Přednáška 14

20 $\frac{6}{I}$ 21

2.7. OPERÁTORY SDRUŽENÉHO TYPU A CALDERÓNŮV OPERÁTOR

víme: 1) nerovnosti:

$$(Mf)^*(t) \leq c\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right) \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$
$$\forall t \in (0,\infty),$$

$$(Tf)^*(t) \leq c\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds + \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s}\,ds\right)$$
$$\forall f \in \mathcal{D}(T) \quad \forall t \in (0,\infty),$$

2) aplikace těchto nerovností, např. pro L^p-omezenost operátorů:

pro $p \in (1,\infty]$:

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|(Mf)^*\|_{L^p(0,\infty)}$$
$$\leq c\left\|\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right\|_{L^p(0,\infty)}$$
$$\leq c'\,\|f^*\|_{L^p(0,\infty)} \quad \left(\begin{array}{l}\text{omezenost } A\\ \text{nebo Hardyova}\\ \text{nerovnost}\end{array}\right)$$
$$= c'\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

tedy $M: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in (1,\infty]$

a platí $\|Mf\|_{L^p} \leq c'\,\|f\|_{L^p} \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Podobně, je-li $p \in (1,\infty)$ a T je S/O, pak

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$

a $\quad \|Tf\|_p \leq c\,\|f\|_p \qquad \forall f \in \mathcal{D}(T).$

<u>Poznámky</u>: 1) Mezi M a T je rozdíl: M je omezený na $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, T nikoli (obecně tam není ani definován).

2) Existují i spodní odhady, takže popis akce operátorů je „optimální" („přesný"), tj. v jistém smyslu jej nelze vylepšit:

pro M platí „bodový":

$$(Mf)^*(t) \geq c\,\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \quad \forall f\,\forall t,$$

pro H bodový dolní odhad neplatí, místo něj ale platí:

jestliže $(Sf)^*(1)<\infty$, kde $S = A + A'$,

tj. $Sg(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g(s)\,ds + \int_t^\infty \frac{g(s)}{s}\,ds$, potom

existuje g splňující $g^* = f^*$ (jsou souměřitelné – equimeasurable) a taková, že

$$S(f^*) \leq 2\pi\,(Hg)^* \quad \text{na } (0,\infty)$$

(konstrukce: $\quad g = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ f^*(-x), & x < 0 \end{cases}$)

IDEA: vybudujeme na základě těchto pozorování obecný interpolační princip, lepší než Marcinkiewiczova věta v tom smyslu, že bude zahrnovat i operátory typu H nebo SIO.

POSTUP (SCHÉMA METODY). Předpokládejme, že

- je dán operátor T, $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{M}_0(R,\mu)$, kde (R,μ) je σ-konečný prostor s mírou, $\mathcal{M}_0(R,\mu) = \{ f : R \to \mathbb{R} : f \ \mu\text{-měřitelná}, f \text{ je konečná } \mu\text{-a.e. na } R \}$,
- S je operátor splňující: $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{M}_0((0,\infty), dx)$, platí: $$(Tf)^*(t) \leq c\, S(f^*)(t)$$ $$(\exists c > 0 \ \forall f \in \mathcal{D}(T) \ \forall t \in (0,\infty)),$$
- X, Y alespoň kvazinormované lineární prostory, $X \subset \mathcal{M}(R,\mu)$, $Y \subset \mathcal{M}(S,\nu)$, chceme dokázat, že $T : X \to Y$ ve smyslu, že $$\exists C > 0 \ \forall f \in \mathcal{D}(T) : \ \|Tf\|_{Y(S,\nu)} \leq C \|f\|_{X(R,\mu)},$$
- (kvazi)normy $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ jsou „representovatelné" ve smyslu: $$\|f\|_{X(R,\mu)} = \|f^*\|_{X(0,\infty)},$$
- Y má svazovou vlastnost („lattice property"), tj: $$0 \leq f \leq g \Rightarrow \|f\|_{Y(S,\nu)} \leq \|g\|_{Y(S,\nu)},$$

• $S : X(0,\infty) \to Y(0,\infty)$.

