ÚVOD DO TEORIE INTERPOLACÍ

přednáška ZS 2020–2021

Luboš Pick

LITERATURA:

- C. Bennett – R. Sharpley: Interpolation of Operators, Academic Press 1988
- Krejn – Petunin – Semënov: Interpolation of Linear Operators, Moscow 1971
- Bergh – Löfström: Interpolation Spaces. An Introduction, Springer 1976
- Y. Brudnyi – N. Krugljak: Interpolation Functors and Interpolation Spaces, Amsterdam 1991.
- zápisky z přednášek

Požadavky ke zkoušce:

- jedna z pěti definic
- jedna z pěti vět
- jeden z pěti důkazů (i s věty)

1. ÚVOD DO ÚVODU

Teorie interpolací je součástí FA (20. století).

Počátek ... kolem 1926

Předmětem studia jsou zejména

- (kvazi-) normované lineární prostory
- operátory ((kvazi-) lineární zobrazení mezi těmito prostory)
- prostory funkcí (a posloupností).

K čemu je to dobré?

- nový pohled na určité problémy
- jiné formulace
- účinné metody řešení.

základní úloha FA:

vyšetřit, zda je daný operátor omezený (kompaktní apod.) z jednoho prostoru do druhého.

<u>DEFINICE.</u> Nechť X, Y jsou kvazinormované lineární prostory a T je operátor definovaný na X s hodnotami v Y. Řekneme, že T je <u>omezený</u> z X do Y (značíme $T: X \to Y$), jestliže

$$\exists C > 0 \ \forall f \in X: \quad \|Tf\|_Y \leq C \|f\|_X .$$

Je-li $T = Id$, pak říkáme, že X je <u>vnořen</u> do Y a značíme $X \hookrightarrow Y$. <u>Normou</u> operátoru rozumíme hodnotu

$$\|T\|_{X \to Y} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X} =$$

$$= \inf \{ C ; \|Tf\|_Y \leq C \|f\|_X \ \forall f \}.$$

<u>Motivace:</u> moderní metody řešení DR

- pojem slabého řešení
- Sobolevovy prostory
- klasické Sob. prostory jsou vybudovány pomocí škály Lebesgueových prostorů.

Lebesgueovy prostory

(R,μ) ... prostor se σ-konečnou mírou

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, \quad 0 < \mu(R_n) < \infty, \quad R_n \subset R_{n+1} \ \forall n$$

$$\mathcal{M}(R,\mu) = \{ f : R \to \mathbb{C};\ f\ \mu\text{-měř.} \}$$

$p \in (0,\infty]$,

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(R,\mu)} =$$

$$= \begin{cases} \left(\int_R |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \mu\text{-}\operatorname{esssup}_{x \in R} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Poznámka: Funkcionál

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{M}(R,\mu) \to [0,\infty]$$

je definován na celém $\mathcal{M}(R,\mu)$ (nikoli jen na L^p), ale

$$L^p = \{ f \in \mathcal{M}(R,\mu);\ \|f\|_p < \infty \}.$$

Co potřebujeme vědět o Lebesgueových prostorech:

- $\|\cdot\|_p$ je kvazinorma, pro $p \in [1,\infty]$ je norma,
- $(L^p, \|\cdot\|_p)$ je úplný pro každé $p \in (0,\infty]$,
- L^p je separabilní pro $p < \infty$, je-li separabilní μ,
- L^p je reflexivní pro $p \in (1,\infty)$, Hilbertův pro $p=2$,
- platí Hölderova nerovnost:

$$\left| \int_R fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'},$$

kde $p \in [1,\infty]$ a $p' = \begin{cases} 1, & \text{je-li } p = \infty, \\ \frac{p}{p-1}, & \text{je-li } p \in (1,\infty), \\ \infty, & \text{je-li } p = 1, \end{cases}$

- Hölderova nerovnost je nasycená ve smyslu

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \left| \int_R fg \, d\mu \right|, \quad p \in [1,\infty],$$

- $\|\chi_E\|_p = \mu(E)^{1/p}$, pokud $p < \infty$ nebo $\mu(E) > 0$,

• *jednoduché funkce*

$$S = \Big\{ f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i},\quad 0 < \mu(E_i) < \infty,\quad a_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C},$$

$$E_i \text{ po dvou disjunktní} \Big\},$$

pak $\overline{S}^{L^p} = L^p$, pokud $p < \infty$.

PŘÍKLAD. *Laplaceova transformace* $\mathcal{L}$ je definována předpisem

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty e^{-ts} f(s)\, ds, \quad t \in (0,\infty),$$

f smysluplná.

Otázka: omezenost $\mathcal{L}$ na L^p-prostorech?

Pozorování: $\mathcal{L} : L^1(0,\infty) \to L^\infty(0,\infty)$.

„Důkaz":

$$\|\mathcal{L}f\|_{L^\infty(0,\infty)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} |\mathcal{L}f(t)|$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} \left| \int_0^\infty e^{-ts} f(s)\, ds \right|$$

$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} \int_0^\infty \underbrace{e^{-ts}}_{\le 1} |f(s)|\, ds$$

$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} \int_0^\infty |f(s)|\, ds$$

$$= \|f\|_{L^1(0,\infty)}. \qquad \square$$

Tedy $\mathcal{L}: L^1(0,\infty) \to L^\infty(0,\infty)$ s normou 1.

OTÁZKA. Jiné L^p-prostory, např. $\mathcal{L}: L^2 \to$?

Věta 1 (omezenost Laplaceovy transformace na L^2).

$\mathcal{L}: L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ s normou $\sqrt{\pi}$.

Důkaz. $$\|\mathcal{L}f\|_2 \overset{\substack{\text{(nasycenost} \\ \text{Höldera)}}}{=} \sup_{\|g\|_2 \le 1} \int_0^\infty g(t)\mathcal{L}f(t)\,dt$$

(BÚNO $f, g \ge 0$)

$$\overset{\text{df. } \mathcal{L}}{=} \sup_{\|g\|_2 \le 1} \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty e^{-ts} f(s)\,ds\,dt$$

$$\boxed{\text{substituce: } y = ts,\ s = \frac{y}{t},\ ds = \frac{dy}{t},\ \begin{array}{c|c|c} s & 0 & \infty \\ \hline y & 0 & \infty \end{array}}$$

$$= \sup_{\|g\|_2 \le 1} \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty e^{-y} f\left(\frac{y}{t}\right) dy\, \frac{dt}{t}$$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} \sup_{\|g\|_2 \le 1} \int_0^\infty e^{-y} \int_0^\infty g(t)\, f\left(\frac{y}{t}\right) \frac{dt}{t}\, dy$$

$$\overset{\text{(Hölder)}}{\le} \int_0^\infty e^{-y} \left(\int_0^\infty f\left(\frac{y}{t}\right)^2 \frac{dt}{t^2} \right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$\boxed{\text{substituce: } z = \frac{y}{t},\ t = \frac{y}{z},\ dt = -\frac{y\,dz}{z^2},\quad \begin{array}{c||c|c} t & 0 & \infty \\ \hline z & \infty & 0 \end{array}}$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} \left(\int_0^\infty - f(z)^2 \frac{z^2}{y^2} (-y) \frac{dz}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy}_{= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}} \cdot \|f\|_2$$

$$\leq \sqrt{\pi} \cdot \|f\|_2 . \qquad \square$$

Teď víme: $\mathcal{L} : L^1 \to L^\infty$ (konst. 1)

& $\mathcal{L} : L^2 \to L^2$ (konst. $\sqrt{\pi}$).

<u>Otázka</u>: $\mathcal{L} : L^p \to L^q$?

$\mathcal{L} : L^{\frac{3}{2}} \to$?

$\mathcal{L} : L^{\frac{4}{3}} \to$?

Otázka z pohledu teorie interpolací:

- zapomeneme, že jde o Laplaceovu transformaci
- víme pouze, že

$\mathcal{L} : L^1 \to L^\infty$

& $\mathcal{L} : L^2 \to L^2$

- co jsme schopni odtud vyvodit ?

$$\mathcal{L} : L^{\frac{3}{2}} \to ?$$

Ještě jeden příklad

Sobolevův prostor 1. řádu

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$u \text{ je slabě diferencovatelná},$$
$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty \},$$

kde $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \| |\nabla u| \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Otázka: „Sobolevovo vnoření"

$$W^{1,p} \hookrightarrow L^q \quad ?$$

triviální pozorování: $W^{1,p} \hookrightarrow L^p$ (s konst. 1)

Podle Sobolevovy věty o vnoření platí

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p < n.$$

Tedy $\quad W^{1,p} \hookrightarrow L^p$

$$\& \quad W^{1,p} \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}} \quad \left(\frac{np}{n-p} > p \right).$$

Důležité poznámky:

- rozdíl oproti předchozímu příkladu: zdrojové prostory jsou stejné.

Otázka: $W^{1,p} \to L^q$ např. pro $q \in [p, \frac{np}{n-p}]$.

- prostory $L^p(\mathbb{R}^n)$ a $L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)$ jsou neporovnatelné (!).

Věta 2 (vnoření Lebesgueových prostorů).

Nechť $p, q \in (0, \infty]$. Potom

$$L^q(R, \mu) \hookrightarrow L^p(R, \mu)$$

právě tehdy, když

- buď $p = q$,
- nebo $p < q$ a $\mu(R) < \infty$,
- nebo $p > q$ a $\exists \varepsilon > 0 \ \forall E \subset R, \mu(E) > 0:$
$$\mu(E) \geq \varepsilon.$$

KONEC 1. PŘEDNÁŠKY

(20 $\frac{29}{IX}$ 20)

Důkaz. „$\Rightarrow$" $p < q$:

Položme pro $n \in \mathbb{N}$: $f_n = \chi_{R_n}$ $\left(R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right)$.

