} = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

přičemž první nerovnost plyne z předpokladu věty a druhá z indukčního předpokladu. Tím je podle principu matematické indukce dokázán výrok (3). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} a_{n_0}$ konverguje. Podle Věty 6.5(a) tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Nalezneme $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$

Tvrzení pak plyne z (a).

(c) Tvrzení plyne z (b).

(d) Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \colon \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} a_{n_0} \geq a_{n_0}.$$

Podle předpokladu platí $a_{n_0} > 0$, a tedy neplatí $\lim a_n = 0$. Podle Věty 6.1 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. $\square$

konec 2. přednášky (17.2.2023)

Poznámka. Jestliže $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}$ může konvergovat i divergovat. Například řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, přičemž obě řady splňují $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Poznámka. Předpoklad $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ nezaručuje divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Například řada

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \cdots$$

konverguje, ale $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Příklad. Rozhodněte, pro která $k \in \mathbb{N}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$.

Řešení. Řada zřejmě diverguje pro $k = 1$. Předpokládejme, že $k \geq 2$. Řada má kladné členy a pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k}{(kn+1)\dots(kn+k)} = \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+\frac{1}{n})\dots(k+\frac{k}{n})}. \tag{4}$$

Odtud plyne, že $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = k^{-k} < 1$. Podle Věty 6.8(c) tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta 6.9 (kondenzační kritérium)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.*

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j \quad \text{a} \quad t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}.$$

$\Leftarrow$ Označme $A = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$. Potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $m \leq 2^k - 1$. Potom

$$s_m \leq s_{2^k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n \leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \leq A.$$

Posloupnost $\{s_m\}$ je tudíž shora omezená, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

$\Rightarrow$ Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Potom $B \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k \leq m$. Potom

$$s_m = a_1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_j \geq a_1 + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j} = \frac{t_k}{2},$$

takže $t_k \leq 2B$. Tudíž je posloupnost $\{t_k\}$ je shora omezená, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje. $\square$

Věta 6.10 (o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.*

Důkaz. Díky výše uvedeným příkladům stačí tvrzení dokázat pro $\alpha \in (1, 2)$. Z vlastností funkcí exp a log plyne, že $\{\frac{1}{n^\alpha}\}$ je nerostoucí posloupnost kladných reálných čísel. Podle kondenzačního kritéria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

To je geometrická řada s kvocientem $2^{1-\alpha}$, a tedy konverguje právě tehdy, když $2^{1-\alpha} < 1$, to jest právě tehdy, když $\alpha > 1$. $\square$

Věta 6.11 (Leibnizova)**.** *Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost reálných čísel splňující $\lim a_n = 0$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{a_n\}$ je nerostoucí. Potom $\lim a_n = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = 0$, a tedy $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme pro $m \in \mathbb{N}$

$$s_m = \sum_{n=1}^{m}(-1)^n a_n.$$

Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2m+2} - s_{2m} = a_{2m+2} - a_{2m+1} \leq 0 \quad \text{a} \quad s_{2m+1} - s_{2m-1} = -a_{2m+1} + a_{2m} \geq 0,$$

neboť $\{a_n\}$ je nerostoucí. Tedy posloupnost $\{s_{2m}\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{s_{2m-1}\}$ je neklesající. Díky větě o limitě monotónní posloupnosti mají obě posloupnosti limitu. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $s_{2m-1} = s_{2m} - a_{2m}$. Z předpokladu víme, že $\lim a_n = 0$, a tedy díky větě o limitě vybrané posloupnosti také $\lim_{m\to\infty} a_{2m} = 0$. Z věty o aritmetice limit tedy dostáváme

$$\lim s_{2m-1} = \lim(s_{2m} - a_{2m}) = \lim s_{2m},$$

takže posloupnosti $\{s_{2m}\}$ a $\{s_{2m+1}\}$ mají společnou limitu, kterou označíme s. Odtud plyne, že $\lim s_n = s$. Protože pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$s_1 \leq s_{2m-1} = s_{2m} - a_{2m} \leq s_{2m} \leq s_2,$$

je $s \in \mathbb{R}$, takže $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konverguje. Jestliže je $\{a_n\}$ neklesající, lze tvrzení dokázat obdobně. □

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentní.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nerostoucí a platí $\lim \frac{1}{n} = 0$. Z Věty 6.11 tedy plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ je konvergentní.

Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n)^{12}$.

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\cos(\pi n) = (-1)^n$. Posloupnost $\{(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n)^{12}\}$ je nerostoucí a platí $\lim(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n)^{12} = 0$. Z Věty 6.11 tedy plyne, že zadaná řada je konvergentní.

konec 3. přednášky (21.2.2023)

6.3. **Absolutní konvergence.**

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **neabsolutně konvergentní**, jestliže je konvergentní a není absolutně konvergentní.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je absolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $|a_n| = \frac{1}{n^2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, a tedy je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ absolutně konvergentní.

Příklad. Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$je neabsolutně konvergentní.

Řešení. Označme $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ a $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\{b_n\}$ nerostoucí posloupnost splňující $\lim b_n = 0$, a tedy je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní podle Věty 6.11. Naproti tomu je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentní podle Věty 6.10. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní.

Věta 6.12 (absolutní a neabsolutní konvergence)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a platí $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.*

Důkaz. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní, a tedy splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n$, platí $\sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $m \geq n$, platí

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon,$$

a tedy také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Podle Věty 6.2 tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|s_n| \leq \sigma_n$. Odtud plyne, že $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. □

6.4. **Přerovnávání řad.**

Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Je-li $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ **přerovnáním** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 6.13 (přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Potom přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$.*

Důkaz. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}.$$

Potom $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$ a platí

$$\sum_{j=1}^{m} \left|a_{\pi(j)}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|.$$

Odtud plyne, že řada $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{\pi(j)}|$ konverguje, a tedy řada $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\pi(j)}$ konverguje absolutně. Označme $s_n = a_1 + \dots + a_n$ a $t_n = a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(n)}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, $t = \lim_{n\to\infty} t_n$. Potom s a t jsou dobře definovaná reálná čísla, neboť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutně konvergují, a tedy i konvergují. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\pi(j)}| < \varepsilon. \tag{5}$$

Dále nalezneme $n, j \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned} \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}, \\ \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi(1), \dots, \pi(j)\}. \end{aligned}$$

Položme $k = \max\{j, n\}$. Potom $k \geq n$ a

$$\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, k\}, \tag{6}$$

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}. \tag{7}$$

Zvolme libovolné $p \in \mathbb{N}$, $p \geq k$. Označme

$$\begin{aligned} A &= \{1, \dots, p\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(p)\}, \\ B &= \{\pi(1), \dots, \pi(p)\} \setminus \{1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Pak podle (7) máme $A \subset \{i \in \mathbb{N}; i > m\}$ a podle (6) je $B \subset \{\pi(j); j \in \mathbb{N}, j > m\}$. Tedy

$$\begin{aligned} |s_p - t_p| &= \Big|\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{j=1}^{p} a_{\pi(j)}\Big| = \Big|\sum_{i\in A} a_i - \sum_{j\in B} a_{\pi(j)}\Big| \leq \sum_{i\in A} |a_i| + \sum_{j\in B} \left|a_{\pi(j)}\right| \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| + \sum_{j=m+1}^{\infty} \left|a_{\pi(j)}\right| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $s - t = \lim_{p\to\infty}(s_p - t_p) = 0$, a tedy $s = t$. □

Příklad. Uvažujme řadu
$$\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdots$$
Dokažte, že existuje přerovnání této řady, které má jiný součet než původní řada.

Řešení. Zadanou řadu přepíšeme ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2n-1}=\frac{1}{n}$, $a_{2n}=-\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Pro částečné součty této řady platí $s_{2n-1}=\frac{1}{n}$ a $s_{2n}=0$, $n\in\mathbb{N}$. Odtud plyne, že $\lim s_n=0$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=0$. Položme
$$\pi(n)=\begin{cases}4k-3, & \text{jestliže } n=3k-2,\ k\in\mathbb{N},\\ 4k-1, & \text{jestliže } n=3k-1,\ k\in\mathbb{N},\\ 2k, & \text{jestliže } n=3k,\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$
Potom platí
$$a_{\pi(3k-2)}=\frac{1}{2k-1},\quad a_{\pi(3k-1)}=\frac{1}{2k},\quad a_{\pi(3k)}=-\frac{1}{k},\quad k\in\mathbb{N},$$
a tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\dots,$$

Označme n-tý částečný součet přerovnané řady symbolem σ_n. Potom platí
$$\sigma_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(a_{\pi(3k-2)}+a_{\pi(3k-1)}+a_{\pi(3k)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2k}, \tag{8}$$
$$\sigma_{3n+1}=\sigma_{3n}+\frac{1}{2n+1}, \tag{9}$$
$$\sigma_{3n+2}=\sigma_{3n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}. \tag{10}$$

Protože pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2k-1)2k}\le\frac{1}{k^2}$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)2k}$ konvergentní podle srovnávacího kritéria. Její součet je kladný, neboť členy řady jsou kladné. Podle (8) tedy platí vztah $\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n}=s\in(0,\infty)$. Nyní snadno podle (9) a (10) dostáváme, že platí také $\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\sigma_{3n+2}=s$. Tedy $\lim\sigma_n=s$. Součet přerovnané řady je s, takže se liší od součtu původní řady.

Věta 6.14 (Riemann)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a nechť $s\in\mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s.*

6.5. **Součin řad.**

Definice. Mějme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Jejich **Cauchyovým součinem** rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, jejíž členy jsou definovány předpisem
$$c_n=\sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i}b_i,\quad n\in\mathbb{N}.$$

konec 4. přednášky (24.2.2023)

Věta 6.15 (Mertens)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada, jejíž součet je roven $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.*

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \qquad A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \qquad \tilde{A} = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|,$$

$$B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j, \qquad B = \sum_{j=1}^{\infty} b_j, \qquad \beta_k = B_k - B,$$

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \qquad C_k = \sum_{j=1}^{k} c_j.$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}
C_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1) \\
&= a_1(b_1 + \cdots + b_k) + a_2(b_1 + \cdots + b_{k-1}) + \cdots + a_k b_1 \\
&= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \cdots + a_k B_1 \\
&= a_1(B + \beta_k) + a_2(B + \beta_{k-1}) + \cdots + a_k(B + \beta_1) \\
&= (a_1 + \cdots + a_k)B + (a_1\beta_k + a_2\beta_{k-1} + \cdots + a_k\beta_1) \\
&= A_k B + (a_1\beta_k + a_2\beta_{k-1} + \cdots + a_k\beta_1) \\
&= A_k B + \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j.
\end{aligned} \tag{11}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme dále $\gamma_k = \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j$. Nyní ukážeme, že platí $\lim \gamma_k = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|\beta_k| < \varepsilon$, neboť $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ je konvergentní. Pak pro $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, máme

$$\begin{aligned}
|\gamma_k| &= \left| \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j \right| + \left| \sum_{j=k_0+1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j \right| + \sum_{j=k_0+1}^{k} |a_{k+1-j}|\, |\beta_j| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j \right| + \varepsilon \cdot \sum_{j=k_0+1}^{k} |a_{k+1-j}| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j \right| + \varepsilon\tilde{A}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Platí $\lim a_k = 0$ (nutná podmínka konvergence řady), a tedy podle věty o limitě vybrané posloupnosti také pro každé $j \in \{1, \ldots, k_0\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{k+1-j} = 0$. Odtud plyne

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j = 0. \tag{13}$$

Díky (12) a (13) tedy platí $\limsup |\gamma_k| \leq \varepsilon\tilde{A}$. Odtud plyne, že $\limsup |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim \gamma_k = 0$. Z (11) a věty o aritmetice limit plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} (A_k B + \gamma_k) = AB.$$

□

Důsledek. *Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.*

Důkaz. Podle Mertensovy věty je Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ a $\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$ konvergentní řada. Pro Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ tak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}b_i\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} |a_{k+1-i}|\,|b_i|\right) < \infty.$$

Odtud plyne, že Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolutně konverguje. □

Předpoklad pouhé konvergence obou řad ve Větě 6.15 ke konvergenci jejich Cauchyova součinu nestačí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

Příklad. Nechť $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale Cauchyův součin řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se stejnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje.

Řešení. Konvergence řady vyplývá z Leibnizovy věty. Členy odpovídajícího Cauchyova součinu mají pro $k \in \mathbb{N}$ tvar

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k+1-i} \frac{1}{\sqrt{k+1-i}} (-1)^i \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}}. \end{aligned}$$

Podle AG-nerovnosti dostaneme odhad

$$\sqrt{(k+1-i)i} \leq \frac{(k+1-i)+i}{2} = \frac{k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N},\ i \in \{1,\dots,k\}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_k| = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}.$$

Tedy neplatí $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Odtud plyne, že Cauchyův součin $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nekonverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence řady.

Cauchyův součin dvou konvergentních řad tedy nemusí konvergovat. Nicméně platí následující věta.

Věta 6.16 (Abelova věta o Cauchyově součinu)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i}b_i\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right).$$

Důkaz Věty 6.16 bude proveden později pomocí výsledků z teorie mocninných řad.

6.6. **Posloupnosti a řady s komplexními členy.**

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel a $z \in \mathbb{C}$. Řekneme, že $\{a_n\}$ **konverguje k číslu** z, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ |a_n - z| < \varepsilon.$$

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme **m-tým částečným součtem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat **n-tým členem řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje (jako prvek $\mathbb{C}$). Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li jejím součtem komplexní číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Definice. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní.

Věta 6.17 (absolutní a neabsolutní konvergence komplexní řady)**.** *Je-li řada komplexních čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, pak je konvergentní.*

konec 5. přednášky (28.2.2023)

Definice. Komplexní exponenciální funkcí rozumíme funkci $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

6.7. **Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí.** Díky větě o Peanově tvaru zbytku víme, že s rostoucím řádem Taylorova polynomu dostáváme přesnější aproximaci dané funkce f. Bylo by tedy možné očekávat, že bychom danou funkci mohli jistým způsobem vyjádřit pomocí limity Taylorových polynomů, tedy ve tvaru nekonečné řady. Tato úvaha motivuje následující definici.

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu** a. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Poznámka. V souvislosti s Taylorovou řadou funkce f nás zajímá zejména platnost rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \tag{14}$$

pro nějaká $x, a \in \mathbb{R}$, tj. zda je nekonečná řada pro dané x konvergentní a eventuálně zda je její součet roven $f(x)$. Samotná konvergence Taylorovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$ však platnost vztahu (14) ještě nezaručuje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

jejíž všechny derivace v bodě 0 jsou rovny 0, takže součet její Taylorovy řady je konstantní nulová funkce, ačkoliv $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$. V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

Věta 6.18 (Taylorovy řady elementárních funkcí)**.** *Platí*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \textit{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \textit{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \textit{pro každé } x \in (-1,1],$$

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \textit{pro každé } x \in [-1,1],$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \textit{pro každé } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ a každé } x \in (-1,1).$$

Důkaz. Funkce exp má v bodě 0 derivace všech řádů a platí $\exp^{(n)}(0) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zvolme $x \in (0, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Lagrangeova tvaru zbytku nalezneme $\xi_n \in (0, x)$ takové, že platí

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{\exp(\xi_n) x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tedy

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{\exp(\xi_n) x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\exp(x) x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Protože

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\exp(x) x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

plyne odtud vztah

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pro $x \in (-\infty, 0)$ lze tvrzení dokázat obdobně. Pro $x = 0$ tvrzení platí zřejmě. Tím je dokázáno tvrzení věty pro funkci exp. Obdobně lze důkaz provést pro ostatní funkce. $\square$

6.8. **Důkaz věty o zavedení exponenciální funkce (Věta 3.10).**

Příklad. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje absolutně. Zvolme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Podle d'Alembertova podílového kritéria tedy zadaná řada konverguje absolutně pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz Věty 3.10. Položme

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Dokážeme, že tato funkce má vlastnosti (E1) a (E2) z Věty 3.10. Z předcházejícího příkladu vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je absolutně konvergentní, a tedy konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce exp je tedy dobře definována na množině $\mathbb{R}$.