Potom

$$\|Tf\|_{Y(S,\nu)} = \|(Tf)^*\|_{Y(0,\infty)} \qquad \text{(representace } Y\text{)}$$

$$\leq c\,\|S(f^*)\|_{Y(0,\infty)} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{lattice \& odhad}\\ T \text{ pomocí } S\end{array}\right)$$

$$\leq c'\,\|f^*\|_{X(0,\infty)} \qquad (S : X(0,\infty) \to Y(0,\infty))$$

$$= c'\,\|f\|_{X(R,\mu)} \qquad \text{(representace } X\text{)}.$$

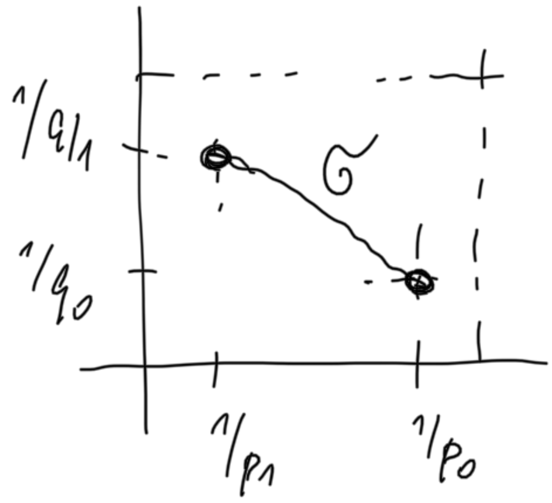
Netriviální je 3. krok ($S : X(0,\infty) \to Y(0,\infty)$), např. pro M je $S = A$, tedy 3. krok je Hardyova nerovnost, resp. omezenost A na L^p (platí pro $p \in (1,\infty]$)), pro H je $S = A + A'$, tedy 3. krok jsou dvě Hardyovy nerovnosti, resp. omezenost A, A' na L^p (platí pro $p \in (1,\infty)$).

OTÁZKY: 1) Jak z toho vybudovat interpolační princip?

2) Jaké další operátory můžeme zapojit do hry?

3) Na jakou třídu prostorů funkcí lze tuto teorii rozšířit?

DEFINICE. Nechť $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $q_0 \neq q_1$. Označme $\sigma = \left[\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right), \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)\right]$. Pak σ nazýváme interpolačním segmentem. Hodnotu



$$m = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

nazýváme sklonem σ (slope).

Pro g měř., ≥ 0, $t \in (0,\infty)$ položme

$$\left(S_\sigma g\right)(t) = t^{-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}-1} g(s)\,ds + t^{-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}-1} g(s)\,ds.$$

Operátor S_σ nazýváme Calderónovým operátorem příslušejícím interpolačnímu segmentu σ.

PŘÍKLAD: Pro $\sigma = [(1,1),(0,0)]$ je $S_\sigma = A + A'$.

DEFINICE. Nechť $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $q_0 \neq q_1$, nechť T je kvazilineární operátor vzhledem k (R,μ) a (S,ν), tj.:

$D(T)$ je lineární podprostor $M_0(R,\mu)$,

$R(T) \subset M(S,\nu)$,

$\exists C \geq 1$: $\quad |T(f+g)| \leq C\left(|Tf| + |Tg|\right)$,

$\quad |T(\lambda f)| = |\lambda| \cdot |Tf|$

ν-a.e. na S $\forall f,g \in D(T)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Řekneme, že T je sdruženého typu $(p_0, q_0; p_1, q_1)$

(joint weak type, jwt), jestliže

$$(Tf)^*(t) \le c\, S_\sigma(f^*)(t)$$

$(\exists c>0\ \forall f\in \mathcal{D}(T)\ \forall t\in(0,\infty))$.