Potom $\exists C > 0$ nezávislá na n taková, že

$\|f_n\|_p \le C \|f_n\|_q \quad \forall n \in \mathbb{N}$, tedy

$\mu(R_n)^{\frac{1}{p}} \le C \mu(R_n)^{\frac{1}{q}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, takže

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mu(R_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le C$.

Tedy $(n \to \infty)$ $\quad \mu(R) \le C^{\frac{pq}{q-p}} < \infty$.

$p > q$: Zvolme $E \subset R$, E měř., $\mu(E) > 0$,

a položme $f = \chi_E$. Potom

$\|f\|_p \le C \|f\|_q \iff \mu(E)^{\frac{1}{p}} \le C \mu(E)^{\frac{1}{q}}$

$\Rightarrow \mu(E)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \ge \frac{1}{C}$, polož $\varepsilon = C^{-\frac{pq}{p-q}}$.

„$\Leftarrow$" $p \le q$: pro každou f platí

$$\|f\|_p^p = \int_R |f|^p d\mu \underset{\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right)}{\overset{\text{(Hölder)}}{\le}} \left(\int_R |f|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_R 1^{\frac{q}{q-p}} d\mu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

$$= \mu(R)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_R |f|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Provedeme $\nearrow \frac{1}{p}$ a položíme $C = \mu(R)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty$.

Dostaneme $\quad \|f\|_p \le C \|f\|_q$.

$\infty > p > q$. Nechť $E \subset R$, $\mu(E) > 0$. Potom

$\mu(E) \ge \varepsilon$, tedy $\mu(E)^{1-\frac{q}{p}} \ge \varepsilon^{1-\frac{q}{p}}$, tedy

$$(*)\ \mu(E)^{\frac{q}{p}} \le C\mu(E), \text{ kde } C = \varepsilon^{\frac{q}{p}-1}.$$

Nechť f je jednoduchá, to znamená

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \chi_{E_i}$$

pro nějaká $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, E_i disj., $0 < \mu(E_i) < \infty$.

Potom

$$\|f\|_p^q = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p \mu(E_i)\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\overset{(\frac{q}{p}<1)}{\le} \sum_{i=1}^{m} |a_i|^q \mu(E_i)^{\frac{q}{p}}$$

$$\overset{(*)}{\le} C \sum_{i=1}^{m} |a_i|^q \mu(E_i) = C\,\|f\|_q^q.$$

Z hustoty jednoduchých funkcí v L^p ($p<\infty$) plyne tvrzení!

$\infty = p > q$: Pro každou jednoduchou f platí

$$\|f\|_q = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^q \mu(E_i)\right)^{1/q}$$

$$\ge \max |a_i|\,\mu(E_i)^{\frac{1}{q}}$$

$$\ge \varepsilon^{\frac{1}{q}} \max |a_i| = \varepsilon^{\frac{1}{q}} \|f\|_\infty.$$

Výsledek plyne z hustoty jedn. funkcí v L^q. □

Budeme studovat následující otázky.

OTÁZKA 1. Je-li $0 < p < q \leq \infty$,

$$f \in L^p(R,\mu) \cap L^q(R,\mu)$$

a je-li navíc $r \in [p,q]$,

platí potom, že $f \in L^r(R,\mu)$?

POZNÁMKA. Z Věty 2 odpověď neplyne, neboť nevíme nic o (R,μ).

OTÁZKA 2. Jestliže je odpověď na Otázku 1 kladná, je možné tento fakt kvantifikovat (něco jako $\|f\|_r \leq F(\|f\|_p, \|f\|_q)$) ?

Věta 3 (interpolace Lebesgueových prostorů).

Nechť $0 < p < r < q \leq \infty$ a $f \in L^p \cap L^q$.

Nechť $\theta \in (0,1)$ je takové, že

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}.$$

Potom $f \in L^r$ a platí

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \cdot \|f\|_q^{\theta}$$

(„logaritmicky konvexní závislost).

Důkaz. Nechť nejprve $q = \infty$. Potom $\forall f$ platí

$$\|f\|_r^r = \int_R |f|^r d\mu = \int_R |f|^p \cdot |f|^{r-p} d\mu$$

$$\leq \operatorname*{esssup}_{x \in R} |f|^{r-p} \cdot \int_R |f|^p d\mu$$

$$= \|f\|_\infty^{r-p} \cdot \|f\|_p^p ,$$

tedy $$\|f\|_r \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{r}} \cdot \|f\|_p^{\frac{p}{r}}$$

$$= \|f\|_\infty^{1-\theta} \cdot \|f\|^{\theta} ,$$

neboť $$\frac{1}{r} = \frac{p}{r} \cdot \frac{1}{p} + \left(1 - \frac{p}{r}\right) \cdot \frac{1}{\infty} .$$

Nyní nechť $0 < p < r < q < \infty$. Potom pro každá $\alpha \in (0, r)$ a $s \in (1, \infty)$ platí

$$\|f\|_r^r = \int_R |f|^r d\mu = \int_R |f|^\alpha \cdot |f|^{r-\alpha} d\mu$$

$$\overset{(\text{Hölder})}{\leq} \| |f|^\alpha \|_s \cdot \| |f|^{r-\alpha} \|_{s'}$$

$$= \|f\|_{\alpha s}^{\alpha} \cdot \|f\|_{(r-\alpha)s'}^{r-\alpha} .$$

Položme $$s\alpha = p ,$$
$$s'(r-\alpha) = q .$$

Dostaneme
$$\alpha = p\,\frac{q-r}{q-p}\,,\quad s = \frac{q-p}{q-r}\,.$$
Pak lze ověřit, že $\alpha < r$ a $s > 1$. Tedy
$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{\frac{p}{r}\cdot\frac{q-r}{q-p}} \cdot \|f\|_q^{\frac{q}{r}\,\frac{r-p}{q-p}}\,.$$
Označíme-li $\theta = \frac{p}{r}\cdot\frac{r-p}{q-p}$, dostaneme
$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{1-\theta}\cdot\|f\|_q^{\theta}\,,\quad \text{kde } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}. \quad \square$$

<u>Důsledek</u>. Nechť $0 < p < r < q \le \infty$, X je (kvazi-) NLP a T je operátor splňující
$$T : X \to L^p \;\&\; T : X \to L^q,\quad \text{potom}$$
$$T : X \to L^r \text{ a}$$
$$\|T\|_{X\to L^r} \le \|T\|_{X\to L^p}^{1-\theta}\cdot\|T\|_{X\to L^q}^{\theta},$$
kde θ je jako výše.

<u>Příklad</u>. $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $1 \le p < n$. Potom
$$\left.\begin{aligned} &W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)\\ \&\; &W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n),$$
kde $\quad r \in \left[p, \frac{np}{n-p}\right]$.

Otázka. Co když ale máme

$$T : X \to L^p$$
$$T : Y \to L^q \ ?$$

Pak se podobná úvaha nedá provést.

Např. $T : L^p \to L^p$
& $T : L^q \to L^q$, $r \in (p,q)$, pak

$$\|Tf\|_r \le \|Tf\|_p^{1-\theta} \cdot \|Tf\|_q^{\theta}$$
$$\le C \, \|f\|_p \cdot \|f\|_q \quad \left(\text{ALE TEĎ NEPLATÍ} \ \le C' \, \|f\|_r \right).$$

$\Rightarrow$ musíme na to jinak.

Příklady (další).

(1) Fourierova transformace:

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x,y)} f(y)\, dy, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Potom (triv.) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Prostor $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ je hustý v $L^2(\mathbb{R}^n)$

a $\forall f \in L^1 \cap L^2$ platí $\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C \, \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

pro vhodnou $C > 0$ nezávislou na f, a tedy to lze rozšířit na $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$

(Plancherelova věta). Tedy

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}: L^1 \to L^\infty \\ \mathcal{F}: L^2 \to L^2 \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} F: L^p \to ? \\ F: ? \to L^q. \end{array}$$

(2) Rieszův potenciál:

Laplacián: $\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$, pak

$$\mathcal{F}(-\Delta f)(x) = 4\pi^2 |x|^2 \mathcal{F}f(x),$$

tento vztah lze rozšířit (formálně) pro

$\beta \in (-n, 0)$ na

$$\mathcal{F}\left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} f\right) = \left(2\pi|x|\right)^\beta \mathcal{F}f(x),$$

reprezentace

$$-\Delta^{\frac{\gamma}{2}} f = c_\gamma I_\gamma f, \quad \gamma \in (0, n),$$

kde $I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}} \, dy$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Význam operátoru I_γ vyplývá z nerovnosti (Stein)

$|u(x)| \le c\, I_m(|D^m u|)$ kde

$$D^m u = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha}.$$

Tedy $\left(I_m : X \to Y \Rightarrow W^m X \hookrightarrow Y \right)$.

Chceme zjistit, kdy $I_\gamma : X \to Y$,

například

$$I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$$

(hledáme podmínky na γ, p, q, n).

(3) komvoluční operátory

$$T(f,g) = f * g$$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

Potom (snadné):

$$\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|f*g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|f*g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{(Hölder)}$$

atd.

<u>Otázka</u>: nalézt podmínku na p, q, r, n, aby

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

<u>Pozn.</u> $I_\gamma f = f * g_\gamma$, kde

$$g_\gamma(x) = |x|^{\gamma - n}.$$

Na všechny otázky dáme odpověď (optimální) metodami teorie interpolací. (konec úvodu)

KONEC 2. PŘEDNÁŠKY

3. přednáška

20/X 2014

2. KLASICKÉ INTERPOLAČNÍ VĚTY

2.1. INTERPOLACE POSITIVNÍCH OPERÁTORŮ

DEFINICE. Nechť (R,μ) a (S,ν) jsou σ-konečné prostory s mírami. Nechť T je operátor definovaný (alespoň) na jednoduchých funkcích na (R,μ) s hodnotami v prostoru ν-měřitelných funkcí na S. Nechť $p,q \in (0,\infty]$. Řekneme, že T je silného typu (p,q), jestliže

$$\exists M>0\ \forall f \in \mathcal{S}(R,\mu): \|Tf\|_{L^q(S,\nu)} \le M \cdot \|f\|_{L^p(R,\mu)},$$

kde $\mathcal{S}(R,\mu)$ je třída všech μ-jednoduchých funkcí na R. Nejmenší konstanta M, pro kterou vztah platí, se nazývá normou zobrazení T, značení: $\|T\|_{L^p \to L^q}$.