Zvolme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom z binomické věty plyne, že

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k} y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}.$$

Výraz na pravé straně je Cauchyovým součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Protože jsou obě tyto řady absolutně konvergentní (stačila by jedna), plyne z Mertensovy věty, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}$ je konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right),$$

tedy $\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y)$. Odtud plyne tvrzení (E1).

Nechť $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$. Potom

$$\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\exp x - 1 - x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \left| x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right|.$$

Protože $|x| \leq 1$ a $n - 2 \geq 0$ pro každé $n \geq 2$, dostáváme z Věty 6.12

$$\left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-2}}{n!} \leq |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Poslední řada je konvergentní, a tedy $\lim_{x \to 0} |x| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 0$. Podle věty o limitě a uspořádání tudíž platí také $\lim_{x \to 0} \left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = 0$, a tím spíše $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right) = 0$. Odtud plyne (E2).

Zbývá dokázat, že funkce exp je podmínkami (E1) a (E2) určena jednoznačně. Předpokládejme, že funkce $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ splňují $f(x+y) = f(x)f(y)$ a $g(x+y) = g(x)g(y)$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$ a $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-1}{x} = 1$. Ukážeme, že pak již nutně platí $f = g$.

Podle (E1) platí $\exp(0) = \exp(0+0) = (\exp(0))^2$. To znamená, že buď $\exp(0) = 1$, nebo $\exp(0) = 0$. Předpokládejme, že $\exp(0) = 0$. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ podle (E1) platí $\exp(x) = \exp(x+0) = \exp(x)\exp(0) = 0$. Tedy z (E2) vyplývá, že $1 = \lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{x}$, což je spor. Platí tedy $\exp(0) = 1$.

Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Potom podle definice derivace a (E1) platí

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x+0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \cdot \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)\exp(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - \exp(0)}{h}. \end{aligned}$$

Odtud díky tomu, že $\exp(0) = 1$ a podle (E2) plyne, že

$$\exp'(x) = \lim_{h \to 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x).$$

Z (E1) a díky tomu, že $\exp(0) = 1$, platí $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)$. Tedy $\exp(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Protože jsme při odvození těchto vlastností použili pouze (E1) a (E2), platí $f'(x) = f(x)$, $g'(x) = g(x)$ a $g(x) \neq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $f(0) = g(0) = 1$. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Potom

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0.$$

Tedy funkce $\frac{f}{g}$ je konstantní. Protože $f(0) = g(0) = 1$, je funkce $\frac{f}{g}$ konstantně rovna jedné na $\mathbb{R}$, tedy $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že funkce exp je vlastnostmi (E1) a (E2) určena jednoznačně. $\square$

konec 6. přednášky (3.3.2023)

Příklad. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ konverguje právě tehdy, když buď $\alpha > 1$, nebo $\alpha = 1$ a $\beta > 1$.

Řešení. Označme $a_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Jestliže $\alpha > 1$, potom nalezneme $\gamma \in (1, \alpha)$ a položíme $b_n = \frac{1}{n^\gamma}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ konverguje podle Věty 6.10 a platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Podle Věty 6.6 tedy konverguje i $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$. Jestliže $\alpha < 1$, potom nalezneme $\gamma \in (\alpha, 1)$ a položíme $b_n = \frac{1}{n^\gamma}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ diverguje podle Věty 6.10 a platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$. Podle Věty 6.6 tedy diverguje i $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Jestliže $\alpha = 1$, položme $f(x) = \frac{1}{x (\log x)^\beta}$ pro $x \in [2, \infty)$. Potom pro $x \in (2, \infty)$ platí

$$f'(x) = \frac{\beta - \log x}{x^2 (\log x)^{\beta+1}}.$$

Tedy $f'(x) < 0$ pro $x \in (\max\{2, e^\beta\}, \infty)$. Funkce f je tedy klesající na $(\max\{2, e^\beta\}, \infty)$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0 \geq \max\{2, e^\beta\}$. Potom je posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ klesající. Tedy z kondenzačního kritéria a poznámky o tom, že změna konečně mnoha členů řady neovlivňuje její konvergenci plyne, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^\beta \, n^\beta}.$$

Poslední řada konverguje podle Věty 6.10 a díky linearitě konvergentních řad právě tehdy, když $\beta > 1$.

7. Primitivní funkce

7.1. Základní vlastnosti.

Definice. Nechť I je otevřený interval a f je funkce definovaná alespoň na I. Řekneme, že funkce $F : I \to \mathbb{R}$ je **primitivní funkce** k funkci f na I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámky.

(a) Nechť F je primitivní funkce k nějaké funkci f na otevřeném intervalu I. Potom F je na I spojitá, neboť má v každém bodě I vlastní derivaci.
(b) Existují funkce, které na jistém intervalu nemají primitivní funkci. Příkladem je funkce sign na intervalu $\mathbb{R}$.
(c) Primitivní funkce není určena jednoznačně. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak funkce $F + c$ je také primitivní funkcí k f na I.
(d) Hledání primitivní funkce nazýváme **integrací** a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

Věta 7.1 (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)**.** *Nechť I je otevřený interval a nechť funkce f je definovaná alespoň na I. Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$, $x \in I$.*

Důkaz. Definujme funkci

$$H(x) = F(x) - G(x), \quad x \in I.$$

Pak

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in I,$$

a tedy je H konstantní na I. □

Značení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I, značíme symbolem

$$\int f(x)dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol $\int f(x)dx$ označuje množinu všech primitivních funkcí na k f na I. Na levé straně rovnosti stojí množina funkcí a na pravé straně stojí libovolný její representant. Vztah $\stackrel{c}{=}$ čteme jako rovnost až na konstantu. Jednotlivé části výrazu nalevo jsou tyto:

$\int$ ... znak integrálu,

$f(x)$ ... **integrand**, tedy funkce, k níž hledáme primitivní funkci,

dx ... **diferenciál**, symbol, jenž označuje jednak konec integrandu a jednak určuje proměnnou, vzhledem k níž integrujeme.

Následující tvrzení uvedeme zatím bez důkazu, podrobný důkaz bude uveden později.

Věta 7.2 (vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval a f je spojitá funkce na I. Potom f má na I primitivní funkci.*

Poznámka. Nechť F je primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\int f(ax)dx \stackrel{c}{=} a^{-1}F(ax), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta 7.3 (linearita primitivní funkce)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, F je primitivní funkce k funkci f na I, G je primitivní funkce k funkci g na I a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom je $\alpha F + \beta G$ primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$ na I.*

Důkaz. Podle Věty 4.2 (aritmetika derivací) platí

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

pro každé $x \in I$. Odtud plyne tvrzení. $\square$

Tabulkové integrály.

$$\int x^n \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \; x \in \mathbb{R},$$

$$\int x^n \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \; x \in (-\infty, 0), \; x \in (0, \infty),$$

$$\int x^\alpha \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad n\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \; x \in (0, \infty),$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx \stackrel{c}{=} \log|x|, \; x \in (-\infty, 0), \; x \in (0, \infty),$$

$$\int e^x \, dx \stackrel{c}{=} e^x, \; x \in \mathbb{R},$$

$$\int \sin x \, dx \stackrel{c}{=} -\cos x, \; x \in \mathbb{R},$$

$$\int \cos x \, dx \stackrel{c}{=} \sin x, \; x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx \stackrel{c}{=} \operatorname{tg} x, \; x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \; k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} \, dx \stackrel{c}{=} \operatorname{cotg} x, \; x \in (k\pi, \pi + k\pi), \; k \in \mathbb{Z},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \; x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2} \, dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arccotg} x, \; x \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \stackrel{c}{=} \arcsin x, \; x \in (-1, 1),$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \stackrel{c}{=} \arccos x, \; x \in (-1, 1).$$

Věta 7.4 (integrace per partes)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, f je spojitá funkce na I, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce k g na I. Potom platí*

$$\int g(x)F(x) \, dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) \, dx, \quad x \in I.$$

Důkaz. Funkce G je spojitá na I, takže i funkce fG je spojitá na I. Má tedy primitivní funkci na I podle Věty 7.2. Zvolme některou primitivní funkci k fG a označme ji H. Podle Věty 4.2 platí

$$(GF - H)' = gF + Gf - Gf = gF.$$

Tedy

$$\int gF \stackrel{c}{=} GF - H.$$

Odtud plyne tvrzení. $\square$

Příklad. Spočtěte $\int \operatorname{arctg} x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Položíme $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Potom f je spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy podle Věty 7.4 platí

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx &= \int g(x)F(x) \, dx \\
&= G(x)F(x) - \int G(x)f(x) \, dx \\
&= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\
&= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\
&\stackrel{c}{=} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2), \ \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

konec 7. přednášky (7.3.2023)

Příklad. Spočtěte $\int e^x \sin x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Z Věty 7.2 plyne, že funkce $e^x \sin x$ má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Dvojím použitím Věty 7.4 dostaneme

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \right) \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx.
\end{aligned}$$

Z této rovnosti již plyne

$$\int e^x \sin x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx$. Dokažte, že platí rekurentní formule

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Speciálně tedy platí

$$I_1 \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

a

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení. Z Věty 7.2 plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Z Věty 7.4 dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = x\frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x(-n)\frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \\ &= x\frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx\right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n,$$

a odtud již plyne tvrzerní.

Definice. Nechť I je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f má na I **Darbouxovu vlastnost**, jestliže pro každý interval $J \subset I$ je $f(J)$ interval.

Věta 7.5 (Darboux)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$ a f má na I primitivní funkci. Potom má f na I Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Zvolme interval $J \subset I$, $y_1, y_2 \in f(J)$ splňující $y_1 < y_2$ a $z \in (y_1, y_2)$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. Nechť F je primitivní funkce k funkci f na I. Položme

$$H(x) = F(x) - zx, \quad \text{pro } x \in I.$$

Pak H je spojitá na I a pro každé $x \in I$ platí

$$H'(x) = f(x) - z,$$

takže H má na I vlastní derivaci. Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 < x_2$. Podle Věty 3.14 nabývá funkce H na intervalu $[x_1, x_2]$ svého minima. Zvolme jeden z bodů minima H na $[x_1, x_2]$ a označme jej x_0. Vzhledem k tomu, že H je spojitá na I a

$$H'(x_1) = f(x_1) - z = y_1 - z < 0,$$

nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P_+(x_1, \delta) : H(x) < H(x_1).$$

Odtud plyne, že $x_0 \neq x_1$. Obdobně lze ověřit, že $x_0 \neq x_2$. Tedy $x_0 \in (x_1, x_2)$. Podle Věty 4.5 (nutná podmínka existence extrému) platí $H'(x_0) = 0$, neboli $f(x_0) = z$. □

Důsledek. *Nechť I je otevřený interval a $0 \in I$. Potom funkce* sign *nemá na I primitivní funkci.*

Poznámka. Nechť I je neprázdný otevřený interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$. Potom platí

$$f \text{ je spojitá na } I \;\Rightarrow\; f \text{ má primitivní funkci na } I \;\Rightarrow\; f \text{ má Darbouxovu vlastnost na } I,$$

přičemž ani jednu z implikací nelze obrátit.

Příklad. Uvažujte funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že f má na $\mathbb{R}$ vlastní derivaci, avšak funkce f' není na $\mathbb{R}$ spojitá.

Řešení. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí

$$f'(x) = 2x\sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x})$$

a dále platí

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} x \sin(\tfrac{1}{x}) = 0.$$

Tedy f má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, ale $\lim_{x\to 0} f'(x)$ neexistuje, takže funkce f' není spojitá v bodě 0.

Věta 7.6 (první věta o substituci)**.** *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k funkci f na (a, b), $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$ a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$. Potom*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \overset{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce (Věta 4.3) pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ platí

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

□

Příklad. Spočtěte $\int \sin^4 t \cos t\, dt$.

Řešení. Položme $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$,

$$f(x) = x^4,\ x \in (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \sin t,\ t \in (\alpha, \beta).$$

Potom

$$\int f(x)\, dx \overset{c}{=} \frac{1}{5}x^5, \quad x \in (a, b).$$

Tedy dle Věty 7.6 platí

$$\int \sin^4 t \cos t\, dt = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \overset{c}{=} \frac{1}{5}\sin^5 t, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 7.7 (druhá věta o substituci)**.** *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní a nenulová $\varphi'(t)$ a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $G\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \overset{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Potom

$$\int f(x)\, dx \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 7.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy podle Věty 4.9 je buď φ klesající na (α, β), nebo je φ rostoucí na (α, β). V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}\colon (a, b) \to (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned}(G \circ \varphi^{-1})'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili věty o derivaci složené funkce a o derivaci inverzní funkce. □

Příklad. Spočtěte $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$, $x \in (-1, 1)$.

Řešení. Položme $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(a, b) = (-1, 1)$ a

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},\ x \in (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(t) = \sin t,\ t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\varphi((\alpha, \beta)) = \varphi((-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})) = (-1, 1) = (a, b)$$

a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ na $(-1, 1)$. Dále platí

$$\begin{aligned}\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt &= \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt \\ &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \overset{c}{=} \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}, \quad t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

Tedy

$$\int f(x)\, dx \overset{c}{=} \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4}, \quad x \in (-1, 1).$$

konec 8. přednášky (10.3.2023)

Příklad. Spočtěte $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

7.2. **Integrace racionálních funkcí.**

Definice. Racionální funkcí budeme rozumět reálnou funkci, která je podílem dvou polynomů, přičemž polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 7.8 (rozklad reálného polynomu)**.** *Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Potom existují reálná čísla $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ taková, že*

- *platí*
$$P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots \\ \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l},$$
- *žádné dva z polynomů $x - x_1, \ldots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,*
- *polynomy $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.*

Věta 7.9 (rozklad na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ a nechť*

$$Q(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \cdots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots \\ \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q z Věty 7.8. Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \ldots, A_{p_1}^1, \ldots, A_1^k, \ldots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \ldots$, $B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \ldots$, B_1^l, $C_1^l, \ldots$, $B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x - x_1)} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \cdots \\ & \cdots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{(x - x_k)^{p_k}} \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \cdots + \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}, \\ & x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}. \end{aligned}$$

Integrace racionální funkce. Mějme polynomy P a Q. V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q, vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q. Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R. Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q, resp. P/Q, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty. Jednotlivé parciální zlomky pak zintegrujeme.

Integrace parciálního zlomku prvního typu.

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\, dx \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, \infty) \text{ pro } n > 1, \\ \log|x - a| & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, \infty) \text{ pro } n = 1. \end{cases}$$

Integrace parciálního zlomku druhého typu. Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}\, dx &= \frac{B}{2} \int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}\, dx + \\ &\qquad + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right) \int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n}\, dx \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Integrály I_1 a I_2 lze spočítat následovně:

$$I_1 \overset{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-n)(x^2+\alpha x+\beta)^{n-1}} & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } n > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } n = 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{\big((x + \alpha/2)^2 + \beta - \alpha^2/4\big)^n}\, dx \\ &= \frac{1}{(\beta - \alpha^2/4)^n} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}\right)^2 + 1\right)^n}\, dx. \end{aligned}$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $t = \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1 + t^2)^n},$$

kterou umíme.

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2(x^2 + 2x - 3)}.$$

Řešení. Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na $\mathcal{D}(f)$ na parciální zlomky.

$$\frac{x}{(x^2 + 2x + 2)^2(x - 1)(x + 3)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{E}{x - 1} + \frac{F}{x + 3}. \tag{1}$$

Vynásobením této rovnice jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x = (Ax+B)(x^2+2x+2)(x-1)(x+3) + +E(x^2+2x+2)^2(x+3) + F(x^2+2x+2)^2(x-1), \tag{2}$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$. Polynomy jsou však spojité na $\mathbb{R}$, a proto výše uvedený vztah (2) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Nyní můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x na levé a na pravé straně vztahu (2).

$$\begin{aligned} x^5&: 0 = A + E + F, \\ x^4&: 0 = 4A + B + 7E + 3F, \\ x^3&: 0 = 3A + 4B + C + 20E + 4F, \\ x^2&: 0 = -2A + 3B + 2C + D + 32E, \\ x^1&: 1 = -6A - 2B - 3C + 2D + 28E - 4F, \\ x^0&: 0 = -6B - 3D + 12E - 4F. \end{aligned}$$

b) Dosadíme do (2) šest různých čísel za x a opět získáme soustavu šesti lineárních rovnic o šesti neznámých. Nejvýhodnější je dosazovat taková čísla, pro která se některé sčítance rovnají 0 (tj. reálné kořeny jmenovatele původního zlomku – v našem případě čísla -3 a 1).