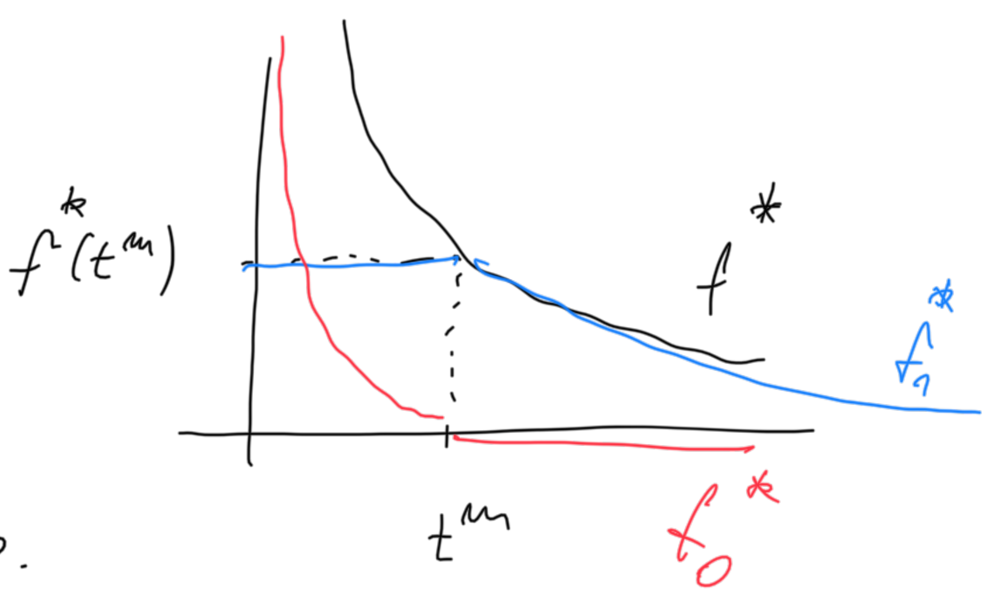
<u>Poznámka</u>. Sám operátor S_σ je sdruženého typu $(p_0,q_0;p_1,q_1)$, neboť $(S_\sigma f)^* = S_\sigma f \le S_\sigma(f^*)$ pro každou $f\ge 0$ splňující $S_\sigma(f^*)(1)<\infty$. (cvičení)

<u>Příklady</u>: M a T jsou sdruženého typu $(1,1,\infty,\infty)$, přičemž M je „lepší".

<u>Poznámka</u>. Nechť $1\le p_0<p_1<\infty$, $1\le q_0,q_1\le\infty$, $q_0\ne q_1$, a T je kvazilineární operátor, potom T je sdruženého typu $(p_0,q_0;p_1,q_1)$ právě tehdy, když je slabého typu (p_0,q_0), (p_1,q_1). Myšlenka důkazu: „$\Rightarrow$" jednoduché ($z\ (Tf)^*\le S_\sigma(f^*)$),

„$\Leftarrow$" $f_1 = \min\{|f|, f^*(t^m)\}\operatorname{sign} f$,

$f_0 = f - f_1$



Použije se kvazilinearita a slabé typy.

Podstatné je, že $p_1<\infty$.

Pro případy, kdy $p_1 = \infty$, může být operátor sdruženého typu, ačkoli není příslušných slabých typů. Příklady: H, T (S10). V tomto smyslu interpolace operátorů sdruženého typu rozšiřuje Marcinkiewiczovu větu.

OTÁZKA (PROBLÉM): Nalézt k danému operátoru „jeho" Calderónův operátor.

Příklady: (i) Daná funkce g na $\mathbb{R}^n$, definujme konvolutor K_g: $K_g(f) = g * f$.

Věta (O'Neil 1964): Je-li $g \in L^{p,\infty}$, pak K_g je sdruženého typu $(1, p; p', \infty)$. Speciální případ: Rieszův potenciál: pro $\gamma \in (0, n)$:

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\, dy,$$

tedy zde $g(x) = |x|^{\gamma - n} \in L^{\frac{n}{n-\gamma}, \infty}$, takže

I_γ je sdruženého typu $\left(1, \frac{n}{n-\gamma}; \frac{n}{\gamma}, \infty\right)$.

Pozn. odhady jsou optimální.