Věta 4 (Rieszova pro positivní operátory).
Nechť $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$ a $\theta \in [0,1]$. Nechť

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \& \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Nechť T je „positivní lineární operátor" tvaru

$$Tf(y) = \int_R f(x) A(x,y)\, d\mu(x), \quad y \in S,$$

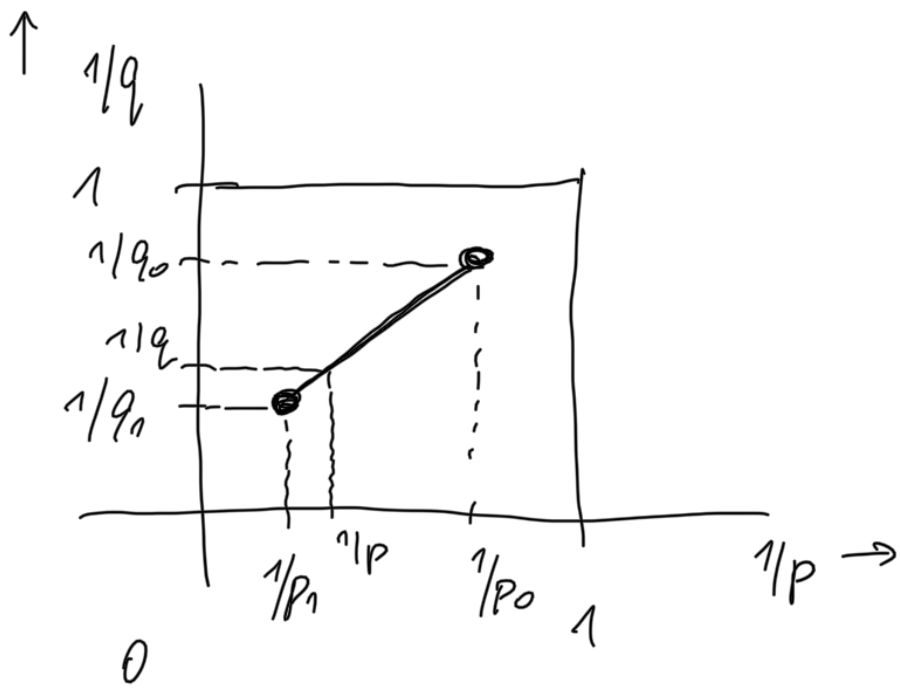
kde A je nezáporná měřitelná funkce na $R \times S$. Nechť T je silného typu (p_0, q_0) a zároveň silného typu (p_1, q_1) s normami po řadě M_0 a M_1. Potom T je silného typu (p, q) s normou M_θ splňující

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta}.$$

ILUSTRACE

$$\left.\begin{array}{c} T : L^{p_0} \longrightarrow L^{q_0} \\ \\ T : L^{p_1} \longrightarrow L^{q_1} \end{array}\right\} \quad T : L^{p} \longrightarrow L^{q}$$

INTERPOLAČNÍ ČTVEREC



<u>Důkaz.</u> BÚNO $\theta \in (0,1)$ & $p \neq \infty$ & $q \neq 1$

Potom stačí dokázat

$$\left| \int_S (Tf) g \, d\nu \right| \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta} \quad \text{pro všechny}$$

f, g jednoduché a splňující $\|f\|_{L^p(R,\mu)} \leq 1$

a $\|g\|_{L^{q'}(S,\nu)} \leq 1$. To vyplývá z toho, že

$$\sup \left\{ \left| \int_S (Tf) g \, d\nu \right| ; g \text{ jednoduchá}, \|g\|_{L^{q'}(\nu)} \leq 1 \right\} =$$

$$= \|Tf\|_{L^q(\nu)}$$

a

$$\sup \left\{ \|Tf\|_{L^q(\nu)}, f \text{ jednoduchá}, \|f\|_{L^p(\mu)} \leq 1 \right\}$$

$$= \|T\|_{L^p \to L^q} = M_\theta .$$

Z positivity T plyne:

$$\left| \int_S (Tf) \cdot g \, d\nu \right| = \left| \int_S \int_R f(x) A(x,y) g(y) \, d\nu(y) \right|$$

$$\leq \int_S \int_R |f(x)| A(x,y) \, d\mu(x) \, |g(y)| \, d\nu(y)$$

$$= \int_S T(|f|) \cdot |g| \cdot d\nu ,$$

takže stačí dokázat

$$\int_S Tf \cdot g \, d\nu \le M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta} \quad \forall f, g \ge 0, \text{ jednoduché},$$

$$\|f\|_p \le 1, \quad \|g\|_{q'} \le 1$$

Položme pro $i = 0, 1$:

$$f_i = f^{\frac{p}{p_i}}, \qquad g_i = g^{\frac{q'}{q_i'}}.$$

Potom

$$\|f_i\|_{p_i} = \|f^{\frac{p}{p_i}}\|_{p_i} = \|f\|_p^{\frac{p}{p_i}} \le 1$$

a podobně $\|g_i\|_{q_i'} = \|g\|_{q'}^{q'/q_i'} \le 1$.

Dále platí

$$f_0^{1-\theta} \cdot f_1^{\theta} = f \quad \text{a} \quad g_0^{1-\theta} g_1^{\theta} = g,$$

neboť

$$f_0^{1-\theta} \cdot f_1^{\theta} = f^{\frac{p}{p_0}(1-\theta)} \cdot f^{\frac{p}{p_1}\theta}$$

$$= f^{p\left(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right)} = f^{p \cdot \frac{1}{p}} = f$$

a podobně pro g. Tedy

$$\int_S Tf \cdot g \, d\nu = \int_S \int_R Afg \, d\mu \, d\nu$$

$$= \int_S \int_R (Af_0 g_0)^{1-\theta} \cdot (Af_1 g_1)^{\theta} \, d\mu \, d\nu$$

Hölder pro $\frac{1}{\theta}$ a $\frac{1}{1-\theta}$

$$\leq \left(\int_S \int_R Af_0 g_0 \, d\mu \, d\nu \right)^{1-\theta} \cdot \left(\int_S \int_R Af_1 g_1 \, d\mu \, d\nu \right)^{\theta}$$

$$= \left(\int_S (Tf_0) g_0 \, d\nu \right)^{1-\theta} \left(\int_S (Tf_1) g_1 \, d\nu \right)^{\theta}.$$

Hölder

$$\leq \left(\|Tf_0\|_{q_0} \cdot \underbrace{\|g_0\|_{q_0'}}_{\leq 1} \right)^{1-\theta} \left(\|Tf_1\|_{q_1} \cdot \underbrace{\|g_1\|_{q_1'}}_{\leq 1} \right)^{\theta}$$

silné typy

$$\leq \left(M_0 \cdot \underbrace{\|f_0\|_{p_0}}_{\leq 1} \right)^{1-\theta} \left(M_1 \underbrace{\|f_1\|_{p_1}}_{\leq 1} \right)^{\theta}$$

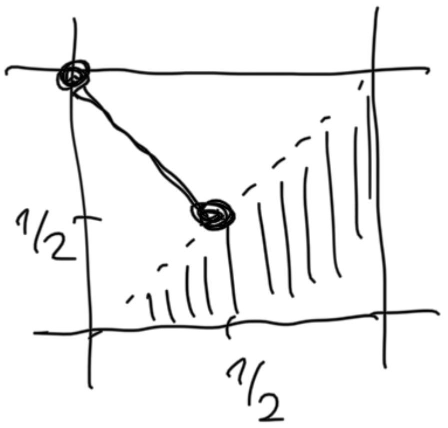
$$\leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta}. \qquad \square$$

<u>POZNÁMKA</u>. Bez předpokladu positivity T Věta 4 neplatí. Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

$$Tx = Ax, \quad tj. \quad T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

Položme $p_0=\infty$, $q_0=1$, $p_1=q_1=2$. Potom



(cvičení):

$$M_0 = 2 \quad \& \quad M_1 = \sqrt{2}.$$

Položme $\theta = \frac{1}{2}$, pak $p=4$, $q=\frac{4}{3}$.

Pokud by platilo $M_{\frac{1}{2}} \leq M_0^{1-\frac{1}{2}} \cdot M_1^{\frac{1}{2}}$, pak bychom měli

$$\|(x_1+x_2, x_1-x_2)\|_{\frac{4}{3}} \leq 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} \|[x_1,x_2]\|_4 \quad \forall [x_1,x_2] \in \mathbb{R}^2.$$

To ale neplatí, neboť pro $x_1=1$, $x_2=2$ jest

$$\|[3,-1]\|_{\frac{4}{3}} = \left(3^{\frac{4}{3}}+1\right)^{\frac{3}{4}} \approx 5{,}33,$$

ale $\|[1,2]\|_4 = (1+2^4)^{\frac{1}{4}} = 2{,}03$,

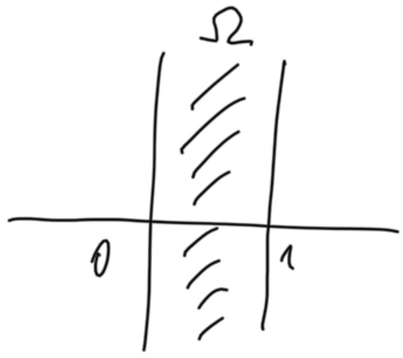
přičemž neplatí $\left(3^{\frac{4}{3}}+1\right)^{\frac{3}{4}} \leq 2^{\frac{3}{4}} \cdot 17^{\frac{1}{4}} \approx 3{,}41$.