Obvykle obě metody vhodně kombinujeme. Postupným dosazením kořenů 1 a -3 do (2) získáme $E = 1/100$ a $F = 3/100$. Tyto hodnoty pak dosadíme do soustavy získané v a). Z první rovnice máme $A = -1/25$, z druhé $B = 0$, z poslední $D = 0$ a konečně ze čtvrté $C = -1/5$. Tím máme určeny koeficienty v rozkladu (1), který má tedy tvar

$$f(x) = -\frac{1}{25}\cdot\frac{x}{x^2+2x+2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{x}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{3}{100}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) - \operatorname{arctg}(x+1),\ x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \int \frac{1}{\big((x+1)^2+1\big)^2}\,dx \\ &\overset{c}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1),\ x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx \overset{c}{=} \log|x-1|,\ x \in (-\infty,1) \text{ a } x \in (1,\infty),$$

$$\int \frac{1}{x+3}\,dx \overset{c}{=} \log|x+3|,\ x \in (-\infty,-3) \text{ a } x \in (-3,\infty).$$

Na každém z intervalů $(-\infty,-3)$, $(-3,1)$ a $(1,\infty)$ je tak primitivní funkcí k funkci f kterákoliv z funkcí

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{50}\log(x^2+2x+2) + \frac{7}{50}\operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{10}\frac{x+2}{x^2+2x+2} + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{100}\log|x-1| + \frac{3}{100}\log|x+3| + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

konec 9. přednášky (14.3.2023)

7.3. **Trigonometrické substituce.**

Definice. Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci

$$[u,v] \mapsto \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}u^i v^j,$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i,j \in \{0,\dots,n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Definice. Řekneme, že racionální funkce dvou proměnných R je **lichá v první proměnné**, pokud pro každé $(x,y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x,y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(-x,y) = -R(x,y)$. Obdobně definujeme pojem **lichá funkce ve druhé proměnné**. Funkce R je **sudá**, jestliže pro každé $(x,y) \in \mathcal{D}(R)$ platí $(-x,-y) \in \mathcal{D}(R)$ a $R(x,y) = R(-x,-y)$.

Nechť R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$\int R(\sin t, \cos t)\, dt, \quad t \in I,$$

přičemž integrand je definován na intervalu I. Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze použít následujících substitucí.

(a) Je-li R lichá ve druhé proměnné, lze užít substituci $\sin t = x$.

Přesněji řečeno: použijeme Větu 7.6 pro funkci $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $\varphi(t) = \sin t$. Příslušnou funkci f lze pak volit jako racionální funkci jedné reálné proměnné.

(b) Je-li R lichá v první proměnné, lze užít substituci $\cos t = x$.

(c) Je-li R sudá, lze užít substituci $\operatorname{tg} t = x$.

(d) Vždy lze použít substituci $\operatorname{tg}(t/2) = x$.

Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{\sin t \cos t}{\sin^4 t + \cos^4 t}\, dt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Označme integrand symbolem g. Funkce g je spojitá na $\mathbb{R}$, má tedy na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Označme

$$R(u, v) = \frac{uv}{u^4 + v^4}.$$

Potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$, a tedy je R je lichá v první i v druhé souřadnici a je také sudá. Pro převod na integraci racionální funkce lze tedy užít jakoukoliv z trigonometrických substitucí.

Vyzkoušejme nejprve substituci $x = \operatorname{tg}(t/2)$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. Abychom mohli tuto substituci provést, vypočtěme nejprve

$$\cos t = \cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2},$$

a

$$dt = \frac{2}{1 + x^2}\, dx.$$

Při určení dx jsme použili rovnost $t = 2 \operatorname{arctg} x$. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{\frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^4 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^4} \cdot \frac{2}{1 + x^2}\, dx = 4 \int \frac{x(1 - x^2)(1 + x^2)}{16x^4 + (1 - x^2)^4}\, dx.$$

Výsledná racionální funkce je ale komplikovaná a navíc bychom museli ještě překonat potíže spojené s tím, že substituci provádíme pouze pro $t \in (-\pi, \pi)$, popřípadě na intervalu vzniklém posunutím o $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Zkusme tedy další substituce.

Substituce $x = \sin t$ pro $t \in \mathbb{R}$. V našem případě lze funkci g upravit na tvar

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin^4 t + (1 - \sin^2 t)^2} \cdot \cos t.$$

Uvědomíme-li si, že při uvedené substituci je $dx = \cos t\, dt$, dostáváme

$$\int \frac{x}{2x^4 - 2x^2 + 1}\, dx.$$

Užitím substituce $y = x^2$ tento integrál dále převedeme na

$$\int \frac{1}{4y^2 - 4y + 2}\, dy = \int \frac{1}{(2y - 1)^2 + 1}\, du \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2y - 1),$$

kde $y \in \mathbb{R}$. Dostáváme tedy podle první věty o substituci

$$\int g(t)\, dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \sin^2 t - 1), \ t \in \mathbb{R}.$$

Zkusme ještě substituci $x = \operatorname{tg} t$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Vydělíme čitatele i jmenovatele ve vyjádření $g(t)$ výrazem $\cos^2 t$ a dostaneme

$$g(t) = \frac{\operatorname{tg} t}{\sin^2 t \operatorname{tg}^2 t + \cos^2 t} = \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^4 t + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Nyní použijeme vztah $dx = \frac{1}{\cos^2 t}\, dt$. Pak je třeba vypočítat

$$\int \frac{x}{x^4+1}\, dx \overset{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Dostáváme tak primitivní funkci $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 t)$, ale pouze na intervalech $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. My však víme, že funkce f má primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$ (je totiž na $\mathbb{R}$ spojitá).

Shrnutí:

Početně nejjednodušší integrace vyšla při substituci $x = \operatorname{tg} t$. Pak jsme ovšem nezískali primitivní funkci na celém D_f. Obdobná situace je při užití substituce $x = \operatorname{tg}(t/2)$ – ta však většinou vede na složitější racionální funkce než substituce zbývající. Je tedy lepší – pokud to dovoluje tvar integrované funkce – se jejímu použití vyhnout a použít příslušnou ze zbývajících tří substitucí. Z výše uvedeného je vidět, že tvar výsledku může podstatně záviset na použité substituci, vždy však jde o funkce, které se liší pouze o konstantu.

Příklad. Spočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\, dt$.

Řešení. Integrand, který označíme g, je spojitá funkce na celém $\mathbb{R}$, a má tedy na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Označíme-li

$$R(u,v) = \frac{1}{1+u^2},$$

potom $g(t) = R(\sin t, \cos t)$ a R je sudá. Lze tedy užít substituci $x = \operatorname{tg} t$ pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Abychom tuto substituci mohli provést, vypočtěme

$$\cos^2 t = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

Dále z rovnosti $t = \operatorname{arctg} x$ dostáváme $dt = \frac{1}{1+x^2}\, dx$ podle dříve uvedené poznámky. Substitucí převedeme zadaný integrál na integrál

$$\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int \frac{1}{1+2x^2}\, dx \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Podle věty o substituci tedy platí

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 t}\, dt \overset{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} t),\ t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Označíme-li $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} t\right)$, je funkce F primitivní ke g na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. My ovšem hledáme primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Každá primitivní funkce G ke g na $\mathbb{R}$ je rovna $F + c_k$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $c_k \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Protože G je spojitá a platí rovnosti

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}+k\pi-} G(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_k \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \frac{\pi}{2}+k\pi+} G(t) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_{k+1},$$

musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Odtud plyne $c_k = c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Každá primitivní funkce k f má tedy tvar

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} t) + c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_0 + k\frac{\pi}{\sqrt{2}} & \text{pro } t = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Věta 7.10 (o lepení)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval $f, F: I \to \mathbb{R}$ jsou spojité, $c \in I$ a pro každé $x \in I \setminus \{c\}$ platí $F'(x) = f(x)$. Potom $F' = f$ na I.*

Důkaz. Musíme dokázat, že pro každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. Protože pro každé $x \in I \setminus \{c\}$ platí tato rovnost dle předpokladu, zbývá pouze dokázat, že platí také pro $x = c$. Díky spojitosti funkcí f a F v bodě c obdržíme podle věty o limitě derivací

$$F'_-(c) = \lim_{x \to c_-} F'(x) = \lim_{x \to c_-} f(x) = f(c) = \lim_{x \to c_+} f(x) = \lim_{x \to c_+} F'(x) = F'_+(c).$$

Odtud plyne, že $F'(c) = f(c)$. $\square$

7.4. **Integrály typu** $\int R\Big(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\Big)\, dt$**.** Při integraci funkce $R\Big(t, \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}\Big)$, kde $q \in \mathbb{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $x = \sqrt[q]{\frac{at+b}{ct+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

Příklad. Spočtěte

$$\int \frac{t-1}{t\big(\sqrt{t} + \sqrt[3]{t^2}\big)}\, dt.$$

Řešení. Integrand, který označíme g, je na $\mathcal{D}(g) = (0, \infty)$ spojitý, a má zde tedy primitivní funkci. V předpisu funkce g se vyskytují mocniny $t^{1/2}$ a $t^{2/3}$. Nejmenší společný násobek čísel 2 a 3 je 6. Užijeme tedy substituci $x = t^{1/6}$, $t \in (0, \infty)$. Odtud odvodíme $dx = \frac{1}{6} t^{-5/6}\, dt$, a tedy $dt = 6x^5\, dx$. Na intervalu $(0, \infty)$ pak hledáme primitivní funkci

$$\int \frac{x^6 - 1}{x^6(x^3 + x^4)} \cdot 6x^5\, dx = 6 \int \frac{x^6 - 1}{x^5 + x^4}\, dx.$$

konec 10. přednášky (17.3.2023)

Protože v posledním integrovaném výrazu je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, musíme nejprve dělit:

$$\begin{aligned}(x^6 - 1) : (x^5 + x^4) &= x - 1 + \frac{x^4 - 1}{x^4(x+1)} \\ &= x - 1 + \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^4(x+1)} \\ &= x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}.\end{aligned}$$

Nyní již můžeme integrovat

$$6 \int \frac{x^6 - 1}{x^5 + x^4}\, dx \stackrel{c}{=} 3x^2 - 6x + 6\log x + 6\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3},\ x \in (0, \infty).$$

Dle věty o substituci je primitivní funkcí ke g na $(0, \infty)$ každá funkce tvaru

$$3\sqrt[3]{t} - 6\sqrt[6]{t} + \log t + 6\frac{1}{\sqrt[6]{t}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{t}} + 2\frac{1}{\sqrt{t}} + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.

7.5. **Integrály typu** $\int R\big(t, \sqrt{at^2 + bt + c}\big)\, dt$**.** Také integraci funkce $R\big(t, \sqrt{at^2 + bt + c}\big)$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechť tedy $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(t) = R\big(t, \sqrt{at^2 + bt + c}\big).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(t) = at^2 + bt + c$ můžeme pro převod použít následující postup.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α. Pak platí $q(t) = a(t-\alpha)^2$. Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$. Pak platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a}|t-\alpha|, \qquad t \in \mathbb{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2. Potom slepíme F_1 a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na I, která bude primitivní ke g na I.

(b) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(t) = \sqrt{at^2 + bt + c} - \sqrt{a}t, \quad t \in I.$$

Pro $t \in I$ platí

$$\varphi'(t) = \frac{2at + b}{2\sqrt{at^2 + bt + c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}, \qquad x \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1}. Pro každé $x \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{-2\sqrt{a}x^2 + 2bx - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}x - b)^2}.$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(x))} = \sqrt{a\frac{c - x^2}{2\sqrt{a}x - b}} + x,$$

$$g \circ \varphi^{-1}(x) = R(\varphi^{-1}(x), \sqrt{q(\varphi^{-1}(x))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Pokud G značí k ní primitivní, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g. Právě uvedená substituce se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}t + x,$$

který se i lépe pamatuje.

(c) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme kořeny q jako α_1 a α_2, přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(t)} = \sqrt{a(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \sqrt{-a}(t-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci g lze na intervalu I, který je podmnožinou (α_1, α_2) psát ve tvaru, který byl uveden v předchozím oddíle.

Příklad. Spočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + t + 1}}\, dt$.

Řešení. Integrand označíme g. Funkce g je spojitá na definičním oboru $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém $\mathbb{R}$, použijeme tedy substituci $\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x$. Vypočteme

$$t = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x}, \qquad dt = -2\frac{x^2 - x + 1}{(1 - 2x)^2}\, dx.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné x výraz $\sqrt{t^2 + t + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = t + x = \frac{x^2 - 1}{1 - 2x} + x.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,dx.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2x^2 - 2x + 2) : (2x^2 - 5x + 2) = 1 + \frac{3x}{(x-2)(2x-1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-2)(2x-1)}\,dx &= \int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{2x-1}\,dx \\ &\stackrel{c}{=} x + 2\log|x-2| - \frac{1}{2}\log|2x-1|\end{aligned}$$

na intervalech $(-\infty, \frac{1}{2})$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ a $(2, \infty)$. Podle Věty 7.6 má tedy primitivní funkce k funkci g na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ tvar

$$\sqrt{t^2+t+1} - t + 2\log|\sqrt{t^2+t+1} - t - 2| - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{t^2+t+1} - 2t - 1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

konec 11. přednášky (21.3.2023)

8. Určitý integrál

8.1. **Riemannův integrál.**

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\, j = 1, \ldots, n\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ je **zjemněním dělení** D intervalu $[a, b]$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]$$

a

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\}.$$

Hodnotu $\overline{S}(f, D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f, D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D. Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}.$$

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená. Řekneme, že f na intervalu $[a,b]$, $a < b$, má **Riemannův integrál** (případně že je na tomto intervalu **riemannovsky integrovatelná**), jestliže $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $\int_a^b f(x)\,dx$. Jestliže $a > b$, pak klademe $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Jestliže $a = b$, pak klademe $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Množinu všech riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme symbolem $\mathcal{R}([a,b])$.

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $c \in \mathbb{R}$. Dokažte že $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Řešení. Pro každý neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí $\sup_I f = \inf_I f = c$, a tedy $\overline{S}(f,D) = \underline{S}(f,D) = c(b-a)$ pro každé dělení D intervalu $[a,b]$.

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť f je Dirichletova funkce. Dokažte, že $f \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Řešení. Zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ intervalu $[a,b]$. Potom pro každé $j \in \{1,\dots,n\}$ platí $\sup\{f(x) : x \in [x_{j-1},x_j]\} = 1$ a $\inf\{f(x) : x \in [x_{j-1},x_j]\} = 0$. Odtud plyne, že $\overline{S}(f,D) = b-a$ a $\underline{S}(f,D) = 0$ pro každé dělení D intervalu $[a,b]$, takže $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b-a$ a $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$. Protože $b-a \neq 0$, platí $f \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Věta 8.1 (vlastnosti dělení)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená.*

(a) *Nechť D, D' jsou dělení intervalu $[a,b]$, přičemž D' zjemňuje D. Potom*

$$\underline{S}(f,D) \le \underline{S}(f,D') \le \overline{S}(f,D') \le \overline{S}(f,D).$$

(b) *Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Potom*

$$\underline{S}(f,D_1) \le \overline{S}(f,D_2).$$

(c) *Platí*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Důkaz. (a) Druhá nerovnost zřejmě platí z definice. Dokažme tedy první. Předpokládáme-li, že $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ a D' obsahuje oproti D právě jeden bod navíc, řekněme z ležící mezi body x_{j-1} a x_j pro nějaké $j \in \{1,\dots,n\}$, pak platí

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) = {} & \left(\inf_{[x_{j-1},z]} f\right)(z - x_{j-1}) + \left(\inf_{[z,x_j]} f\right)(x_j - z) \\ & - \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Protože

$$\inf_{[x_{j-1},z]} f \ge \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[z,x_j]} f \ge \inf_{[x_{j-1},x_j]} f,$$

dostáváme

$$\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) \ge \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f\right)(z - x_{j-1} + x_j - z - x_j + x_{j-1}) = 0.$$

Tím je důkaz prvé nerovnosti proveden pro případ, kdy D' obsahuje oproti D jeden dělící bod navíc. Obecný případ prvé nerovnosti pak snadno odvodíme indukcí. Důkaz třetí nerovnosti je pak možno vést obdobně jako důkaz nerovnosti prvé.