(ii) frakční maximální operátor: $\gamma \in [0, n)$:

$$M_\gamma f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \int_Q |f(y)|\, dy.$$

Platí bodový odhad $M_\gamma f \le c\, I_\gamma(|f|)$, neboť

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy \ge \int_{Q \ni x} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy$$

$$\ge \frac{1}{(\operatorname{diam} Q)^{n-\gamma}} \int_Q |f(y)|\,dy$$

$$= \frac{c}{|Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \int_Q |f(y)|\,dy$$

a vezmeme $\sup_Q$. Tedy

$$I_\gamma : X \to Y \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad M_\gamma : X \to Y,$$

speciálně M_γ je sdruženého typu $(1, \frac{n}{n-\gamma}; \frac{n}{\gamma}, \infty)$.

Ale to NENÍ optimální informace. M_γ má „blízko" L^∞ „lepší" vlastnosti, než I_γ, mají.

$$\|M_\gamma f\|_{L^\infty} = \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \int_Q |f| \qquad \left(\begin{matrix}\text{Lorentzovský}\\ \text{Hölder}\end{matrix}\right)$$

$$\le \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \|f\|_{\frac{n}{\gamma},\infty} \cdot \|\chi_Q\|_{\frac{n}{n-\gamma},1}$$

$$= \|f\|_{\frac{n}{\gamma},\infty}.$$

Takže $M_\gamma : L^{\frac{n}{\gamma},\infty} \to L^\infty$, zatímco I_γ splňuje pouze $I_\gamma : L^{\frac{n}{\gamma},1} \to L^\infty$ (jak víme).

<u>Otázka</u>: co je vhodný Calderónův operátor pro M_γ? Otevřená až do 2000.

<u>Věta</u> (Cianchi a spol.): $\gamma \in [0,n)$, pak

$$(M_\gamma f)^*(t) \lesssim \sup_{t \le s \le 1} s^{\frac{\gamma}{n}} f^{**}(s)$$

$\forall f \ \forall t$ (zahrnuje i případ $M_0 = M$).

<u>Pozn.</u> Odhad je optimální!

(iii) Laplaceova transformace je sdruženého typu $(1,\infty;\infty,1)$ a splňuje

$$(\mathcal{L}f)^*(t) \le \int_0^{1/t} f^*(s)\,ds.$$

<u>Pozn.</u> Odhad je optimální!

(iv) Fourierova transformace je sdruženého typu $(1,\infty;2,2)$ a splňuje

$$(\mathcal{F}f)^*(t) \le \int_0^{1/t} f^*(s)\,ds + t^{-\frac{1}{2}} \int_{1/t}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} f^*(s)\,ds.$$

Pozn. Neví se, zda je optimální.

(v) „dědění regularity"

Uvažujme rovnici $\Delta u = f$ na Ω
$u = 0$ na $\partial\Omega$,

Ω omezená lipschitzovská oblast v $\mathbb{R}^n$,

otázka: víme-li něco o f, co můžeme říci o u?

Lze dokázat, že

$$u^*(t) \leq c\left(t^{\frac{2}{n}-1} \int_0^t (\Delta u)^*(s)\,ds + \int_t^{|\Omega|} s^{\frac{2}{n}-1} (\Delta u)^*(s)\,ds \right)$$

$$= S_\sigma((\Delta u)^*),$$

kde $\sigma = \left(1, \frac{n}{n-2}; \frac{n}{2}, \infty\right)$. Odtud:

- $f \in L^p$, $1 < p < \frac{n}{2}$ $\Rightarrow$ $u \in L^{\frac{np}{n-2p}}$
- $f \in L^1$ $\Rightarrow$ $u \in L^{\frac{n}{n-2},\infty}$,
- $f \in L^{\frac{n}{2},1}$ $\Rightarrow$ $u \in L^\infty$ a u je spojitá,
- $f \in L^p$, $p > \frac{n}{2}$ $\Rightarrow$ $u \in C^{0,\alpha}$, $\alpha = 1 - \frac{2p}{n}$

atd. (je to optimální).

Obdobná tvrzení platí pro různé typy Sobolevových vnoření.

Fundamentální interpolační princip:

Calderónove věte (1966):

- každý kvazi-lineární operátor sdruženého typu je omezený z $X \to Y$ (X, Y vhodné (r.i.) prostory)

$(\Longleftarrow)$

- $S_\sigma : X \to Y$.

(!)