2.2 RIESZOVA - THORINOVA VĚTA

Věta 5 (Hadamardova věta o třech přímkách).

Nechť F je omezená a spojitá (komplexní) funkce na $\bar{\Omega}$, kde

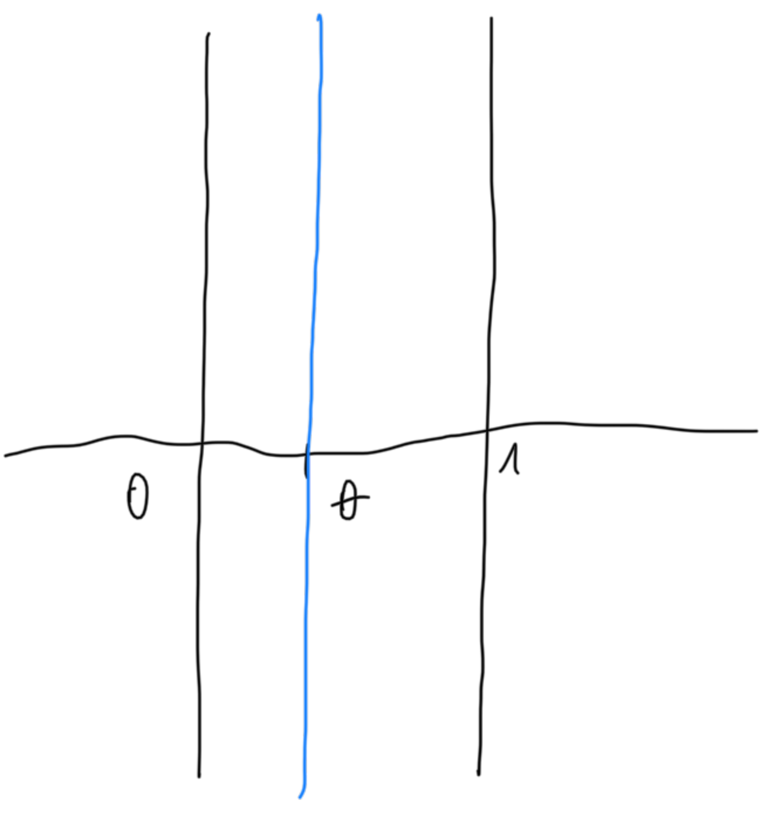
$$\Omega = \{ z = x + iy, \ x \in (0,1) \},$$



a nechť dále F je analytická v Ω. Potom pro M_θ definovanou předpisem

$$M_\theta = \sup \{ |F(\theta + iy)| ; -\infty < y < \infty \}$$

platí
$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta} \quad \forall \theta \in [0,1].$$



Důkaz. Stačí dokázat, že

$$|F(\theta+iy)| \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Navíc to stačí dokázat pro všechny konstanty větší než M_0, M_1. Tedy BÚNO předp. $M_0, M_1 > 0$. Tedy lze uvažovat funkci

$$\frac{F(z)}{M_0^{1-z} \cdot M_1^{z}},$$

odtud plyne, že můžeme předp. $M_0 = M_1 = 1$. Za těchto předpokladů je F omezená konstantou 1 na $\partial\Omega$. Dále víme, že F je omezená na Ω, označme K konstantu její omezenosti.

Stačí dokázat: $\forall z \in \Omega : |F(z)| \leq 1$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Označme

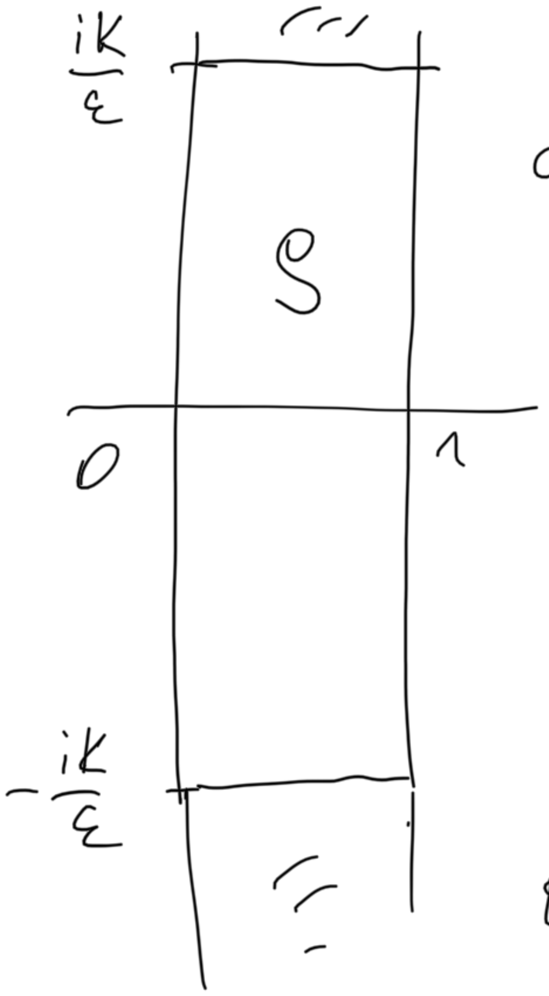
$$F_\varepsilon(z) = \frac{F(z)}{1+\varepsilon z}$$

(ta je analytická). Potom

$$|F_\varepsilon(z)| \leq \frac{|F(z)|}{1+\varepsilon x} \leq 1 \text{ pro } z = x+iy \in \partial\Omega,$$

a $$|F_\varepsilon(z)| \le \frac{|F(z)|}{\varepsilon |y|} \le \frac{K}{\varepsilon |y|} \quad \text{pro } z = x+iy \in \Omega.$$

Vezmeme obdélník s vrcholy $\pm \frac{iK}{\varepsilon}$, $1 \pm \frac{iK}{\varepsilon}$



a označme jej ϱ. Potom

$$|F_\varepsilon(z)| \le 1 \quad \text{pro } z \in \partial\varrho.$$

Podle věty o maximu modulu platí stejný odhad na celém ϱ. Dále na $\Omega \setminus \varrho$ platí $$|F_\varepsilon(z)| \le \frac{K}{\varepsilon|y|} \le 1,$$

takže celkem $|F_\varepsilon(z)| \le 1 + \varepsilon|z|$ na Ω.

Pošleme $\varepsilon \to 0_+$ a máme tvrzení. $\square$

<u>Věta 6</u> (Rieszova – Thorinova). Nechť $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$, $\theta \in [0,1]$ a

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Nechť T je lineární operátor silných typů (p_0, q_0) a (p_1, q_1) s normami po řadě M_0, M_1. Potom T je silného typu (p, q) s normou

$$M_\theta \leq 2\, M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta},$$

(přičemž konstantu 2 lze vynechat pokud buď jsou uvedené prostory komplexní nebo $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$.)

DŮKAZ věty 6 příště

Věta má zajímavé důsledky, např.:

Věta 7 (Hausdorffova – Youngova).

Nechť $p \in [1,2]$. Potom $\mathcal{F}: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

a nebo:

Věta 8 (Youngova konvoluční)

Nechť $p, q, r \in [1,\infty]$ a nechť

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Potom

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Důkazy příště.

Přednáška 4 $\qquad$ 20 $\frac{21}{x}$ 20

Důkaz Věty 6. (a) pro komplexní prostory

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ položme

$$\alpha(z) = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{a} \quad \beta(z) = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}.$$

Potom $\alpha(\theta) = \frac{1}{p}$, $\beta(\theta) = \frac{1}{q}$. Věta bude dokázána, pokud ověříme, že

$$\left| \int_S (Tf) \cdot g \, d\nu \right| \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta}$$

pro všechny jednoduché funkce f, g splňující $\|f\|_{L^p(\mu)} = \|g\|_{L^{q'}(\nu)} = 1$.

Předpokládejme nejprve, že $p < \infty$ a $q' < \infty$. Potom lze f, g zapsat ve tvaru

$$f = \sum_{j=1}^{J} a_j \chi_{A_j}, \qquad g = \sum_{k=1}^{K} b_k \chi_{B_k},$$

kde $J, K \in \mathbb{N}$, A_j jsou disjunktní podmnožiny R splňující $\mu(A_j) < \infty$, B_k jsou disjunktní podmnožiny S splňující $\nu(B_k) < \infty$, a koeficienty $a_j, b_k \in \mathbb{C}$ splňující

$$\sum_{j=1}^{J} |a_j|^p \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{K} |b_k|^{q'} \mu(B_k) = 1.$$

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme funkce f_z a g_z předpisy

$$f_z = |f|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg f},$$

$$g_z = |g|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg g}.$$

Bude užitečné si uvědomit, že $f_\theta = f$ a $g_\theta = g$.

Definujme dále

$$F(z) = \int_S (Tf_z)\, g_z \, d\nu, \qquad z \in \mathbb{C},$$

takže speciálně $F(\theta) = \int_S (Tf)\, g \, d\nu$.

Tedy chceme dokázat, že

$$|F(\theta)| \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta}.$$

To vyplyne z Hadamardovy věty (Věta 5) jakmile ověříme, že F je omezená analytická funkce na $\overline{\Omega}$ a platí

(*) $|F(iy)| \leq M_0$ a $|F(1+iy)| \leq M_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

<u>F je analytická</u>: z linearity T plyne, že $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$F(z) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} \int_S (T\chi_{A_j}) \chi_{B_k} e^{i(\arg a_j + \arg b_k)} \, d\nu,$$

tedy F je konečná lineární kombinace exponenciál, takže je dokonce celá.

<u>F je omezená</u>: reálné části $\alpha(z)$ a $\beta(z)$ jsou zřejmě omezené na $\overline{\Omega}$, takže F je omezená na $\overline{\Omega}$.