(b) Najdeme dělení D zjemňující D_1 i D_2. Dle bodu (a) pak platí

$$\underline{S}(f,D_1) \le \underline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D_2).$$

(c) Je-li D dělení $[a,b]$, pak z (b) máme

$$\underline{S}(f,D) \le \inf\{\overline{S}(f,D'); D' \text{ dělení } [a,b]\} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Tedy i

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(f,D); D \text{ dělení } [a,b]\} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

□

Příklad. Nechť R je Riemannova funkce, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Rozhodněte, zda $R \in \mathcal{R}([a,b])$, a pokud ano, spočtěte $\int_a^b R(x)\,dx$.

Věta 8.2 (mantinely Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Označme*

$$m = \inf\{f(x)\colon x \in [a,b]\}, \quad M = \sup\{f(x)\colon x \in [a,b]\}.$$

Potom

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f,D_1) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f,D_2) \leq M(b-a).$$

Důkaz. Nechť $D = \{a,b\}$. Potom jsou D_1 i D_2 zjemněními D a platí $\underline{S}(f,D) = m(b-a)$, $\overline{S}(f,D) = M(b-a)$. První a poslední nerovnost tedy plyne z Věty 8.1(a). Druhá a čtvrtá nerovnost plynou z definice horního a dolního Riemannova integrálu. Konečně třetí nerovnost plyne z Věty 8.1(c). □

Věta 8.3 (aproximace Riemannova integrálu součty přes dělení s malou normou)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f,D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

a

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{S}(f,D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon.$$

konec 12. přednášky (24.3.2023)

Důkaz. Dokažme nejprve tvrzení týkající se posledních dvou nerovností. Funkce f je omezená, a tedy existuje kladné číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in [a,b] : |f(x)| < K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme dělení $D_0 = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\overline{S}(f,D_0) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme

$$\mu(D_0) = \min\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1,\dots,n\}\}$$

a

$$\delta_1 = \min\left\{\mu(D_0), \frac{\varepsilon}{4Kn}\right\}.$$

Nechť nyní D je dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta_1$. Vezmeme dělení P sestávající ze všech dělicích bodů D_0 a D a označme $X = \{x_0,\dots,x_n\}$ množinu dělicích bodů D_0. Ověřme nejprve, že

$$\overline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,P) + 2Kn\nu(D). \tag{15}$$

Označme symbolem $\mathcal{D}$ množinu všech intervalů daných dělením D a symbolem $\mathcal{P}$ množinu všech intervalů daných dělením P. Symbolem $|I|$ označme délku intervalu I. Potom

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{I\in\mathcal{D}} \left(\sup_I f\right)|I| \quad \text{a} \quad \overline{S}(f,P) = \sum_{I\in\mathcal{P}} \left(\sup_I f\right)|I|.$$

Nechť interval $I = [\alpha, \beta]$ splňuje $I \in \mathcal{D}$. Je-li obsažen i v $\mathcal{P}$, příspěvek příslušný tomuto intervalu je v obou horních součtech stejný. Není-li I v $\mathcal{P}$, protíná jeho vnitřek množinu X, neboť P zjemňuje D. Vzhledem k nerovnosti $\nu(D) < \mu(D_0)$ existuje právě jeden index $i \in \{0, \dots, n\}$ takový, že $\alpha < x_i < \beta$. V součtu $\overline{S}(f, D)$ se nyní vyskytuje výraz

$$\left(\sup_{[\alpha,\beta]} f\right)(\beta - \alpha),$$

zatímco v $\overline{S}(f, P)$ máme součet

$$\left(\sup_{[\alpha,x_i]} f\right)(x_i - \alpha) + \left(\sup_{[x_i,\beta]} f\right)(\beta - x_i).$$

Rozdíl těchto výrazů odhadneme jako

$$\begin{aligned} &\left|\left(\sup_{[\alpha,\beta]} f\right)(\beta - \alpha) - \left(\left(\sup_{[\alpha,x_i]} f\right)(x_i - \alpha) + \left(\sup_{[x_i,\beta]} f\right)(\beta - x_i)\right)\right| \\ &\le K(\beta - \alpha) + K(x_i - \alpha + \beta - x_i) = 2K(\beta - \alpha) \le 2K\nu(D). \end{aligned}$$

Protože intervalů z $\mathcal{D}$ protínajících X je nejvýše n, platí

$$\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P) \le 2Kn\nu(D),$$

což je nerovnost (15).

Použitím této nerovnosti pak dostáváme díky volbě δ_1 nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, P) + 2Kn\nu(D) \le \overline{S}(f, D_0) + \frac{\varepsilon}{2} \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Obdobně lze nalézt $\delta_2 > 0$, takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta_2$ platí

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ge \underline{S}(f, D) \ge \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom δ vyhovuje požadovaným vlastnostem. □

Věta 8.4 (aproximace Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ splňující* $\lim \nu(D_n) = 0$. *Potom*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) \quad a \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu dle Věty 8.3 nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ platí $\nu(D_n) < \delta$. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{S}(f, D_n) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Odtud plyne druhý z dokazovaných vztahů. První vztah lze dokázat obdobně. □

Věta 8.5 (postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Jestliže existuje posloupnost $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ dělení intervalu $[a, b]$ splňující* $\lim \nu(D_n) = 0$ *a* $\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n)$*, potom $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Dle Věty 8.4 a předpokladu platí

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx.$$

Protože $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx$, je funkce riemannovsky integrovatelná a platí požadovaný vztah. □

Příklad. Spočtěte $\int_0^1 x^2\,dx$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \{\frac{j}{n}\}_{j=0}^n$ intervalu $[0,1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3}(n-1)n(2n-1),$$
$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6n^3}n(n+1)(2n+1).$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Dle Věty 8.5 pak máme $f \in \mathcal{R}([0,1])$ a $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

Věta 8.6 (kritérium existence Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme dělení D_1, D_2 intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\overline{S}(f, D_1) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_2) > \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon.$$

Nechť D je dělení intervalu $[a,b]$ zjemňující D_1 i D_2. Pak dostaneme díky Větě 8.1 nerovnosti

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, D_1) - \underline{S}(f, D_2) \le \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon - \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$. Pak ale máme

$$0 \le \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx - \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \le \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Tedy $\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx = \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx$ a $f \in \mathcal{R}([a,b])$. □

Definice. Nechť I je interval a nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je **stejnoměrně spojitá** na I, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I,\ |x-y| < \delta\colon |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I stejnoměrně spojitá, pak je na I spojitá. To plyne z toho, že f je na I spojitá právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in I\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I,\ |x-y| < \delta\colon |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Nechť I je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$. Potom f není stejnoměrně spojitá na I právě tehdy, když existují $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ bodů z I splňující $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad. Dokažte, že funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na $(0, \infty)$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Tvrzení tedy plyne z předcházející poznámky.

konec 13. přednášky (28.3.2023)

Příklad. Dokažte, že funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na $(0, \frac{1}{\pi}]$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ a $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n - y_n| = \frac{1}{4n(\frac{\pi}{2}+2n\pi)} \to 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Tvrzení tedy plyne z předcházející poznámky.

Věta 8.7 (spojitost a stejnoměrná spojitost)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom je f stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.*

Důkaz. Předpokládejme, že f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ bodů z $[a,b]$ splňující $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, a proto z ní lze díky Bolzanově-Weierstrassově větě vybrat podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k bodu $x \in \mathbb{R}$. Z věty o limitě a uspořádání plyne $x \in [a,b]$. Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}|,$$

konverguje i posloupnost $\{y_{n_k}\}$ k x. Předpokládejme, že f je spojitá v x. Díky Heineovy větě nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$|f(x_{n_k}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |f(y_{n_k}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(y_{n_k}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

což je spor. Funkce f tedy není spojitá v x. Odtud plyne tvrzení. □

Věta 8.8 (spojitost a riemannovská integrovatelnost)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce f je omezená na $[a,b]$ a podle Věty 8.7 je také stejnoměrně spojitá. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x, y \in [a,b],\ |x - y| < \delta : \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$. Pak pro $j \in \{1, \ldots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{j-1},x_j]} f \leq \inf_{[x_{j-1},x_j]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sup_{[x_{j-1},x_j]} f - \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \right)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon(b-a).$$

Podle Věty 8.6 je tedy $f \in \mathcal{R}([a,b])$. □

Věta 8.9 (monotonie a riemannovská integrovatelnost)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je monotónní. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$.*

Důkaz. Předpokládejme, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a,b] : f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b-a)(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Zvolíme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$, kde $x_j = a + \frac{b-a}{n} j$, $j = 0, \dots, n$. Potom

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{j=1}^{n} (\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} (\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Podle Věty 8.6 platí $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Pro f nerostoucí lze tvrzení dokázat obdobně. $\square$

Poznámka. Nechť f je funkce a $M \subset \mathcal{D}(f)$. Potom

$$\sup_M (f + g) \leq \sup_M f + \sup_M g, \quad \inf_M (f + g) \geq \inf_M f + \inf_M g.$$

Věta 8.10 (linearita Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Jestliže $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ a platí*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx, \quad \int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.$$

Důkaz. Funkce f, g jsou riemannovsky integrovatelné funkce na $[a, b]$, a tedy jsou na tomto intervalu omezené. Tedy i $f + g$ je omezená na $[a, b]$. Díky poznámce pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ platí

$$\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \leq \underline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f + g, D) \leq \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D). \tag{16}$$

Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a, b]$, jejichž norma konverguje k 0. Pak dle Věty 8.4 platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n)) &= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\ \ dx, \\ \lim_{n\to\infty} (\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n)) &= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\ \ dx.\end{aligned}$$

Ze (16) tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f + g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f + g, D_n) = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\ \ dx.$$

Z Věty 8.5 plyne $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$.

Je-li nyní $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha \geq 0$, je funkce αf omezená na $[a, b]$. Dále pro každý neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f, \quad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Tedy pro posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a, b]$ takovou, že $\nu(D_n) \to 0$, máme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) &= \lim_{n\to\infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\, dx, \\ \lim_{n\to\infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) &= \lim_{n\to\infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\, dx.\end{aligned}$$

Z Věty 8.5 tedy plyne $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$.

Předpokládejme, že $\alpha < 0$. Potom pro každý neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí

$$\sup_I (\alpha f) = \alpha \inf_I f, \quad \inf_I (\alpha f) = \alpha \sup_I f,$$

a tedy pro posloupnost dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D_n) \to 0$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \underline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$
$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(\alpha f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha \overline{S}(f, D_n) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Jako výše proto platí $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$. □

Věta 8.11 (Riemannův integrál a uspořádání)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Jestliže $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a $f \le g$, pak $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.*

Důkaz. Zvolme posloupnost $\{D_n\}$ dělení intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D_n) \to 0$. Pak díky předpokladu pro každý neprázdný interval $I \subset [a,b]$ platí $\sup_I f \le \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) \le \lim_{n\to\infty} \overline{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x)\,dx.$$

□

konec 14. přednášky (30.3.2023)

Věta 8.12 (aditivita Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Potom $f \in \mathcal{R}([a,b])$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{R}([a,c]) \cap \mathcal{R}([c,b])$. V takovém případě platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. Zvolme posloupnosti $\{D_n^1\}$ a $\{D_n^2\}$ dělení po řadě intervalů $[a,c]$ a $[c,b]$ splňující

$$\lim_{n\to\infty} \nu(D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \nu(D_n^2) = 0.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $D_n = D_n^1 \cup D_n^2$. Potom platí $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

⇐ Platí

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^1) = \int_a^c f(x)\,dx,$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n^2) = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2)\right) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dle Věty 8.5 platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

⇒ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle Věty 8.6 nalezneme dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$. Položme $D^1 = (D \cap [a,b]) \cup \{c\}$. Potom $\overline{S}(f, D^1) - \underline{S}(f, D^1) \le \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$. Podle Věty 8.6 tedy $f \in \mathcal{R}([a,c])$. Obdobně lze dokázat, že $f \in \mathcal{R}([c,b])$. Rovnost integrálů plyne z první části důkazu. □

Věta 8.13 (Riemannův integrál a absolutní hodnota)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Jestliže $f \in \mathcal{R}([a,b])$, pak $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Důkaz. Protože $f \in \mathcal{R}([a,b])$, je f omezená na $[a,b]$, a tedy je i $|f|$ je omezená na $[a,b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Věty 8.6 nalezneme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon$. Zvolme neprázdný interval $I \subset [a,b]$ a $\eta > 0$. Nalezneme $x, y \in I$ taková, že

$$|f(x)| > \sup_I |f| - \eta \quad \text{a} \quad |f(y)| < \inf_I |f| + \eta.$$

Potom

$$\begin{aligned}\sup_I |f| - \inf_I |f| &\leq |f(x)| + \eta - |f(y)| + \eta = |f(x)| - |f(y)| + 2\eta \leq |f(x) - f(y)| + 2\eta \\ &\leq \sup_I f - \inf_I f + 2\eta.\end{aligned}$$

Protože η bylo zvoleno libovolně, plyne odtud

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \leq \sup_I f - \inf_I f.$$

Pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ tudíž platí

$$\overline{S}(|f|,D) - \underline{S}(|f|,D) \leq \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon,$$

a tedy podle Věty 8.6 je $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$. Z Věty 8.10 plyne, že $-f \in \mathcal{R}([a,b])$ a $-\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (-f(x))\,dx$. Protože $\pm f \leq |f|$ na $[a,b]$, plyne z Věty 8.11

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{a} \quad -\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (-f(x))\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

a tedy

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

Poznámka. Implikaci $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}([a,b])$ nelze obrátit. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 2D(x) - 1$, kde D je Dirichletova funkce. Potom pro každá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ a $f \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Věta 8.14 (derivace funkce horní meze)**.** *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval, $f\colon J \to \mathbb{R}$ a pro každá $a, b \in J$ platí $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Nechť $c \in J$ a $F\colon J \to \mathbb{R}$ je definovaná předpisem*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad \textit{pro } x \in J.$$

Potom platí:

(a) *F je spojitá na J,*
(b) *jestliže $x_0 \in \operatorname{Int} J$ a f je spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důkaz. (a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J. Nalezneme $\eta > 0$ takové, že $[y_0, y_0 + \eta] \subset J$. Protože je $f \in \mathcal{R}([y_0, y_0 + \eta])$, je f omezená na $[y_0, y_0 + \eta]$. Nechť $K > 0$ splňuje

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \eta] : |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $\delta \leq \eta$ a $K\delta < \varepsilon$. Zvolme $y \in [y_0, y_0 + \delta]$. Potom

$$\begin{aligned}|F(y) - F(y_0)| &= \left|\int_c^y f(x)\,dx - \int_c^{y_0} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{y_0}^y f(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_{y_0}^y |f(x)|\,dx \leq \int_{y_0}^y K\,dx = K(y - y_0) < k\delta < \varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \to y_{0+}} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \to y_{0+}} F(y) = F(y_0),$$

takže F je spojitá zprava v bodě y_0. Obdobně lze dokázat, že F je spojitá zleva v každém bodě intervalu J, který není levým krajním bodem J.