<u>Důkaz (*)</u>: Pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí

$$|F(iy)| = \left| \int_S (Tf_{iy}) g_{iy} \, d\nu \right| \qquad (\text{def. } F)$$

$$\leq \|Tf_{iy}\|_{L^{q_0}(\nu)} \cdot \|g_{iy}\|_{L^{q_0'}(\nu)} \qquad (\text{Hölder})$$

$$\leq M_0 \cdot \|f_{iy}\|_{L^{p_0}(\mu)} \cdot \|g_{iy}\|_{L^{q_0'}(\nu)} . \qquad \left(\begin{matrix}\text{silný typ} \\ (p_0, q_0)\end{matrix}\right)$$

Z definice $\alpha(z)$ a $\beta(z)$ plyne, že

$$\operatorname{Re} \alpha(iy) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-iy}{p_0} + \frac{iy}{p_1}\right) = \frac{1}{p_0} \quad \text{a} \quad \alpha(\theta) = \frac{1}{p}.$$

Tedy

$$\|f_{iy}\|_{L^{p_0}(\mu)}^{p_0} = \sum_{j=1}^{J} \left| |a_j|^{\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} \mu(A_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} |a_j|^p \mu(A_j)$$

$$= \|f\|_{L^p(\mu)}^p = 1.$$

Obdobně

$\operatorname{Re} \beta(iy) = \frac{1}{q_0}$, $\beta(\theta) = \frac{1}{q}$, takže

$$\|g_{iy}\|_{L^{q_0'}(\nu)}^{q_0'} = \sum_{k=1}^{K} \left| |b_k|^{\frac{1-\beta(iy)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_0'} \nu(B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} |b_k|^{\frac{1-\frac{1}{q_0}}{1-\frac{1}{q}} \cdot q_0'} \nu(B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} |b_k|^{q'} \nu(B_k)$$

$$= \|g\|_{L^{q'}(\nu)}^{q'} = 1.$$

Odtud plyne $|F(iy)| \leq M_0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Obdobně (s využitím silného typu (p_1, q_1) pro T s normou M_1) lze dokázat, že

$$|F(1+iy)| \leq M_1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Odtud plyne $(*)$.

Tím je věta dokázána pro $p < \infty$, $q' < \infty$.

Je-li $\theta=0$, nebo $\theta=1$, pak je tvrzení triviální!

Předpokládejme, že $\theta\in(0,1)$. Je-li $p=\infty$ a $q'=\infty$, pak nutně $p_0=p_1=\infty$ a $q_0=q_1=1$, a tedy není co dokazovat.

Je-li $p<\infty$ a $q'=\infty$, pak definujeme f_z stejně, a $g_z=g$ $\forall z\in\mathbb{C}$, důkaz proběhne stejně.

Je-li $p=\infty$ a $q'<\infty$, def g_z stejně a $f_z=f$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

Tím je dokázána R-T věta pro komplexní prostory.

(b) pro reálné prostory

Je-li T lineární operátor silného typu (r,s) s normou N, pak jej lze rozšířit na (komplexní) lineární operátor $\tilde{T}(f+ig)=Tf+iTg$ silného typu (r,s) (vzhledem ke komplexním prostorům), jelikož norma $\tilde{N}$ splňuje

$N\leq\tilde{N}\leq 2N$. Tvrzení plyne z (a).

Je-li navíc $p_i\leq q_i$, $i=0,1$, konstantu 2 lze vynechat (Rieszova věta o konvexitě).

$\square$

Důkaz Věty 7. Víme, že

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \text{(triviální)}$$

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{(Plancherel)}.$$

Položme $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = \infty$, $q_1 = 2$. Zvolme $p \in [1,2]$. K němu dopočteme nejprve θ:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = 1-\theta + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2},$$

a posléze q:

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} = \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'} .$$

Tedy z R-T věty plyne, že

$$\mathcal{F}: L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1,2]. \;\square$$

Důkaz Věty 8. Vyjdeme z triviálních nerovností (pišme $\|\cdot\|_q$ místo $\|\cdot\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$)

(1) $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$,

(2) $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.

Tyto vztahy lze interpretovat jako omezenost konvolutoru, tj. operátoru T_f, kde $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a

$$T_f(g) = f * g.$$

Potom z (1): $T_f : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$, $M_0 = \|f\|_1$,

a z (2): $T_f : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $M_1 = \|f\|_1$.

Podle R-T věty tedy $\forall q \in [1,\infty]$

$$T_f : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n), \quad M_\theta = \|f\|_1,$$

to jest

(3) $\|f*g\|_q \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_q$.

K tomu přidejme

(4) $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_{q'} \cdot \|g\|_q$. (Hölder & transl. invariance Leb. míry)

Tyto vztahy lze interpretovat jako omezenost duálního konvolutoru T_g, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ při pevně zvoleném $q \in [1,\infty]$, kde

$$T_g(f) = f * g.$$

Tedy

z (3): $T_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ s konst. $M_0 = \|g\|_q$,

z (4): $T_g : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ s konst. $M_1 = \|g\|_q$.

R-T podruhé: položme

$p_0 = 1$, $p_1 = q'$, $r_0 = q$, $r_1 = \infty$.

Zvolme $p \in [1, q']$. K němu dopočteme θ:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = 1-\theta+\frac{\theta}{q'} = 1-\frac{\theta}{q}$$

a posléze r:

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1} = \frac{1-\theta}{q} = \frac{1}{q} - \frac{\theta}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1 .$$

Dle R-T věty: $T_g : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$

s konstantou $\|g\|_q$, kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$,

tedy

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q . \qquad \square$$

Poznámka. Konvoluční nerovnosti lze využít například při representaci funkcí založené na potenciální nerovnosti pro $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$|u(x)| \leq C_n \cdot I_1 (|\nabla u|) (x) , \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde I_1 je potenciální operátor definovaný předpisem

$$(I_1 f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}} \, dy \quad (n \geq 2)$$

(operátor se „slabou singularitou")

Odtud ihned plyne implikace:

$$I_1 : X \to Y \quad \Rightarrow \quad W^1 X \hookrightarrow Y.$$

Otázky: • pro jaká X, Y platí $I_1 : X \to Y$?

• lze implikaci obrátit?

• co to má společného s interpolacemi?

Odpovědi dáme časem. Prozatím si uvědomme, že

$$I_1 f = f * g,$$

kde $g(x) = |x|^{1-n}$.

Přednáška 5 20 $\frac{27}{x}$ 20

POZNÁMKA (reprezentace řešení rovnic)

Poissonova rovnice $\quad -\Delta u = \mu \quad$ na $\mathbb{R}^n$

μ míra, nebo $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

u ... jediné řešení, $u(x) \to 0$ pro $|x| \to \infty$

Jak získat u pomocí μ?

$$G(x,y) = \begin{cases} |x-y|^{-n+2}, & \text{je-li } n \geq 3 \\ -\log|x-y|, & \text{je-li } n = 2 \end{cases}$$

pak $\quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x,y)\, d\mu(y)$.

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\gamma \in (0,n)$. Pak

Rieszův potenciál I_γ je def. předpisem

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\, dy,$$

možno definovat i pro míry (borel. na $\mathbb{R}^n$)

$$I_\gamma \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}.$$

Potom: $\quad |u(x)| \lesssim I_2(|\mu|)(x), \; n \geq 3$

a $\quad |Du(x)| \lesssim I_1(|\mu|)(x)$

Tedy: víme-li něco o chování I_γ na prostorech funkcí, zjistíme cosi o velikosti řešení PDR.

OTÁZKA: Pro jaká p, q platí $I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$?

POZNÁMKA: Někdy se definuje $I_\gamma f = \frac{1}{c_\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{n-\gamma}}$,

kde $\quad c_\gamma = \pi^{n/2} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\gamma}{2}\right)}$.

První krok: Odvodíme nutnou balanční podmínku na p, q, γ, n, aby

$$I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n).$$

Jak? Použijeme techniku „komutace s dilatačním operátorem".

DEFINICE. Pro $\delta \in (0,\infty)$ definujeme dilatační operátor τ_δ předpisem

$$\tau_\delta f(x) = f(\delta x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

<u>Pozorování:</u>

$$\| \tau_\delta f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \delta^{-\frac{n}{p}} \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

(věta o substituci: $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\delta x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \frac{dy}{\delta^n} \right)^{1/p}$)

Tedy, pro $\delta \in (0, \infty)$ platí

$$\tau_{\frac{1}{\delta}} I_\gamma \tau_\delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\delta y)}{\left| \frac{x}{\delta} - y \right|^{n-\gamma}} \, dy.$$

znovu věta o substituci: $z = \delta y$:

$$\tau_{\frac{1}{\delta}} I_\gamma \tau_\delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(z)}{\left| \frac{x}{\delta} - \frac{z}{\delta} \right|^{n-\gamma}} \frac{dz}{\delta^n}$$

$$= \delta^{-\gamma} I_\gamma f(x).$$

Předp., že $I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$,

pak $\exists C \, \forall f$: $\| I_\gamma f \|_q \le C \| f \|_p$,

pak $\exists C \, \forall f \, \forall \delta$: $\| I_\gamma \tau_\delta f \|_q \le C \| \tau_\delta f \|_p$,

tedy $\left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{n}{q}} \| \tau_{\frac{1}{\delta}} I_\gamma \tau_\delta f \|_q \le C \delta^{-\frac{n}{p}} \| f \|_p$, tedy $\delta^{-\frac{n}{q}-\gamma}\|I_\gamma f\|_q \le C\,\delta^{-\frac{n}{p}}\|f\|_p$,

tj: $\delta^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\gamma}\cdot\|I_\gamma f\|_q \le C\,\|f\|_p$.

Tedy musí platit $\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\gamma=0$.

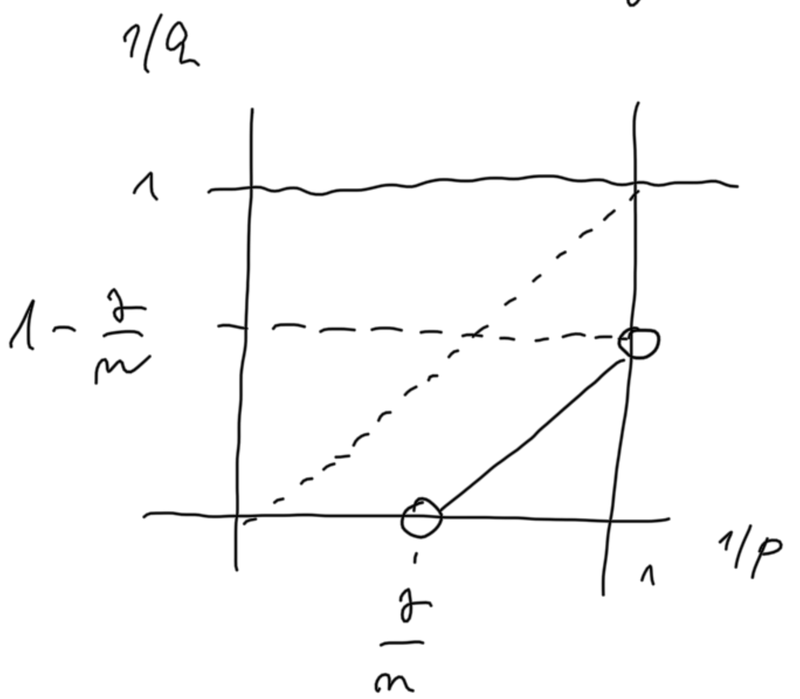
Tudíž nutná podmínka pro $I_\gamma: L^p\to L^q$ je

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\gamma}{n}.$$

Speciálně, nutně musí platit

$$1\le p\le \frac{n}{\gamma} \quad \text{a} \quad \frac{n}{n-\gamma}\le q\le\infty.$$

<u>OTÁZKA</u>: Platí $I_\gamma: L^p\to L^q$ pro $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\gamma}{n}$?



Lze to dokázat interpolací?

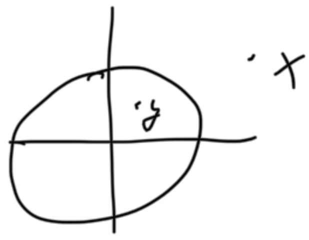
Lze to dokázat pomocí R-T věty?

Pro R-T větu bychom potřebovali, aby I_γ byl silných typů $(1,\frac{n}{n-\gamma})$ a $(\frac{n}{\gamma},\infty)$.

Avšak ani jeden z typů není splněn.

Položme $f = \chi_{B(0,1)}$, potom $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

pro $|x| \geq 1$ a $|y| \leq 1$ platí



$|x-y| \leq |x| + |y| \leq 2|x|$, a tedy

$$I_\gamma f(x) = \int_{B(0,1)} \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}} \geq \frac{|B(0,1)|}{2|x|^{n-\gamma}},$$

a tedy $I_\gamma f \notin L^{\frac{n}{n-\gamma}}(\mathbb{R}^n)$.

Tedy $I_\gamma : L^1 \not\to L^{\frac{n}{n-\gamma}}$.

Položme $f(x) = |x|^{-\gamma} \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-1} \chi_{B(0,\frac{1}{2})}$,

pak $f \in L^{\frac{n}{\gamma}}(\mathbb{R}^n)$, ale $\lim_{x \to 0} I_\gamma f(x) = \infty$,

takže $I_\gamma f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$, a tedy

$$I_\gamma : L^{\frac{n}{\gamma}} \not\to L^\infty.$$

Tudíž R-T větu nelze použít.

<u>Poznámka:</u> Platí ale slabší odhad (slabší než $I_\gamma : L^1 \to L^{\frac{n}{n-\gamma}}$).

Věta 9 (slabý odhad pro Rieszův potenciál).

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\gamma \in (0,n)$. Potom existuje $C>0$ taková, že $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \left| \{ |I_\gamma f| > \lambda \} \right|^{1-\frac{\gamma}{n}} \le C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

POZNÁMKA. Nerovnost ve Větě 9 je slabší než $I_\gamma : L^1 \to L^{\frac{n}{n-\gamma}}$, neboť $\forall \lambda \in (0,\infty)$ platí

$$\|I_\gamma f\|_{\frac{n}{n-\gamma}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\gamma f|^{\frac{n}{n-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$\ge \left(\int_{\{|I_\gamma f| > \lambda\}} |I_\gamma f|^{\frac{n}{n-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$\ge \left(\int_{\{|I_\gamma f| > \lambda\}} \lambda^{\frac{n}{n-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$= \lambda \left| \{ |I_\gamma f| > \lambda \} \right|^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

(Čebyševova nerovnost).

Důkaz (Věty 9). Díky homogenitě stačí dokázat

$$\left| \{ |I_\gamma f| > 1 \} \right|^{1-\frac{\gamma}{n}} \le C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

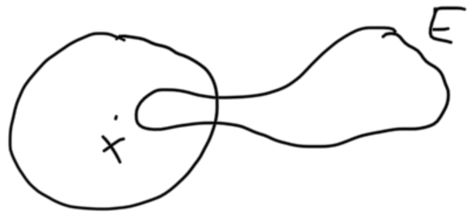
(jinak přejdu od f k $\frac{f}{\lambda}$).

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ a platí: $|E| = |B(x,R)|$, $R>0$.

Potom tvrdíme, že

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}} \le \int_{B(x,R)} \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}} = C_\gamma R^\gamma = C_\gamma |E|^{\frac{\gamma}{n}}.$$

dokážeme   cvičení   z předpokladu



$B(x,R)$

Jest $E = (E\cap B) \cup (E\setminus B)$

a $B = (E\cap B) \cup (B\setminus E)$. Tedy

$$\left.\begin{aligned} |E| &= |E\cap B| + |E\setminus B| \\ \| \\ |B| &= |E\cap B| + |B\setminus E| \end{aligned}\right\} \Rightarrow |E\setminus B| = |B\setminus E|.$$

Tudíž

$$\int_{E\setminus B} \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}} \le R^{\gamma-n} |E\setminus B|$$

$$= R^{\gamma-n} |B\setminus E| \le \int_{B\setminus E} \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}},$$

takže celkem

$$\int_E = \int_{E\cap B} + \int_{E\setminus B} \le \int_{E\cap B} + \int_{B\setminus E} = \int_B .$$

Tím je dokázáno tvrzení.

Speciálně pro $E = \{|I_\gamma f| > 1\}$

dostaneme $$\int_{\{|I_\gamma f|>1\}} \frac{dx}{|x-y|^{n-\gamma}} \leq C_\gamma \,|\{|I_\gamma f|>1\}|^{\frac{\gamma}{n}}.$$

Celkem

$$|\{|I_\gamma f|>1\}| = \int_{\{|I_\gamma f|>1\}} dx$$

$$\leq \int_{\{|I_\gamma f|>1\}} |I_\gamma f(x)|\, dx$$

$$= \int_{\{|I_\gamma f|>1\}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\, dy \right| dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\{|I_\gamma f|>1\}} \frac{dx}{|x-y|^{n-\gamma}}\, dy$$

$$\overset{\text{(tvrzení)}}{\leq} C_\gamma\, |\{|I_\gamma f|>1\}|^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy$$

Tedy

$$(*)\ |\{|I_\gamma f|>1\}|^{1-\frac{\gamma}{n}} \leq C_\gamma\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

<u>ZÁVĚR</u>. Nemáme $I_\gamma : L^1 \to L^{\frac{n}{n-\gamma}}$, máme pouze (*). Umíme to interpolovat? A co platí na opačném kraji?

<u>Poznámka</u>. Uvedené chování I_γ na „kraji" je typické i pro další důležité operátory.

<u>Příklad</u>. Definujme <u>Hardyův průměrovací</u> operátor A předpisem

$$Af(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,$$

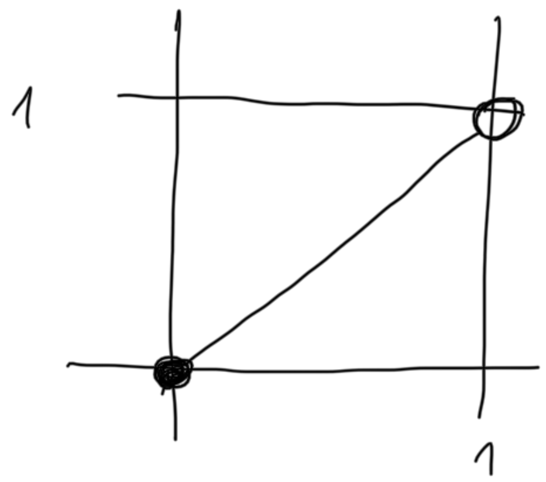
kde $f \in L^1_{loc}(0,\infty)$.

<u>OTÁZKA</u>. Pro která $p \in [1,\infty]$ platí

$$A : L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)\ ?$$

ODPOVĚĎ: Platí $\forall p \in (1,\infty]$

a neplatí pro $p=1$.