(b) Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že $P(x_0, \delta) \subset J$ a

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - f(x_0)\right| = \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}(f(t) - f(x_0))\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}|f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x}\varepsilon\,dt\right| = \varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0}\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

□

Důkaz Věty 7.2. Zvolme $c \in (a, b)$ a položme

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad x \in (a, b).$$

Podle Věty 8.8 platí $f \in \mathcal{R}([\alpha, \beta])$ pro každý interval $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Funkce F je tedy dobře definovaná na (a, b). Z Věty 8.14(b) plyne, že pro každé $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Tedy F je primitivní k f na (a, b). □

konec 15. přednášky (4.4.2023)

Značení. Nechť F je funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Jestliže existuje $\lim_{x \to a+} F(x)$, pak hodnotu této limity značíme symbolem $F(a+)$. Obdobně definujeme symbol $F(a-)$.

Věta 8.15 (Riemannův integrál spojité funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $F \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ je primitivní funkce k f na (a, b). Potom existují vlastní $F(a+)$ a $F(b-)$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+).$$

Důkaz. Definujme funkci

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(a), & t \in (a - 1, a], \\ f(t), & t \in (a, b), \\ f(b), & t \in [b, b + 1). \end{cases}$$

Pak je $\tilde{f}$ spojitá na $(a - 1, b + 1)$. Položme

$$\tilde{F}(x) = \int_a^x \tilde{f}(t)\;dt, \quad x \in (a - 1, b + 1).$$

Pak je $\tilde{F}$ primitivní funkce k $\tilde{f}$ na $(a - 1, b + 1)$, a tedy je na tomto intervalu spojitá. Protože $\tilde{F}|_{(a,b)}$ je primitivní funkce k funkci f, existuje podle Věty 7.1 $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in (a, b) : F(x) = \tilde{F}(x) + c.$$

Platí $\tilde{F}(a) = 0$. Tedy

$$F(a+) = \tilde{F}(a) + c = c \quad \text{a} \quad F(b-) = \tilde{F}(b) + c.$$

Tudíž

$$\int_a^b f(t)\,dt = \tilde{F}(b) = F(b-) - c = F(b-) - F(a+).$$

□

Věta 8.16 (Riemannův integrál funkcí lišících se v konečně mnoha bodech)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, *a* $f \in \mathcal{R}(a,b)$. *Jestliže* g *je funkce definovaná alespoň na* $[a,b]$, *která se v intervalu* $[a,b]$ *liší od* f *v konečném počtu bodů, potom* $g \in \mathcal{R}(a,b)$ *a* $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Důkaz. Funkce f je omezená, a proto je omezená i funkce g. Nalezneme kladné číslo $K > 0$ takové, že pro každé $x \in [a,b]$ platí $|f(x)| \le K$ a $|g(x)| \le K$. Označme $J = \{x \in [a,b]; f(x) \neq g(x)\}$. Množina J je podle předpokladu konečná. Pokud je prázdná, pak je tvrzení zřejmé, v opačném případě označme m počet prvků množiny J. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \frac{\varepsilon}{4Km}$ a

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \underline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Označme $\mathcal{I}$ systém obsahující všechny intervaly tvaru $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Označme $\mathcal{S}$ systém těch intervalů z $\mathcal{I}$, které mají neprázdný průnik s J. Systém $\mathcal{S}$ má tedy nejvýše $2m$ prvků, neboť každý bod z J je prvkem nejvýše dvou intervalů z $\mathcal{I}$. Potom platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,D) - \overline{S}(g,D) &= \sum_{I\in\mathcal{I}} \sup_I f \cdot |I| - \sum_{I\in\mathcal{I}} \sup_I g \cdot |I| \\ &= \sum_{I\in\mathcal{S}} (\sup_I f - \sup_I g) \cdot |I|, \end{aligned} \tag{17}$$

neboť $\sup_I f = \sup_I g$, pokud $I \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{S}$. Můžeme tedy odhadnout

$$\begin{aligned} |\overline{S}(f,D) - \overline{S}(g,D)| &\le \sum_{I\in\mathcal{S}} (|\sup_I f| + |\sup_I g|) \cdot |I| \\ &\le \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K \cdot |I| \le \sum_{I\in\mathcal{S}} 2K \cdot \nu(D) \\ &\le 2m \cdot 2K \cdot \nu(D) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{18}$$

Obdobně obdržíme

$$|\underline{S}(f,D) - \underline{S}(g,D)| < \varepsilon. \tag{19}$$

Podle (17), (18) a (19) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx - 2\varepsilon < \underline{S}(f,D) - \varepsilon < \underline{S}(g,D) \le \overline{S}(g,D) \\ < \overline{S}(f,D) + \varepsilon < \int_a^b f(x)\,dx + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{20}$$

Odtud podle Věty 8.6 plyne, že g je na intervalu $[a,b]$ riemannovsky integrovatelná. Z odhadu (20) pak plyne $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. □

Věta 8.17 (charakterizace riemannovské integrovatelnosti)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *a* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom* $f \in \mathcal{R}([a,b])$ *právě tehdy, když*

$$\exists I \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall D = \{x_j\}_{j=0}^n, D \text{ je dělení } [a,b],\ \nu(D) < \delta$$
$$\forall t_j \in [x_{j-1}, x_j],\ j \in \{1,\dots,n\}\colon \left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu podle Věty 8.6 nalezneme $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení D splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \le \underline{S}(f,D) \le \overline{S}(f,D) \le \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Je-li tedy $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ dělení, $\nu(D) < \delta$, a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots,n$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \le \underline{S}(f,D) \le \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \le \overline{S}(f,D) \le \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

$\Rightarrow$ Položme $\varepsilon = 1$. K němu nalezneme příslušné $\delta > 0$. Zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom tedy

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon$$

pro každou volbu bodů $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Označme

$$\eta = \min\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}, \quad K = \max\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}.$$

Zvolme $t \in [a, b]$. Nalezneme $j \in \{1, \ldots, n\}$ splňující $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Položme

$$t_i = x_i, i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}, \quad t_j = t.$$

Potom

$$\begin{aligned} |f(t)(x_j - x_{j-1})| &= \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + |I| + \sum_{i=1}^n |f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^n K(x_i - x_{i-1}) \\ &= 1 + |I| + K(b - a). \end{aligned}$$

Tedy

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\eta}(1 + |I| + K(b - a)).$$

Odtud plyne, že f je omezená na $[a, b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme příslušné $\delta > 0$. Zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Pro každé $i = 1, \ldots, n$ nalezneme $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon.$$

Potom

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b - a) \\ &\leq I + \varepsilon + \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Obdobně lze odvodit

$$\underline{S}(f, D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b - a).$$

Tedy

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < 2(1 + b - a)\varepsilon.$$

Odtud plyne, že $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Platí-li nyní (i), v průběhu důkazu jsme odvodili $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Platí-li (ii), máme z důkazu implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) pro kladné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, kladné $\delta \in \mathbb{R}$ z podmínky (ii) a dělení D, $\nu(D) < \delta$ odvozenou nerovnost

$$\overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le I$. Obdobně odvodíme $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ge I$, a tedy $I = \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

konec 16. přednášky (11.4.2023)

Poznámka. Podívejme se ještě na vztah hodnoty I a hodnoty $\int_a^b f(x)\,dx$ v předchozí větě. Platí-li (i), pak je pro $I = \int_a^b f(x)\,dx$ splněna podmínka (ii). Platí-li (ii), potom z důkazu implikace (ii)$\Rightarrow$(i) lze odvodit, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$ platí

$$\overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1 + b - a).$$

Odtud plyne

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{S}(f,D) < I + \varepsilon(1 + b - a),$$

a tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le I$. Obdobně lze odvodit $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \ge I$, a tedy $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

Poznámka. Podmínka (ii) Věty 8.17 je původní Riemannovou definicí Riemannova integrálu. Náš výklad sledoval alternativní přístup, který náleží Darbouxovi.

Příklad. Spočtěte $\int_0^2 a^x\,dx$ v závislosti na parametru $a > 0$.

Příklad. Spočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ v závislosti na parametru $p > -1$.

Příklad. Spočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

8.2. **Newtonův integrál.**

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a,b). Řekneme, že funkce f má na intervalu (a,b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a,b) existuje, jestliže

- f má na (a,b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a,b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\,dx$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Jestliže $\int_a^b f(x)\;dx \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a,b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

Značení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, používáme označení

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{a} \quad (R)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Poznámka. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z Věty 7.1.

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a,b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} \text{existuje} \begin{cases} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty\text{, tedy diverguje,} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Značení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech funkcí, které mají na intervalu (a,b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a,b)$.

Nechť funkce F je definovaná na (a,b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte $(N)\int_0^1 x^\alpha\,dx$.

Řešení. Platí

$$(N)\int_0^1 x^\alpha\,dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1,\infty),\\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty,-1),\\ \left[\log x\right]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte $(N)\int_1^\infty x^\alpha\,dx$.

Řešení. Platí

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1,\infty),\\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty,-1),\\ \left[\log x\right]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Poznámka. (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ má na intervalu $(0,1)$ konvergentní Newtonův integrál, ale není na $[0,1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovalná, neboť na $(0,1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \operatorname{sign} x$ je intervalu $[-1,1]$ monotónní, a tedy podle Věty 8.9 také riemannovsky integrovatelná, neexistuje ale její Newtonův integrál na $(-1,1)$, protože na $(-1,1)$ nemá dle Věty 7.5 primitivní funkci.

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$. To plyne z Věty 8.15.

Věta 8.18 (linearita Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a funkce $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mají na (a,b) Newtonův integrál. Potom*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

je-li výraz na pravé straně definován. Dále platí

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g (a,b). Pak je $F+G$ primitivní k $f+g$ na (a,b) a díky aritmetice limit pro funkce platí $[F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b$. Tedy

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = [F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Obdobně lze odvodit, že platí

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = [\alpha F]_a^b = \alpha[F]_a^b = \alpha\int_a^b f(x)\,dx.$$

□

konec 17. přednášky (14.4.2023)

Věta 8.19 (Newtonův integrál a uspořádání)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a funkce $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mají na (a,b) Newtonův integrál. Nechť platí $f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Důkaz. Jestliže $\int_a^b f(x)\,dx = -\infty$, pak nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme, že $\int_a^b f(x)\,dx > -\infty$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce ke g (a,b). Potom je $G-F$ primitivní funkce k $g-f$ na (a,b) a platí

$$(G-F)'(x) = g(x) - f(x) \ge 0, \quad x \in (a,b).$$

Odtud plyne, že $G-F$ je neklesající na (a,b), a tedy

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx = [G-F]_a^b \ge 0.$$

Protože $\int_a^b f(x)\,dx > -\infty$ a $\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \ge 0$, je výraz $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$ definován. Tedy dle Věty 8.18 platí

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Věta 8.20 (aditivita Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c < b$.*

(a) *Jestliže existuje Newtonův integrál funkce f na intervalu (a,b), potom existují integrály funkce f na intervalech (a,c) a (c,b) a platí*

(21)
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(b) *Jestliže funkce f má Newtonův integrál na intervalech (a,c) a (c,b) a navíc je spojitá v c, pak platí* (21)*, pokud má výraz na pravé straně smysl.*

Důkaz. (a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a,b). Pak je F primitivní k f i na intervalech (a,c) a (c,b). Navíc je F spojitá v bodě c, a tedy má v bodě c vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a,c) a G je primitivní k f na (c,b). Funkce f je spojitá v bodě c, a proto je omezená na jistém okolí bodu c. Nalezneme tedy $\delta > 0$ a $K > 0$ taková, že $a < c - \delta$ a $|f(x)| \le K$ pro každé $x \in (c-\delta, c)$. Potom podle Věty 8.19 pro každé $x \in (c-\delta, c)$ platí

$$-K(x - c + \delta) = \int_{c-\delta}^x (-K)\,dt \le \int_{c-\delta}^x f(t)\,dt \le \int_{c-\delta}^x K\,dt = K(x - c + \delta).$$

Dále platí $\int_{c-\delta}^x f(t)\,dt = F(x) - F(c-\delta)$ pro každé $x \in (c-\delta, c)$, neboť F je spojitá na (a,c). Limita $\lim_{x\to c-} F(x)$ existuje podle předpokladu a z výše uvedeného plyne, že tato limita je vlastní. Obdobně lze ověřit, že $\lim_{x\to c+} G(x)$ je vlastní. Přičtením vhodné konstanty k funkci G můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x\to c_-} F(x) = \lim_{x\to c_+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a,c), \\ \lim_{x\to c_-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c,b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a,b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,c) \cup (c,b)$. Díky větě o limitě derivací a spojitosti f v c navíc platí

$$H'(c) = \lim_{x\to c} H'(x) = \lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Funkce H je tedy primitivní k f na (a,b). Podle předpokladu je definován výraz $[H]_a^c + [H]_c^b$. Protože H je spojitá v c, je hodnota $H(c+) = H(c-)$ vlastní. Je tudíž definován i výraz $[H]_a^b$ a platí $[H]_a^b = [H]_a^c + [H]_c^b$. Odtud plyne tvrzení. □

Věta 8.21 (Newtonův integrál a absolutní hodnota)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ má na (a,b) Newtonův integrál a f je spojitá na (a,b). Potom má Newtonův integrál na (a,b) i funkce $|f|$ a platí*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Důkaz. Funkce $|f|$ je spojitá na (a,b), a tedy podle Věty 7.2 má na (a,b) primitivní funkci. Označme ji F. Protože $|f| \geq 0$ na (a,b), je F neklesající. Tedy existují limity $F(a+)$ a $F(b-)$, přičemž $F(b-) > -\infty$ a $F(a+) < \infty$. Výraz $[F]_a^b$ je tudíž definován, a tedy $|f|$ má Newtonův integrál na (a,b). Výraz $-\int_a^b f(x)\,dx$ je definován, a tedy podle Věty 8.18(b) má funkce $(-f)$ Newtonův integrál na (a,b) a platí $\int_a^b(-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. Navíc $f \leq |f|$ a $(-f) \leq |f|$ na (a,b), takže podle Věty 8.19 jest

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| &= \max\Big\{\int_a^b f(x)\,dx, -\int_a^b f(x)\,dx\Big\}\\ &= \max\Big\{\int_a^b f(x)\,dx, \int_a^b (-f(x))\,dx\Big\} \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

□

Poznámka. Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a,b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F-G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 8.22 (per partes pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a,b), F je primitivní funkce k funkci f na (a,b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a,b). Potom platí*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Předpokládejme, že výraz na pravé straně je definován. Potom existuje primitivní funkce k funkci fG na (a,b). Označme ji písmenem H. Platí

$$(FG-H)' = Fg + fG - fG = Fg,$$

a tedy $FG - H$ je primitivní funkce k Fg na (a,b). Z výše uvedené poznámky plyne, že

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = [FG-H]_a^b = [FG]_a^b - [H]_a^b = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

Odtud plyne tvrzení. □

Věta 8.23 (substituce pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f je funkce definovaná na (a,b) a φ je funkce definovaná na (α,β). Nechť φ má vlastní nenulovou derivaci na (α,β) a platí $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt, \tag{22}$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ má na intervalu (α, β) vlastní derivaci (funkci φ'). Z Darbouxovy vlastnosti derivace (Věta 7.5) tedy plyne, že obraz intervalu (α, β) při zobrazení φ', tedy množina $\varphi'((\alpha, \beta))$, je interval. Z předpokladu víme, že bod 0 není prvkem tohoto intervalu. Z toho vyplývá, že funkce φ' nemění na (α, β) znaménko. Předpokládejme, že φ' je záporná na (α, β). Nyní rozlišíme dvě možnosti. Nejprve budeme předpokládat, že existuje integrál na levé straně rovnosti (22) a pak na pravé.