Důkaz pro $p\in(1,\infty)$ (pro $p=\infty$ triviální)

$$\|Af\|_p^p = \int_0^\infty x^{-p}\left(\int_0^x f(t)\, t^{\frac{1}{pp'}}\, t^{-\frac{1}{pp'}}\,dt\right)^p dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \int_0^\infty x^{-p} \int_0^x f(t)^p\, t^{\frac{1}{p'}}\,dt \left(\int_0^x t^{-\frac{1}{p}}\,dt\right)^{p-1} dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty f(t)^p\, t^{\frac{1}{p'}} \int_t^\infty x^{-p} (p')^{p-1}\, x^{\frac{1}{p'}(p-1)}\,dx$$

$$= (p')^p \int_0^\infty f(t)^p\,dt,$$

takže $\|Af\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p, \quad p>1.$

Důkaz pro $p=1$:

$$f=\chi_{(0,1)}, \text{ pak } Af(x) = \begin{cases} 1, & x\le 1 \\ \frac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$$

,

$f \in L^1$, $Af \notin L^1$

nebo: $f(x) = \dfrac{\chi_{(0,1)}}{x \log^2 \frac{e}{x}}$,

pak $Af(x) \geq \dfrac{\chi_{(0,1)}}{x \log \frac{e}{x}}$,

a tedy $f \in L^1$, ale $Af \notin L^1$. $\square$

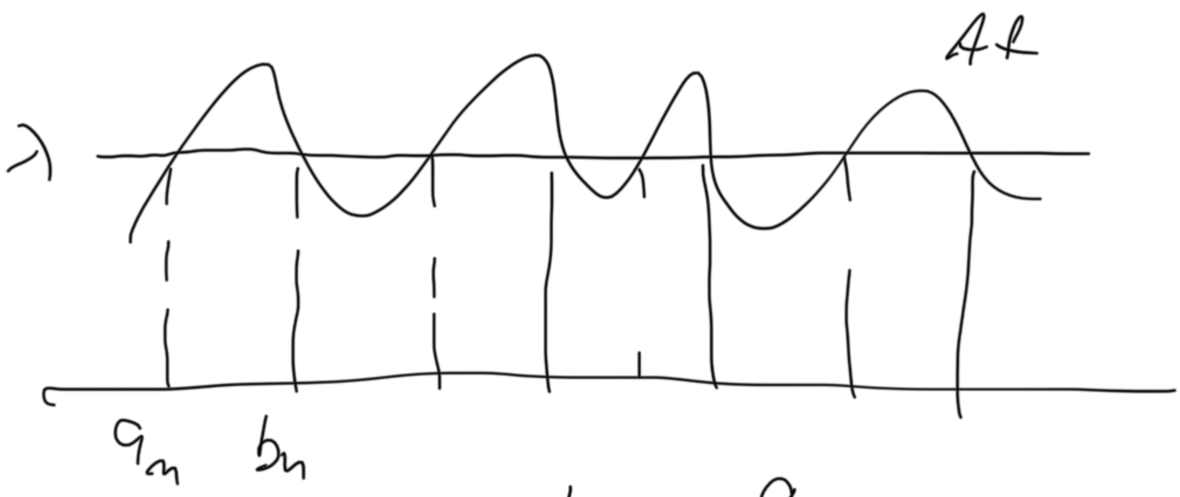
Ale platí slabý odhad:

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \left| \{ |Af| > \lambda \} \right| \leq c \, \|f\|_{L^1(0,\infty)} \quad (*)$$

<u>Důkaz (*)</u> Nechť $\lambda > 0$, pak Af je spojitá,

a tedy $\{Af > \lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$,

(a_n, b_n) disjunktní a $Af(a_n) = Af(b_n) = \lambda$.



Tedy
$$\int_{a_n}^{b_n} f = \int_0^{b_n} f - \int_0^{a_n} f = \lambda b_n - \lambda a_n$$
$$= \lambda (b_n - a_n),$$

takže
$$|\{|Af|>\lambda\}| = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} |f|$$
$$\leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 . \qquad \square$$

Pozn. K této nerovnosti máme „na druhém kraji" $A: L^\infty \to L^\infty$.

Cíl: využít této informace k interpolačnímu důkazu $A: L^p \to L^p$.

Přednáška 6 $\qquad$ 20 $\frac{3}{XI}$ 20

2.3. INTERPOLACE SLABÝCH ODHADŮ

Připomeňme:

$$Af(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in (0,\infty), \; f \in L^1_{loc}(0,\infty),$$

víme: $A : L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty) \quad \forall p \in (1,\infty]$,

speciálně

$$A : L^\infty(0,\infty) \to L^\infty(0,\infty) \quad (\text{„pravý kraj“})$$
(s konstantou 1)

a navíc

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \,|\{|Af| > \lambda\}| \le \|f\|_{L^1(0,\infty)}$$

(„levý kraj“).

Dále víme, že $A : L^1(0,\infty) \not\to L^1(0,\infty)$.

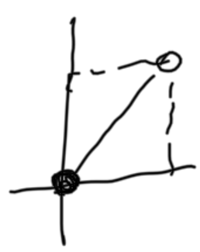
Cíl: - chceme odtud vyvodit, že

$$A : L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty) \quad \forall p \in (1,\infty)$$

- pokud možno s nějakým odhadem konstanty (normy $\|T\|_{L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)}$)

Poznámka: Víme, že nemůžeme použít R-T.

Věta 10 (interpolace slabých odhadů v diagonálním případě).



Nechť (R,μ) a (S,ν) jsou prostory se σ-konečnými mírami. Nechť T je kvasilineární operátor ve smyslu, že $\exists K>0 \ \forall f,g \in \mathcal{D}(T)$:

$$|T(f+g)| \leq K\left(|Tf|+|Tg|\right).$$

Nechť $\|Tf\|_{L^\infty(S,\nu)} \leq C_\infty \|f\|_{L^\infty(R,\mu)}$

a

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda \nu(\{y\in S;\ |Tf(y)|>\lambda\}) \leq C_1 \|f\|_{L^1(R,\mu)}.$$

Potom

$$\|Tf\|_{L^p(S,\nu)} \leq C_p \|f\|_{L^p(R,\mu)}$$

pro každé $p\in(1,\infty]$ a navíc

$$C_p \leq 2K C_1^{\frac{1}{p}} C_\infty^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

<u>Důkaz.</u> Nejprve si všimneme, že ($p\in(1,\infty)$)

$$\|Tf\|^p_{L^p(S,\nu)} = \int_S |Tf(y)|^p d\nu(y)$$

$$= \int_S \int_0^{|Tf(y)|} p\lambda^{p-1} d\lambda \, d\nu(y)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \int_{\{y\in S;\ |Tf(y)|>\lambda\}} d\nu(y) \quad d\lambda$$

$$= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \nu\left(\{y\in S;\ |Tf(y)|>\lambda\}\right) d\lambda.$$

Dále si povšimněme, že, je-li $f = g+h$, potom pro každé $\lambda \in (0,\infty)$

$$\{|Tf|>\lambda\} = \{|T(g+h)|>\lambda\}$$

$$\subseteq \{K(|Tg|+|Th|)>\lambda\}$$

$$= \{|Tg|+|Th| > \tfrac{\lambda}{K}\}$$

$$\subseteq \{|Tg| > \tfrac{\lambda}{2K}\} \cup \{|Th| > \tfrac{\lambda}{2K}\}.$$

Tedy

$$\nu(\{|Tf|>\lambda\}) \leq \nu(\{|Tg|>\tfrac{\lambda}{2K}\}) + \nu(\{|Th|>\tfrac{\lambda}{2K}\}).$$

Položme $g = f\chi_{\{|f| > \frac{\lambda}{2KC_\infty}\}}$,

$$h = f\chi_{\{|f| \leq \frac{\lambda}{2KC_\infty}\}}.$$

Potom $f = g + h$.

Pozor, g, h závisejí na λ!

Tedy
$$\{|Tf| > \lambda\} \subseteq \{|Tg| > \frac{\lambda}{2K}\} \cup \{|Th| > \frac{\lambda}{2K}\}.$$

Protože (z předpokladu)
$$\|Th\|_{L^\infty(S,\nu)} \leq C_\infty \|h\|_{L^\infty(S,\nu)}$$
$$\leq C_\infty \cdot \frac{\lambda}{2K \cdot C_\infty} = \frac{\lambda}{2K},$$

takže $\{|Th| > \frac{\lambda}{2K}\}$ je prázdná. (!)

Tedy
$$\{|Tf| > \lambda\} \subseteq \{|Tg| > \frac{\lambda}{2K}\}. \qquad (*)$$

Zpět k odhadu normy. Máme
$$\|Tf\|^p_{L^p(S,\nu)} = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \nu(\{|Tf| > \lambda\})\, d\lambda$$
$$\overset{(*)}{\leq} p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu(\{|Tg| > \frac{\lambda}{2K}\})\, d\lambda$$
$$\overset{\text{(slabý odhad)}}{\leq} p \cdot \int_0^\infty \lambda^{p-1} C_1 \frac{2K}{\lambda} \int_R |g(x)|\, d\mu(x)\, d\lambda$$

$$= C_1 p\, 2K \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\{x\in R;\, |f(x)| > \frac{\lambda}{2KC_\infty}\}} |f(x)|\, d\mu(x)\, d\lambda$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} 2KC_1 p \int_R |f(x)| \int_0^{2KC_\infty |f(x)|} \lambda^{p-2}\, d\lambda\, d\mu(x)$$

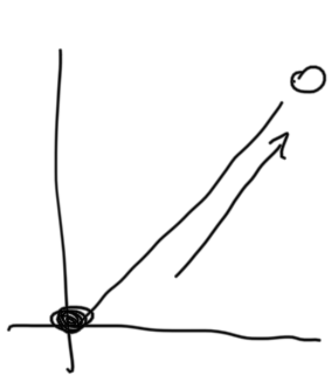
$$= 2KC_1 p \int_R |f(x)| \cdot \frac{1}{p-1} \left(2KC_\infty |f(x)|\right)^{p-1} d\mu(x)$$

$$= (2K)^p \frac{p}{p-1} C_1 C_\infty^{p-1} \int_R |f(x)|^p\, d\mu(x),$$

a tvrzení plyne povýšením na $\frac{1}{p}$. $\square$

<u>POZNÁMKA</u>. Povšimněme si výrazu $\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p}$ v odhadu $\|T\|_{L^p(0,\infty)\to L^p(0,\infty)}$.

Tento výraz ilustruje, že (a jak rychle) se omezenost T „kazí" při $p \to 1_+$.



Důsledek: $A: L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)$, $p \in (1,\infty]$,

přičemž $\|A\|_{L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)} \leq 2 \frac{p}{p-1}$

(neboť $K = 1$, $C_1 = 1$, $C_\infty = 1$).