Existuje $\int_a^b f(x)\,dx$. Potom má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $F(b-)$ a $F(a+)$. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že také funkce $(f \circ \varphi)(-\varphi')$ má na intervalu (α, β) primitivní funkci, a to funkci $-F \circ \varphi$. Máme

$$\lim_{t\to\beta_-} \varphi(t) = a, \quad \lim_{t\to\alpha_+} \varphi(t) = b,$$

a tedy, díky větě o limitě složené funkce,

$$\lim_{t\to\alpha_+} F(\varphi(t)) = \lim_{x\to b_-} F(x), \quad \lim_{t\to\beta_-} F(\varphi(t)) = \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt &= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,dt = [-F\circ\varphi]_\alpha^\beta \\ &= -\lim_{x\to a_+} F(x) + \lim_{x\to b_-} F(x) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Existuje $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)|\varphi'| = -(f\circ\varphi)\varphi'$. Z druhé věty o substituci (Věta 7.7) pak plyne, že $-G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f. Platí

$$\lim_{x\to a_+} \varphi^{-1}(x) = \beta, \quad \lim_{x\to b_-} \varphi^{-1}(x) = \alpha,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a_+} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\beta_-} G(t), \quad \lim_{x\to b_-} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t\to\alpha_+} G(t).$$

Odtud vyplývá, že

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[-G\circ\varphi^{-1}\right]_a^b = \left[G\right]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt.$$

□

konec 18. přednášky (18.4.2023)

8.3. Konvergence Newtonova integrálu.

Věta 8.24 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\delta_0 > 0$, a $F\colon P(a, \delta_0) \to \mathbb{R}$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a} F(x)$ právě tehdy, když*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in (0, \delta_0)\ \forall x, y \in P(a, \delta)\colon |F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme $A = \lim_{x\to a} F(x)$, potom $A \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta \in (0, \delta_0)$ takové, že

$$\forall x \in P(a, \delta) : |F(x) - A| < \varepsilon.$$

Pak pro každá $x, y \in P(a, \delta)$ platí

$$|F(x) - F(y)| \le |F(x) - A| + |A - F(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Zvolme posloupnost $\{x_n\}$ bodů $P(a, \delta_0)$ splňující $\lim x_n = a$ a $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta \in (0, \delta_0)$ z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky a potom k tomuto δ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $|x_n - a| < \delta$. Pak pro každá $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \ge n_0$, platí

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

Tedy posloupnost $\{F(x_n)\}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, a tudíž má vlastní limitu, kterou označíme A. Dokážeme, že $\lim_{x\to a} F(x) = A$. Zvolme posloupnost $\{y_n\}$ bodů $P(a,\delta_0)$ konvergující k a. Nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \colon x_n, y_n \in P(a,\delta) \ \&\ |F(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Potom pro $n \geq n_1$ platí

$$|F(y_n) - A| \leq |F(y_n) - F(x_n)| + |F(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Z Heineovy věty plyne, že $\lim_{x\to a} F(x) = A$. □

Poznámka. Tvrzení Věty 8.24 platí obdobně i pro jednostranné limity.

Věta 8.25 (konvergence Newtonova integrálu omezené spojité funkce na omezeném intervalu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená spojitá funkce na (a,b). Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Důkaz. Podle Věty 7.2 má f na (a,b) primitivní funkci F. Nalezneme $K > 0$ takové, že

$$\forall x \in (a,b) \colon |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{K}, b-a\}$. Pak pro každá $x, y \in (a, a+\delta)$, $x < y$, platí díky Větě 8.21

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\, dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|\ dt \leq K|y-x| < K\delta = \varepsilon.$$

Podle jednostranné verze Věty 8.24 tedy existuje vlastní $\lim_{x\to a_+} F(x)$. Obdobně lze dokázat, že existuje vlastní $\lim_{x\to b_-} F(x)$. □

Poznámka. Pro neomezený interval tvrzení Věty 8.25 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0,\infty)$, je spojitá a omezená na $(0,\infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0,\infty)$. Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu $\mathbb{R}$ také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ však dokonce ani neexistuje.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a,b]$. Potom podle Věty 8.15 platí $f \in \mathcal{R}(a,b) \cap \mathcal{N}(a,b)$ a

$$(R) \int_a^b f(x)\, dx = (N) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Následující věta rozšiřuje toto tvrzení i na funkce, které nejsou nutně spojité.

Věta 8.26 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a,b]$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a,b) \cap \mathcal{N}(a,b)$, pak*

$$(R) \int_a^b f(x)\, dx = (N) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože $f \in \mathcal{R}(a,b)$, podle Věty 8.17 nalezneme $\delta > 0$, takové, že pro každé dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ splňující $\nu(D) < \delta$ a každá $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, platí

$$\left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j - x_{i-j}) - (R) \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ o normě menší než δ a funkci F primitivní k f na (a,b). Položme

$$H(x) = \begin{cases} F(a+), & x = a, \\ F(x), & x \in (a,b), \\ F(b-), & x = b. \end{cases}$$

Potom je H dobře definovaná spojitá funkce na $[a,b]$, neboť $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Navíc $H' = f$ na (a,b). Pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ nalezneme pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě $t_j \in (x_{j-1}, x_j)$ splňující

$$H(x_j) - H(x_{j-1}) = H'(t_j)(x_j - x_{j-1}) = f(t_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = F(b-)-F(a+) = [H]_a^b = \sum_{j=1}^n \bigl(H(x_j)-H(x_{j-1})\bigr) = \sum_{j=1}^n f(t_j)\cdot(x_j-x_{j-1}).$$

Tedy

$$\left|(N)\int_a^b f(x)\,dx - (R)\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{j=1}^n f(t_j)(x_j-x_{j-1}) - (R)\int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení. $\square$

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Řešení. Označme $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pro $x \in (0,\infty)$. Potom je f spojitá na $(0,\infty)$. Protože $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1$, nalezneme $\delta > 0$ takové, že f je omezená na $(0,\delta)$. Ze spojitosti plyne, že f je omezená na $[\delta, 1]$, a tedy na $(0,1)$. Z Věty 8.25 tedy plyne, že $f \in \mathcal{N}(0,1)$. Podle Věty 7.4 (per partes) platí

$$\int \cos\frac{1}{x}\,dx = x\cos\frac{1}{x} - \int x(-\sin\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}\,dx, \quad x \in (0,\infty),$$

a tedy

$$\int \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx = x\cos\frac{1}{x} - \int \cos\frac{1}{x}\,dx, \quad x \in (0,\infty).$$

Podle Věty 8.25 integrál $\int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,dx$ konverguje, takže konverguje i integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx = \left[x\cos\frac{1}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,dx.$$

Podle Věty 8.23 pro $\varphi(t) = \frac{1}{t}$, $t \in (0,1)$, platí

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 t\left(\sin\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\,dt.$$

Protože, jak víme, integrál $\int_0^1 \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\,dt$ konverguje, konverguje i integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. Odtud plyne, že $f \in \mathcal{N}(1,\infty)$. Protože f je spojitá v 1, plyne z Věty 8.20(b), že $f \in \mathcal{N}(0,\infty)$.

konec 19. přednášky (21.4.2023)

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$.

Řešení. Označme F primitivní funkci k funkci $\frac{|\sin x|}{x}$ na $(0,\infty)$. Zvolme $m,n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Potom

$$\begin{aligned} F(m\pi) - F(n\pi) &= \int_{n\pi}^{m\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=n}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \\ &\geq \frac{1}{\pi}\sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k+1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

Protože řada $\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k+1}$ diverguje, neplatí Bolzanova–Cauchyova podmínka pro F v bodě ∞, a tedy podle Věty 8.24 jest $F(\infty-) = \infty$. Integrál $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ tedy diverguje.

Poznámka. Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ splňuje $f \in \mathcal{N}(0,\infty)$, ale $|f| \notin \mathcal{N}(0,\infty)$. Newtonův integrál je tedy neabsolutně konvergentní integrál (na rozdíl například od Lebesgueova integrálu).

Věta 8.27 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, pro každé $x \in [a,b)$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$, f je spojitá na $[a,b)$ a $g \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Důkaz. Zvolme $c \in (a,b)$ a označme G a F po řadě primitivní funkce ke g a f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c,b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c,b) neklesající. Protože $(G-F)(c) = 0$, platí $G \geq F$ na (c,b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, neboť jejich derivace jsou nezáporné. Tedy existují $F(b-)$ a $G(b-)$ a platí $F(b-) \leq G(b-)$. Protože $g \in \mathcal{N}(a,b)$, je $G(b-)$ vlastní. Protože je F neklesající, je i $F(b-)$ vlastní. Navíc je F spojitá v c, takže i $F(c+)$ je vlastní. Tedy $f \in \mathcal{N}(c,b)$. Protože f je spojitá na $[a,c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a,c)$ podle Věty 8.25. Z Věty 8.20(b) tedy plyne že $f \in \mathcal{N}(a,b)$. □

Poznámka. Platí následující obecnější verze srovnávacího kritéria. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $|f| \leq g$, f je spojitá na $[a,b)$ a $g \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Poznámka. Tvrzení Věty 8.27 a následné poznámky platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a,b]$.

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

Věta 8.28 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité a nezáporné. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,\infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Označme $A = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Nalezneme $c \in (a,b)$ takové, že

$$\forall x \in [c,b) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{A}{2}.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [c,b) : 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{A} f(x).$$

Protože $f \in \mathcal{N}(a,b)$, platí podle Věty 8.18 $\frac{2}{A} f \in \mathcal{N}(a,b)$. Proto $f \in \mathcal{N}(c,b)$ dle Věty 8.20(a), a tedy Věta 8.27 dává $g \in \mathcal{N}(c,b)$. Protože g je spojitá na $[a,c]$, platí $g \in \mathcal{N}(a,c)$. Dle Věty 8.20(b) je $g \in \mathcal{N}(a,b)$.

$\Leftarrow$ Tuto implikaci lze dokázat obdobně pomocí odhadu $\frac{f}{g} \leq 2A$ na $[c,b)$ pro vhodné $c \in (a,b)$. □

Příklad. Vyšetřete konvergenci integrálu $\int_0^{\infty} \frac{x+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^5}}\, dx$.

Věta 8.29 (Newtonův integrál součinu funkcí)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, nezáporná a nerostoucí. Potom*

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f \leq \int_a^b fg \leq g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f.$$

Speciálně platí

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq g(a) \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x f \right|.$$

Důkaz. Dokažme nejprve druhou nerovnost. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Věty 8.7 jsou f a fg stejnoměrně spojité na $[a,b]$. Nalezneme tedy $\delta > 0$ takové, že platí

$$(23) \qquad \forall x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta : |f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon \;\&\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Označme

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a,b],$$

a zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ s normou menší než δ. Pak máme ze (23) pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\forall t \in [x_{j-1}, x_j] : f(t) \geq f(x_{j-1}) - \varepsilon,$$

a tedy

$$f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)\, dt.$$

Obdobnou úvahou dostáváme pomocí (23)

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)g(t)\,dt &\le f(x_{j-1})g(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) + \varepsilon(x_j - x_{j-1})\\ &\le g(x_{j-1})\left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)\,dt + \varepsilon(x_j - x_{j-1})\right) + \varepsilon(x_j - x_{j-1})\\ &\le g(x_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)\,dt + (g(a)+1)\varepsilon(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Označme

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a)+1)(b-a).$$

Pak

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,dt &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)g(t)\,dt\\ &\le \sum_{j=1}^n g(x_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)\,dt + \sum_{j=1}^n \varepsilon(x_j - x_{j-1})(g(a)+1)\\ &= \sum_{j=1}^n g(x_{j-1})\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)\,dt + \varepsilon(g(a)+1)(b-a)\\ &= \sum_{j=1}^n g(x_{j-1})(F(x_j) - F(x_{j-1})) + \tilde{\varepsilon}\\ &= \sum_{j=1}^{n-1} F(x_j)(g(x_{j-1}) - g(x_j)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon}\\ &\le \sup_{t\in[a,b]} F(t)\left(\sum_{j=1}^{n-1}(g(x_{j-1}) - g(x_j)) + g(x_{n-1})\right) + \tilde{\varepsilon}\\ &= g(a)\sup_{t\in[a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a)+1)(b-a).\end{aligned}$$

Protože ε bylo libovolné, plyne odtud druhá nerovnost. První nerovnost lze dokázat obdobně. □

konec 20. přednášky (25.4.2023)

Věta 8.30 (o nulové funkci)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je nezáporná a $(N)\int_a^b f(x)dx = 0$. Potom pro každé $x \in (a,b)$ platí $f(x) = 0$.*

Důkaz. Zvolme primitivní funkci F k funkci f na (a,b). Potom F je neklesající na (a,b), protože má nezápornou derivaci f, a navíc platí $F(b-) = F(a+)$. Tedy F je konstantní na (a,b), takže $F' = 0$ na (a,b). □

Věta 8.31 (první věta o střední hodnotě)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná, $g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Důkaz. Protože f je spojitá na $[a,b]$, nabývá na $[a,b]$ svého minima m a svého maxima M. Pro $x \in [a,b]$ platí

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x),$$

a tedy

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{24}$$

Jestliže $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, pak je podle Věty 8.30 $g = 0$, a bod $\xi \in [a,b]$ volíme libovolně. Předpokládejme, že $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Potom podle (24) platí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Protože $f([a,b]) = [m,M]$ dle věty o zobrazení intervalu spojitou funkcí, nalezneme $\xi \in [a,b]$ splňující

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

□

Věta 8.32 (druhá věta o střední hodnotě)**.** *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a monotónní. Potom existuje $\xi \in [a,b]$ takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx. \tag{25}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že g je nezáporná a nerostoucí. Je-li g neklesající, nalezneme ξ pro $-g$. Funkce g je spojitá, a tedy omezená na $[a,b]$. Nalezneme tedy $C \in \mathbb{R}$ takové, že $g + C$ je nezáporná na $[a,b]$. Potom nalezneme příslušné ξ pro funkci $g + C$. V obou případech pak nalezené ξ vyhovuje i (25). Položme

$$\varphi(y) = g(a)\int_a^y f(t)\,dt + g(b)\int_y^b f(t)\,dt, \quad y \in [a,b].$$

Potom

$$\varphi(y) = (g(a) - g(b))\int_a^y f(t)\,dt + g(b)\int_a^b f(t)\,dt, \quad y \in [a,b].$$

Podle Věty 8.14(a) je funkce φ spojitá na $[a,b]$, a tedy existují body $y_1, y_2 \in [a,b]$ takové, že

$$\varphi(y_1) = \max_{y\in[a,b]} \varphi(y) \quad \text{a} \quad \varphi(y_2) = \min_{y\in[a,b]} \varphi(y).$$

Položme

$$\psi(t) = g(t) - g(b), \quad t \in [a,b].$$

Potom ψ je spojitá, nezáporná a nerostoucí na $[a,b]$, a tedy podle Věty 8.29 platí

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,dt - g(b)\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b f(t)\psi(t)\,dt \\ &\leq \psi(a)\sup_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,ds = (g(a)-g(b))\max_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,ds.\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,dt &\leq (g(a)-g(b))\max_{t\in[a,b]}\int_a^t f(s)\,ds + g(b)\int_a^b f(t)\,dt \\ &= \max_{t\in[a,b]}\left((g(a)-g(b))\int_a^t f(s)\,ds + g(b)\int_a^b f(t)\,dt\right) = \varphi(y_1).\end{aligned}$$

Obdobně lze pomocí Věty 8.29 dokázat, že

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt \geq \varphi(y_2).$$

Funkce φ je spojitá, a tedy podle Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot nalezneme $\xi \in [a,b]$ takové, že $\varphi(\xi) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$. Tedy

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \varphi(\xi) = g(a)\int_a^\xi f(t)\,dt + g(b)\int_\xi^b f(t)\,dt.$$

$\square$

8.4. **Aplikace určitého integrálu.**

Věta 8.33 (Cauchyova–Schwarzova–Buňakovského nerovnost)**.** *Nechť* $n \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. *Potom platí*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Důkaz. Položme

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$0 \leq f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Protože je uvedený kvadratický trinom nezáporný, je jeho diskriminant nekladný, tedy

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0.$$

Odtud plyne tvrzení. $\square$

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}^n$. **Normou** vektoru $x = (x_1, \dots, x_n)$ rozumíme hodnotu

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom platí

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\| \geq 0, \ [\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o]$,
(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tvrzení (a) a (b) jsou elementární. Z Věty 8.33 plyne pro každá $x, y \in \mathbb{R}$

$$\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Tím je ověřeno i tvrzení (c).

Věta 8.34 (norma a integrál)**.** *Nechť* $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *a* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *je spojité. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b f(x)\, dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\, dx.$$

Důkaz. Funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je spojitá na $[a, b]$, a proto $\int_a^b \|f(t)\|\, dt$ je konvergentní. Položme

$$y = \left[\int_a^b f_1(t)\, dt, \dots, \int_a^b f_n(t)\, dt\right].$$

Z Věty 8.33 plyne

$$\begin{aligned}
\|y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_a^b f_i(t)\, dt = \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(t)\Big)\, dt \\
&\leq \int_a^b \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i^2(t)\Big)}\, dt = \int_a^b \|y\| \|f(t)\|\, dt = \|y\| \int_a^b \|f(t)\|\, dt.
\end{aligned}$$

Pokud $y = 0$, pak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Pokud $\|y\| > 0$, pak nerovnost plyne z právě provedeného výpočtu. $\square$

konec 21. přednášky (28.4.2023)

Definice. **Křivkou** rozumíme spojité zobrazení $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Křivkou **třídy** $\mathcal{C}^1$ rozumíme křivku $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ takovou, že φ_i' je spojité na $[a,b]$, $i = 1, \dots, n$, přičemž v krajních bodech $[a,b]$ symbol $\varphi_i'(x)$ značí příslušnou jednostrannou derivaci.

Definice. Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D) : D \text{ je dělení intervalu } [a,b]\},$$

kde pro $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\|.$$

Věta 8.35 (délka křivky)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka třídy $\mathcal{C}^1$. Potom platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(x)\|\, dx.$$

Důkaz. Zvolme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ intervalu $[a,b]$. Potom z Věty 8.34 plyne

$$\sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| = \sum_{j=1}^k \|\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\, dt\| \le \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\, dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt.$$

Odtud plyne $L(\varphi) \le \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt$. Abychom dokázali obrácenou nerovnost, zvolme $\varepsilon > 0$. Protože jsou φ_i' stejnoměrně spojité na $[a,b]$, nalezneme $\delta > 0$, takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\forall s, t \in [a,b], |s-t| < \delta\colon\ |\varphi_i'(t) - \varphi_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Z definice normy plyne, že potom

$$\forall s, t \in [a,b], |s-t| < \delta\colon \|\varphi'(t) - \varphi'(s)\| < \varepsilon.$$

Zvolme $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ dělení $[a,b]$ splňující $\nu(D) < \delta$. Potom z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každé $t \in [x_{j-1}, x_j]$ platí

$$\|\varphi'(t)\| = \|\varphi'(x_j) + \varphi'(t) - \varphi'(x_j)\| \le \|\varphi'(x_j)\| + \|\varphi'(t) - \varphi'(x_j)\| \le \|\varphi'(x_j)\| + \varepsilon.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \|\varphi'(t)\|\, dt - \varepsilon(x_j - x_{j-1}) \le \|\varphi'(x_j)\|(x_j - x_{j-1}) &= \left\|\int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\varphi'(t) + \varphi'(x_j) - \varphi'(t)\right)\, dt\right\| \\ &\le \left\|\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi'(t)\, dt\right\| + \left\|\int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi'(x_j) - \varphi'(t))\, dt\right\| \\ &\le \left\|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\right\| + \varepsilon(x_j - x_{j-1}).\end{aligned}$$

Odtud vyplývá

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt \le \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\| + 2\varepsilon(b-a) \le L(\varphi) + 2\varepsilon(b-a).$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, dostáváme $\int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt \le L(\varphi)$. $\square$

Příklad. Spočtěte délku křivky $\varphi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$.

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Spočtěte délku křivky dané grafem f.

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Označme

$$T = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x \in [a,b],\ \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\}.$$

Potom hodnota

$$V(T) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

intuitivně odpovídá objemu tělesa T. Je-li navíc f' spojitá na (a,b), potom hodnota

$$S(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

intuitivně odpovídá povrchu pláště tělesa T.

Věta 8.36 (integrální kritérium konvergence řad)**.** *Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$, $f\colon [n_0,\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná, nerostoucí a spojitá, $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, platí $a_n = f(n)$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(n_0,\infty)$.*

Důkaz. Řada $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ má součet, neboť má nezáporné členy. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$, a dělení $D = \{n_0, n_0+1, \dots, n-1, n\}$ intervalu $[n_0, n]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy

$$\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i = \underline{S}(f,D) \le (R)\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \le \overline{S}(f,D) = \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i.$$

Protože je f spojitá na $[n_0, n]$, platí také

$$\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \le (N)\int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i.$$

Položme

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in [n_0,\infty).$$

Potom F je primitivní funkce k f na (n_0,∞) a platí $F(n_0) = 0$. Funkce F je navíc neklesající na (n_0,∞), protože má na tomto intervalu nezápornou derivaci, a tedy má v ∞ limitu. Posloupnost $\{F(n)\}_{n=n_0}^{\infty}$ je neklesající, tedy má limitu. Podle Heineovy věty je tato limita rovna limitě $\lim_{x\to\infty} F(x)$. Dále platí

$$\int_{n_0}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{n\to\infty} F(n).$$

$\Leftarrow$ Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \le \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt = F(n) \le \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Posloupnost $\left\{\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i\right\}$ je tedy shora omezená, takže řada $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i$ je konvergentní.

$\Rightarrow$ Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$F(n) \le \sum_{i=n_0}^{n-1} a_i \le \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i,$$

takže posloupnost $\{F(n)\}_{n=n_0}^{\infty}$ je shora omezená, její limita je tedy vlastní. Odtud plyne, že $f \in \mathcal{N}(n_0,\infty)$. $\square$

Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ v závislosti na parametru $\alpha \in (0,\infty)$.

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}$, $x \in [2,\infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2,\infty)$. Podle věty o substituci platí

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt.$$

Poslední integrál konverguje právě thedy, když $\alpha > 1$. Podle Věty 8.36 tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ konverguje právě thedy, když $\alpha > 1$.

Věta 8.37 (integrální tvar zbytku). *Nechť $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, f je funkce taková, že pro každé $y \in [a, x]$ existuje vlastní $f^{(n+1)}(y)$. Potom*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \, dy.$$

Důkaz. Položme

$$\varphi(y) = f(y) + f'(y)(x-y) + \cdots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

Potom

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \varphi'(y) \, dy = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \, dy.$$

□

konec 22. přednášky (2.5.2023)

9. Diferenciální rovnice

9.1. Základní pojmy.

Definice. Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0, \tag{26}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

Definice. Řešením diferenciální rovnice (26) rozumíme reálnou funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (26) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) = 0.$$

Řekneme, že řešení y rovnice (26) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $\mathcal{D}(y) \subsetneqq \mathcal{D}(z)$ a které se na $\mathcal{D}(y)$ shoduje s y.

Příklad. Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = \sqrt{1-y^2}$.

9.2. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

Definice. Diferenciální rovnicí 1. řádu se **separovanými proměnnými** rozumíme rovnici tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{27}$$

Věta 9.1 (lepení řešení). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in (a, b)$, $J \subset \mathbb{R}$ je interval, h je spojitá funkce na (a, b) a g je spojitá funkce na J. Nechť y_l je řešení (27) na (a, c), y_r je řešení (27) na (c, b), $A \in J$ a platí*

$$\lim_{x \to c_-} y_l(x) = \lim_{x \to c_+} y_r(x) = A.$$

Pak funkce $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$y(x) = \begin{cases} y_l(x), & x \in (a, c), \\ A, & x = c, \\ y_r(x), & x \in (c, b), \end{cases}$$

je řešení (27) na (a, b).

Důkaz. Jestliže $x \in (a,b) \setminus \{c\}$, potom je rovnice (27) zřejmě splněna. Díky spojitosti funkcí y, g a h a podle věty o limitě derivací dále platí

$$y'_-(c) = \lim_{x \to c_-} y'_l(x) = \lim_{x \to c_-} g(y_l(x))h(x) = g(A)h(c)$$

a

$$y'_+(c) = \lim_{x \to c_+} y'_r(x) = \lim_{x \to c_+} g(y_r(x))h(x) = g(A)h(c).$$

Tedy existuje vlastní $y'(c)$ a platí

$$y'(c) = g(A)h(c) = g(y(c))h(c).$$

$\square$

Algoritmus pro řešení rovnice (27) **pro spojité** g, h**.**

(a) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v $\mathcal{D}(h)$.

(b) Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, pak je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (27) na každém intervalu z (a). Těmto řešením říkáme **singulární** (nebo také **stacionární**).

(c) Určíme všechny maximální otevřené intervaly, na kterých je g nenulová.

(d) Vezmeme interval I z (a) a interval J z (c). Tedy h je spojitá na I a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x), \quad x \in \mathcal{D}(y).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na I a G je primitivní funkce k $\frac{1}{g}$ na J. Nalezneme $c \in \mathbb{R}$ takové, že platí $G(y(x)) = H(x) + c$ na definičním oboru řešení y, který určíme v následujícím kroku.

(e) Zvolíme $c \in \mathbb{R}$ a nalezneme všechny maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I; H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

Připomeňme, že $G^{-1} \colon G(J) \to \mathbb{R}$ existuje, neboť g je na intervalu J spojitá a nenulová, tudíž nemění znaménko, a tedy G je intervalu J ryze monotónní.

(f) Z řešení nalezených v (e) a singulárních řešení z (b) „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (27) pomocí Věty 9.1.

konec 23. přednášky (5.5.2023)

Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = 2x(1 + y^2)$.

Řešení. Položme $h(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$, a $g(y) = 1 + y^2$, $y \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce g a h spojité, budeme tedy postupovat podle algoritmu pro řešení (27).

(a) Existuje právě jeden maximální otevřený interval obsažený v $\mathcal{D}(h)$, a to $I = \mathbb{R}$.

(b) Rovnice nemá stacionární řešení.

(c) Existuje právě jeden maximální otevřený interval, na němž je funkce g nenulová, a to $J = \mathbb{R}$.

(d) Je-li y řešení na I s hodnotami v J, potom platí

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} = 2x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Integrací obou stran rovnice vzhledem k proměnné x zjistíme, že pro každé řešení y existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\operatorname{arctg}(y(x)) = x^2 + c$$

pro x z definičního oboru y, který musíme určit.

(e) Označme $G(y) = \operatorname{arctg}(y)$ pro $y \in \mathbb{R}$. Potom $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zvolme $c \in \mathbb{R}$ a označme

$$A_c = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2 + c \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\right\}.$$

Hledáme všechny maximální otevřené intervaly obsažené v A_c. Platí

$$A_c = \begin{cases} (-\sqrt{\frac{\pi}{2} - c}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2} - c}) \cup (\sqrt{-\frac{\pi}{2} - c}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}) & \text{pro } c \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}], \\ (-\sqrt{\frac{\pi}{2} - c}, \sqrt{\frac{\pi}{2} - c}) & \text{pro } c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \emptyset & \text{pro } c \in [\frac{\pi}{2}, \infty). \end{cases}$$

Označme

$$I_c^1 = \left(-\sqrt{\tfrac{\pi}{2} - c}, -\sqrt{-\tfrac{\pi}{2} - c}\right),\ I_c^2 = \left(\sqrt{-\tfrac{\pi}{2} - c}, \sqrt{\tfrac{\pi}{2} - c}\right) \quad \text{pro } c \in (-\infty, -\tfrac{\pi}{2}]$$

a

$$I_c = \left(-\sqrt{\tfrac{\pi}{2} - c}, \sqrt{\tfrac{\pi}{2} - c}\right) \quad \text{pro } c \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Potom y je maximální řešení právě tehdy, když buď $c \in (-\infty, -\frac{\pi}{2})$ a

$$y(x) = \operatorname{tg}(x^2 + c) \quad \text{pro } x \in I_c^1, \text{ nebo pro } x \in I_c^2,$$

nebo $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a

$$y(x) = \operatorname{tg}(x^2 + c) \quad \text{pro } x \in I_c.$$

(f) Všechna nalezená řešení jsou maximální, neboť limity v krajních bodech definičních oborů jsou nevlastní. Lepení řešení tedy nepřichází v úvahu.

Věta 9.2 (řešení rovnice se separovanými proměnnými)**.** *Nechť I, J jsou neprázdné otevřené intervaly, $h\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá a $g\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová. Nechť $x_0 \in I$ a $y_0 \in J$. Potom existuje řešení y rovnice* (27) *splňující $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je lokálně jednoznačné v následujícím smyslu: pro každé řešení z rovnice* (27) *splňující $z(x_0) = y_0$ existuje otevřený neprázdný interval $I_0 \subset I$ takový, že $x_0 \in I_0$ a $z = y$ na I_0.*

Důkaz. Položme

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\, dt, \quad x \in I,$$

a

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\, ds, \quad y \in J.$$

Potom z věty o derivaci funkce horní meze integrálu plyne, že $H' = h$ na I a $G' = \frac{1}{g}$ na J. Navíc platí $H(x_0) = 0$ a $G(y_0) = 0$. Protože $y_0 \in J$, platí $0 = G(y_0) \in G(J)$, a tedy $H(x_0) \in G(J)$. Funkce G je spojitá a ryze monotónní na J, neboť g je na J spojitá a nenulová, a tedy podle Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot funkce $\frac{1}{g}$ nemění znaménko na J. Odtud plyne, že $G(J)$ je otevřený interval obsahující 0 a existuje funkce $G^{-1}\colon G(J) \to J$. Ze spojitosti H v x_0 plyne, že existuje neprázdný otevřený interval I_1 splňující $x_0 \in I_1$ a

$$I_1 \subset \{x \in I; H(x) \in G(J)\}.$$

Potom funkce

$$y(x) = G^{-1}(H(x))$$

je řešení (27) na I_1 splňující

$$y(x_0) = G^{-1}(H(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

Předpokládejme, že z je nějaké řešení (27) splňující $z(x_0) = y_0$. Potom z je definováno na nějakém intervalu $I_2 \subset I$ obsahujícím x_0. Položme $I_0 = I_1 \cap I_2$. Potom pro každé $x \in I_0$ platí

$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = h(x).$$

Integrací přes interval (x_0, x) dostaneme $G(z(x)) = H(x)$, a tedy $z(x) = G^{-1}(H(x))$. To znamená, že $z = y$ na I_0. $\square$

9.3. **Lineární diferenciální rovnice prvního řádu.**

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $p, q\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité. Potom rovnici tvaru

$$y' = py + q \tag{28}$$

nazýváme **lineární diferenciální rovnicí prvního řádu**. **Homogenní** rovnicí příslušející k (28) nazýváme rovnici

$$y' = py. \tag{29}$$

Příklad. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $p\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Určete všechna maximální řešení rovnice (29).

Řešení. Položme $h(x) = p(x)$, $x \in (a,b)$, a $g(y) = y$, $y \in \mathbb{R}$. Budeme postupovat podle algoritmu pro řešení (27).

(a) Existuje právě jeden maximální otevřený interval obsažený v $\mathcal{D}(h)$, a to $I = (a,b)$.
(b) Existuje právě jedno stacionární řešení, a to $y(x) = 0$, $x \in (a,b)$.
(c) Existují právě dva maximální otevřené intervaly, na nichž je funkce g nenulová, a to $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.
(d) Je-li y řešení na I s hodnotami v J_1, nebo v J_2, potom platí

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = p(x), \quad x \in (a,b).$$

Označme P nějakou primitivní funkci k p na (a,b). Nalezneme $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\log|y(x)| = P(x) + c$$

na definičním oboru y.
(e) Označme $G(y) = \log|y|$ pro $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom $G(J_1) = G(J_2) = \mathbb{R}$, a tedy jsou všechna řešení definovaná na (a,b) a splňují

$$|y(x)| = e^{P(x)+c}, \quad x \in (a,b).$$

Všechna nalezená řešení včetně stacionárního lze zapsat ve tvaru

$$y(x) = ke^{P(x)}, \quad x \in (a,b),\ k \in \mathbb{R}.$$

(f) Lepení řešení nepřichází v úvahu.

Věta 9.3 (řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $p, q\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité. Nechť $x_0 \in (a,b)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. Potom existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (28) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je dáno vztahem*

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{-P(t)}\,dt\right) e^{P(x)} + y_0 e^{P(x)} \quad \text{pro } x \in (a,b), \tag{30}$$

kde P je primitivní funkce k p na (a,b) splňující $P(x_0) = 0$.

Důkaz. Derivováním dostaneme

$$y'(x) = q(x)e^{-P(x)}e^{P(x)} - p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right) + p(x)y_0e^{P(x)} \quad \text{pro } x \in (a,b).$$

Dále platí

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right) + p(x)y_0e^{P(x)} \quad \text{pro } x \in (a,b),$$

a tedy

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x) \quad \text{pro } x \in (a,b).$$

Navíc zřejmě platí $y(x_0) = y_0$. Předpokládejme, že z je řešení (28) na (a,b) splňující $z(x_0) = y_0$. Položme $u = y - z$. Potom u je řešením rovnice $u' = pu$. Podle předcházejícího příkladu nalezneme $c \in \mathbb{R}$ takové, že $u(x) = ce^{P(x)}$ na (a,b). Protože $u(x_0) = 0$, platí $c = 0$. Tedy $u(x) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$. Odtud plyne, že $y = z$ na (a,b). Řešení y definované předpisem (30) je tedy jednoznačně určeno. □

Poznámka (metoda variace konstant)**.** Řešení rovnice (28) splňující $y(x_0) = y_0$ musí být tvaru (30). To vyplývá z následující takzvané **metody variace konstant**. Hledáme řešení (28) ve tvaru $y(x) = k(x)e^{P(x)}$. Potom $y'(x) = k'(x)e^{P(x)} + k(x)p(x)e^{P(x)}$. Dosazením do rovnice dostaneme $k'(x)e^{P(x)} + k(x)p(x)e^{P(x)} = k(x)e^{P(x)}p(x) + q(x)$, a tedy $k'(x) = q(x)e^{-P(x)}$. Tudíž $k(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{-P(t)}\,dt + c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Hodnotu c vypočítáme z podmínky $y(x_0) = y_0$. Dostaneme $c = y_0$.

konec 24. přednášky (9.5.2023)

9.4. **Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty.**

Definice. Lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f, \tag{31}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. **Homogenní rovnicí** příslušející k rovnici (31) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{32}$$

Věta 9.4 (existence a jednoznačnost řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $x_0 \in (a,b)$ a $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice* (31) *splňující*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Toto řešení je definováno na celém intervalu (a,b).

Věta 9.5 (množina řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty)**.** (a) *Maximální řešení rovnice* (32) *jsou definována na celém $\mathbb{R}$. Množina všech těchto řešení tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ dimenze n.*

(b) *Nechť y_p je nějaké maximální řešení rovnice* (31)*. Potom funkce $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je maximální řešení* (31) *právě tehdy, když funkce y_h definovaná předpisem $y_h = y - y_p$ je řešení rovnice* (32)*.*

Důkaz. (a) Podle Věty 9.4 jsou maximální řešení definovaná na $\mathbb{R}$. Označme

$$H = \{y \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}) : y \text{ je řešení } (31)\}.$$

Defimujme zobrazení L na $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ předpisem

$$L\colon y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Potom L je lineární zobrazení z $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ do $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ a platí $\operatorname{Ker} L = H$. Odtud plyne, že H je lineární prostor. Nyní určíme jeho dimenzi.

Podle Věty 9.4 nalezneme řešení $\{y_1, \dots, y_n\}$ rovnice (32) definovaná na $\mathbb{R}$ a splňující

$$\begin{array}{cccc} y_1(0) = 1 & y_2(0) = 0 & \dots & y_n(0) = 0 \\ y_1'(0) = 0 & y_2'(0) = 1 & \dots & y_n'(0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) = 0 & y_2^{(n-1)}(0) = 0 & \dots & y_n^{(n-1)}(0) = 1. \end{array}$$

Předpokládejme, že pro $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ platí

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Položme $z = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$. Potom

$$z(0) = c_1,\ z'(0) = c_2, \dots,\ z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Zároveň ale platí

$$z(0) = 0,\ z'(0) = 0,\ \dots,\ z^{(n-1)}(0) = 0,$$

neboť z je nulová funkce. Tedy $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Odtud plyne, že $\{y_1, \dots, y_n\}$ jsou lineárně nezávislé prvky prostoru H. Předpokládejme, že y je maximální řešení (32). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n.$$

Potom z je řešení (32) definované na $\mathbb{R}$ a platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n. \tag{33}$$

Z Věty 9.4 plyne, že maximální řešení (32) splňující podmínky (33) je určeno jednoznačně. Protože y i z tyto podmínky splňují, platí $y = z$.

(b) $\Rightarrow$ Z linearity L plyne, že

$$L(y_h) = L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = f - f = 0,$$

a tedy $y_h \in \operatorname{Ker} L = H$.

$\Leftarrow$ Jest

$$L(y) = L(y_p + y_h) = L(y_p) + L(y_h) = f + 0 = f,$$

a tedy y je řešení (31). □

Definice. Fundamentálním systémem rovnice (32) rozumíme (jakoukoli) bázi prostoru všech maximálních řešení rovnice (32).

Příklad. Určete všechna maximální řešení rovnice

$$y'' + y = x^3 + 6x. \tag{34}$$

Řešení. Funkce $\cos x$ a $\sin x$ jsou řešení homogenní rovnice

$$y'' + y = 0 \tag{35}$$

definovaná na $\mathbb{R}$ a jsou lineárně nezávislá. Tedy $\{\cos x, \sin x\}$ je fundamentální systém rovnice (35). Funkce $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, je partikulární řešení rovnice (34). Tedy podle Věty 9.5(b) jsou všechna maximální řešení rovnice (34) tvaru

$$y(x) = x^3 + \alpha \cos x + \beta \sin x, \quad x \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Definice. Charakteristickým polynomem rovnice (32) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Věta 9.6 (fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu χ s násobnostmi $r_1, \ldots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_l + i\beta_l$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}$. Pak funkce*

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \ldots & x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s x}, & \ldots & x^{r_s-1}e^{\lambda_s x}, \\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & \ldots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & \ldots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & \ldots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, \\
e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & \ldots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x
\end{array}$$

tvoří fundamentální systém (32).

Věta 9.7 (partikulární řešení rovnice se speciální pravou stranou)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, P, Q jsou polynomy a*

$$f(x) = e^{\mu x}\left(P(x)\cos\nu x + Q(x)\sin\nu x\right) \quad \text{pro } x \in (a, b).$$

Nechť $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je násobnost čísla $\mu + i\nu$ jakožto kořenu charakteristického polynomu (32)*. Potom existuje řešení* (31) *ve tvaru*

$$y(x) = x^m e^{\mu x}\left(R(x)\cos\nu x + S(x)\sin\nu x\right) \quad \text{pro } x \in (a, b),$$

kde R, S jsou polynomy, jejichž stupeň není větší než $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$.

konec 25. přednášky (12.5.2023)

Poznámka. Z Věty 9.5 vyplývá, že k úplnému popisu množiny všech řešení rovnice (31) stačí určit fundamentální systém příslušné homogenní rovnice (32) a nalézt libovolné jedno partikulární řešení (nehomogenní) rovnice (31). První krok (nalezení fundamentálního systému) byl proveden ve Větě 9.6. Druhý krok (nalezení partikulárního řešení) byl proveden zatím pouze v případě, kdy pravá strana (tedy funkce f) má speciální tvar (Věta 9.7). V obecném případě tento krok provedeme pomocí metody variace konstant. K tomu se bude hodit následující tvrzení.

Věta 9.8 (regularita fundamentálního systému)**.** *Nechť* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *je fundamentální systém* (32). *Potom je matice*

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

regulární pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že pro nějaké $v \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathbb{A}(x)v = o$. Položme

$$z = v_1 y_1 + \cdots + v_n y_n.$$

Potom z je řešení (32) a platí

$$\begin{aligned} z(x) &= v_1 y_1(x) + \cdots + v_n y_n(x) = 0, \\ z'(x) &= v_1 y_1'(x) + \cdots + v_n y_n'(x) = 0, \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(x) &= v_1 y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + v_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{aligned}$$

Podle Věty 9.4 platí $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém, tedy jsou lineárně nezávislé, a proto je $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$. Odtud vyplývá, že $\mathbb{A}(x)$ je regulární. Protože x bylo zvoleno libovolně, plyne odtud tvrzení. $\square$

Algoritmus pro hledání řešení rovnice (31) **metodou variace konstant pro rovnice vyššího řádu.**

Řešení rovnice (31) budeme hledat ve tvaru

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n,$$

kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na (a, b) a $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je fundamentální systém (32). Potom platí

$$y' = c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n.$$

Položme $c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0$. Derivováním dostaneme

$$y'' = c_1 y_1'' + \cdots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n'.$$

Položme $c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' = 0$. Pokračujme až k rovnici

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)}.$$

Dosaďme y do (31). Dostaneme soustavu podmínek

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f, \end{aligned}$$

neboli

$$\mathbb{A}(x)c'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \text{pro } x \in (a,b). \tag{36}$$

Zvolme $x \in (a,b)$. Potom je (36) soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$. Matice této soustavy je podle Věty 9.8 regulární, takže existuje právě jedno řešení. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Z Cramerova pravidla dostaneme

$$c_i'(x) = \frac{\det \mathbb{A}_i(x)}{\det \mathbb{A}(x)},$$

kde

$$\mathbb{A}_i = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_{i-1}^{(n-2)} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}^{(n-1)} & f & y_{i+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Funkce $x \mapsto \frac{\det \mathbb{A}_i(x)}{\det \mathbb{A}(x)}$ je spojitá na (a,b), a tedy má primitivní funkci. Odtud plyne existence hledaných funkcí $c_1, \dots, c_n$. Tyto funkce spočítáme integrací a dosadíme do definice y.

9.5. **Soustavy diferenciálních rovnic.**

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$. **Otevřenou koulí** se středem v x a poloměrem r rozumíme množinu

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}.$$

Řekneme, že množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je **otevřená** jestliže pro každé $x \in G$ existuje $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset G$.

Poznámka. Prázdná množina je otevřená. Množina $\mathbb{R}^n$ je otevřená. Otevřená koule je otevřená množina. Množina $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$. Množina $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x < 1,\ 0 < y < 1\}$ není otevřená v $\mathbb{R}^2$.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je neprázdná otevřená množina a $f\colon G \to \mathbb{R}^n$, tedy $f_i\colon G \to \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Uvažujme **soustavu diferenciálních rovnic**

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{37}$$

pro $[x,y] \in G$. Soustavu můžeme zapsat ve vektorovém tvaru:

$$y' = f(x,y),\ \text{případně } y'(x) = f(x, y(x)),$$

kde $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y' = (y_1', \dots, y_n')$ a $f = (f_1, \dots, f_n)$. **Řešením** soustavy (37) rozumíme vektorovou funkci $y = (y_1, \dots, y_n)$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $x \in J$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje vlastní derivace $y_i'(x)$ a platí (37). **Počáteční úlohou** pro (37) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení (37) splňující navíc předem zadanou podmínku $y(x_0) = y^0$, kde $[x_0, y^0] \in G$ (této podmínce se říká **počáteční podmínka**). **Maximálním řešením** soustavy (37) rozumíme takové řešení y definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li z řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $z(x) = y(x)$ pro každé $x \in J$, pak $J = I$.

Poznámka. Uvažujme rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{38}$$

a soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\ \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{39}$$

Pokud y řeší (39), pak y_1 řeší (38). Obráceně, pokud z řeší (38), pak $(z, \dots, z^{(n-1)})$ řeší (39).

Věta 9.9 (Peanova)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina a $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce na G, tedy*

$$\forall [x, y] \in G\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall [x', y'] \in G, \|[x, y] - [x', y']\| < \delta : \|f(x, y) - f(x', y')\| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $[x_0, y^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (37) *splňující $y(x_0) = y^0$.*

Věta 9.10 (Picardova)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení na G a je „lokálně lipschitzovské v y", tj. pro každý bod $[x, y] \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a $K > 0$ takové, že pro každé dva body $[s, y^1], [s, y^2] \in B([x, y], \varepsilon)$ máme*

$$\left\| f(s, y^1) - f(s, y^2) \right\| \le K \left\| y^1 - y^2 \right\|.$$

Pro každé $[x_0, y^0] \in G$ existuje právě jedno maximální řešení y rovnice (37) *splňující $y(x_0) = y^0$.*

konec 26. přednášky (16.5.2023)

Poznámka. Jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$, potom je f lokálně lipschitzovská ve druhé proměnné.

9.6. **Soustavy lineárních diferenciálních rovnic.** Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n + b_1, \\ y_2' &= a_{21} y_1 + \dots + a_{2n} y_n + b_2, \\ &\ \vdots \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n + b_n, \end{aligned} \tag{40}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce. Soustavu zapisujeme ve vektorovém tvaru:

$$y' = \mathbb{A} y + b,$$

kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Homogenní soustavou k (40) rozumíme soustavu

$$y' = \mathbb{A} y. \tag{41}$$

Věta 9.11 (řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ a $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom*

(a) *existuje právě jedno maximální řešení y soustavy* (40) *splňující $y(x_0) = y^0$, a toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β);*

(b) *množina všech maximálních řešení soustavy* (41) *tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ dimenze n;*

(c) *každé řešení y soustavy (40) na intervalu (α,β) má tvar $y = y_p + y_h$, kde y_p je nějaké řešení (40) a y_h je nějaké řešení (41);*

(d) *jestliže $\{y^1,\dots,y^n\}$ je fundamentální systém řešení soustavy (41), potom **fundamentální matice** soustavy (41) definovaná předpisem*

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & \dots & y_2^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $x \in (\alpha,\beta)$;

(e) *(variace konstant) maximální řešení y rovnice (40) s počáteční podmínkou $y(x_0) = y^0$ má tvar*

$$y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y^0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)b(t)\,dt, \quad x \in (\alpha,\beta).$$

9.7. **Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.**

Věta 9.12 (řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in M(n\times n)$ a vektorová funkce $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ je řešením soustavy $y' = \mathbb{A}y$. Pak $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ a pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí $y^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k y(x)$ pro $x\in\mathbb{R}$.*

Definice. Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami** λ-matice rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Lemma (úprava sloupce)**.** *Nechť $\Lambda = (P_1,\dots,P_n)^T$ je λ-matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na λ-matici $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1,\dots,\tilde{P}_n)^T$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1,\dots,\tilde{P}_n$ je nenulový.*

Věta 9.13 (úprava matice $\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A}$)**.** *Nechť $\mathbb{A}\in M(n\times n)$. Pak lze λ-matici $\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A}$ převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou λ-matici. Výsledná λ-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n.*

Značení.

- Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbb{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$
- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n\times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu
$$\begin{aligned} P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0, \\ P_{21}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{2n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \dots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0. \end{aligned}$$

Poznámka. Nechť P, Q jsou polynomy a $y\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Potom platí

- $(P+Q)(\frac{d}{dx})y = P(\frac{d}{dx})y + Q(\frac{d}{dx})y$,
- $(PQ)(\frac{d}{dx})y = P(\frac{d}{dx})(Q(\frac{d}{dx})y)$.

Věta 9.14 (řešení soustavy vzniklé pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav)**.** *Nechť λ-matice $\widetilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav λ-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$ právě tehdy, když je řešením soustavy odpovídající $\widetilde{\mathbb{P}}$.*

Příklad. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2. \end{aligned}$$

Řešení. Řádkovými úpravami převedeme λ-matici $\mathbb{I} - \mathbb{A}$ na horní trojúhelníkovou, tedy

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

Upravené matici odpovídá soustava

$$\begin{aligned} y_1 + \frac{1}{2}y_2' + y_2 &= 0, \\ y_2'' - 2y_2' + 2y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vypočteme

$$y_2 = \alpha_1 e^x \sin x + \alpha_2 e^x \cos x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Derivováním a dosazením do první rovnice dostaneme

$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^x \sin x + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^x \cos x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

konec 27. přednášky (19.5.2023)