Pozn. Pro tento operátor víme, že konstantu 2 lze zahodit.

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definujeme

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

kde sup bereme přes všechny krychle s hranami rovnoběžnými se souřadnými osami obsahující x. Operátor $M: f \mapsto Mf$ nazýváme Hardyův–Littlewoodův maximální operátor.

<u>Poznámky</u>. Platí $M : L^\infty \to L^\infty$

a $\sup\limits_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda |\{Mf > \lambda\}| \leq C \|f\|_1$

(první je triviální, druhý je důsledkem Vitaliovy věty o pokrytí). Podle Věty 10 tedy $M : L^p \to L^p$ $\forall p \in (1,\infty]$.

Lze to dokázat i bez interpolace, například tzv. metodou rotací. K tomu literatura:

Miguel de Guzmán:

Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$,

LN 481, Springer 1975.

<u>Poznámka</u>. Větu 10 nelze použít pro Rieszův potenciál, protože jednak není diagonální, ale hlavně pro něj nemáme odhad na „pravém kraji".

Hledáme tedy silnější metodu.

Budeme potřebovat nové pojmy a techniky, zejména

– symetrisaci

– nové prostory funkcí.

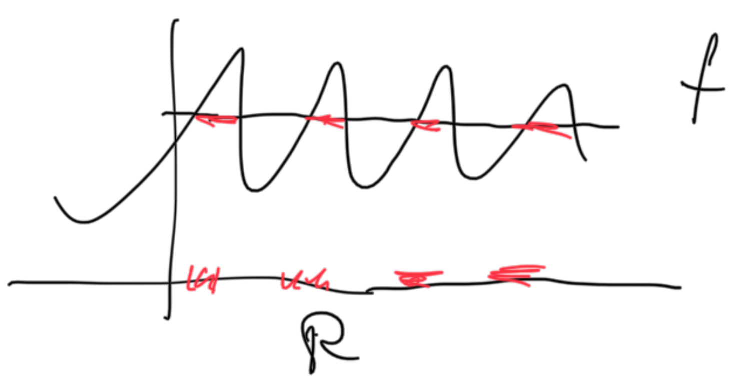
2.4. LORENTZOVY PROSTORY

DEFINICE. Nechť (R,μ) je prostor se σ-konečnou mírou, $\mathcal{M}(R,\mu)$ je množina všech μ-měřitelných skalárních funkcí na R, $\mathcal{M}_0(R,\mu)$ je množina všech $f \in \mathcal{M}(R,\mu)$, které jsou s.v. konečné.

Pro $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ definujeme distribuční funkci $f_* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ předpisem

$$f_*(\lambda) = \mu(\{x \in R,\ |f(x)| > \lambda\}),\quad \lambda \in [0,\infty).$$

Tvrzení. Pro $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ je f_* nezáporná nerostoucí a zprava spojitá.



<u>Důkaz.</u> Pouze spojitost zprava vyžaduje důkaz. Položme $E_\lambda = \{|f| > \lambda\}$, potom $E_{\lambda_2} \subset E_{\lambda_1}$ kdykoli $\lambda_1 < \lambda_2$ a

$$E_{\lambda_0} = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}, \quad \text{a tedy}$$

$$f_*(\lambda_0) = \mu(E_{\lambda_0}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}\right),$$

$$f_*\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu\left(E_{\lambda + \frac{1}{n}}\right) \xrightarrow{\text{Levi}} \mu(E_{\lambda_0}) = f_*(\lambda_0).$$

$\square$

<u>Poznámky.</u> $\forall f, g, f_n \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ platí

(a) $|g| \leq |f|$ μ-s.v. $\Rightarrow g_* \leq f_*$,

(b) $(af)_*(\lambda) = f_*\left(\frac{\lambda}{|a|}\right)$, $\lambda \in [0, \infty)$,

(c) $(f+g)_*(\lambda_1 + \lambda_2) \leq f_*(\lambda_1) + g_*(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty)$,

(d) $|f| \leq \liminf |f_n|$ μ-s.v., pak

$$f_* \leq \liminf (f_n)_*, \quad \text{speciálně}$$

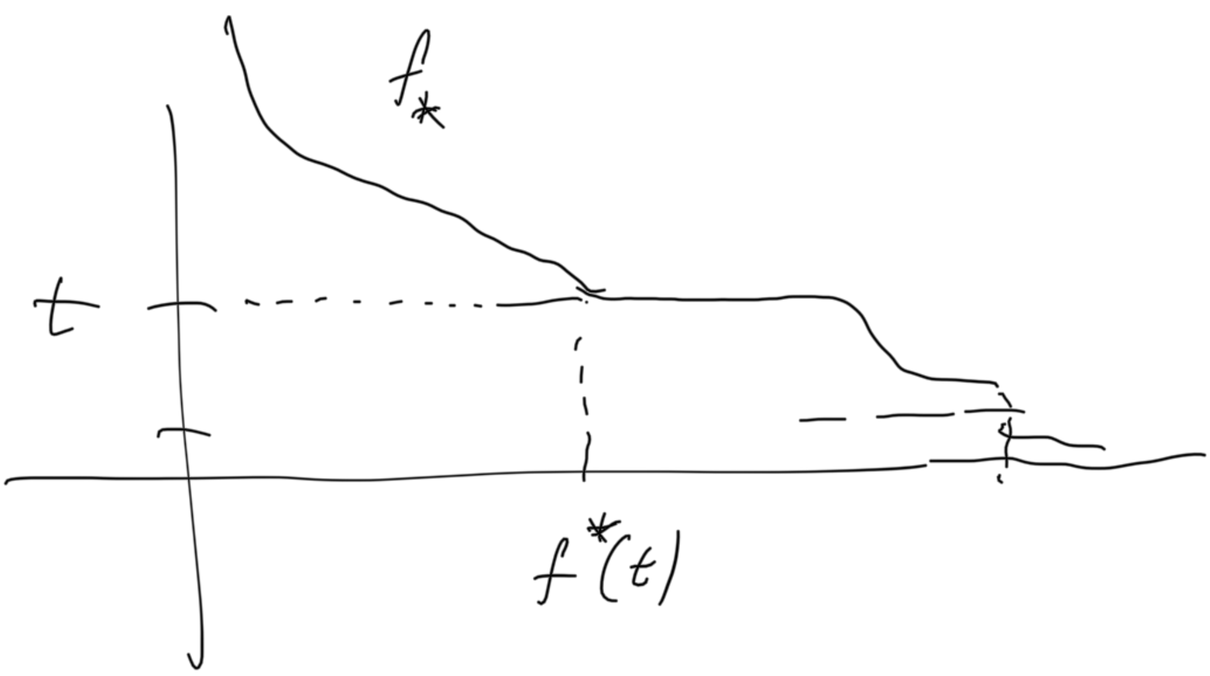
$$|f_n| \nearrow |f| \text{ s.v.} \Rightarrow (f_n)_* \nearrow f_*.$$

DEFINICE. Řekneme, že $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ a $g \in \mathcal{M}_0(S,\nu)$ jsou *souměřitelné*, jestliže $f_* = g_*$ (značíme $f \sim g$).

DEFINICE. Nechť $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$.

Nerostoucím přerovnáním f nazýváme funkci $f^*: [0,\infty) \to [0,\infty]$ definovanou předpisem

$$f^*(t) = \inf \{\lambda;\ \mu(\{x \in R;\ |f(x)| > \lambda\}) \leq t\}.$$



DEFINICE. Nechť $p,q \in (0,\infty]$.

Definujeme funkcionál $\|\cdot\|_{p,q}$ na $\mathcal{M}_0(R,\mu)$ s hodnotami v $[0,\infty]$ předpisem

$$\|f\|_{p,q} = \| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t) \|_{L^q(0,\infty)}.$$

Dále definujeme prostor

$$L^{p,q}(R,\mu) = \{ f \in \mathcal{M}_0(R,\mu),\ \|f\|_{p,q} < \infty \}.$$

Množinu $L^{p,q} = L^{p,q}(R,\mu)$ nazýváme *Lorentzovým prostorem*.

Přednáška 7 $\qquad$ 20 $\frac{11}{XI}$ 20

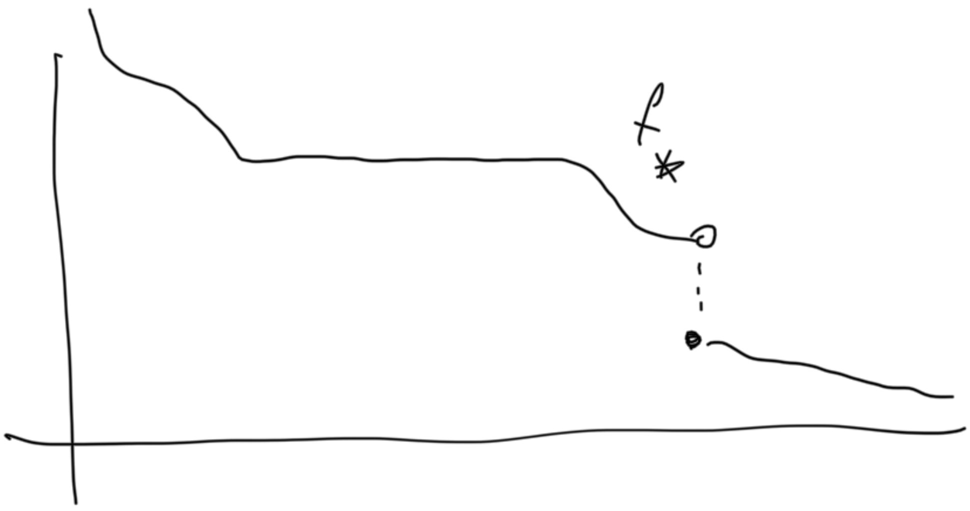
Poznámky

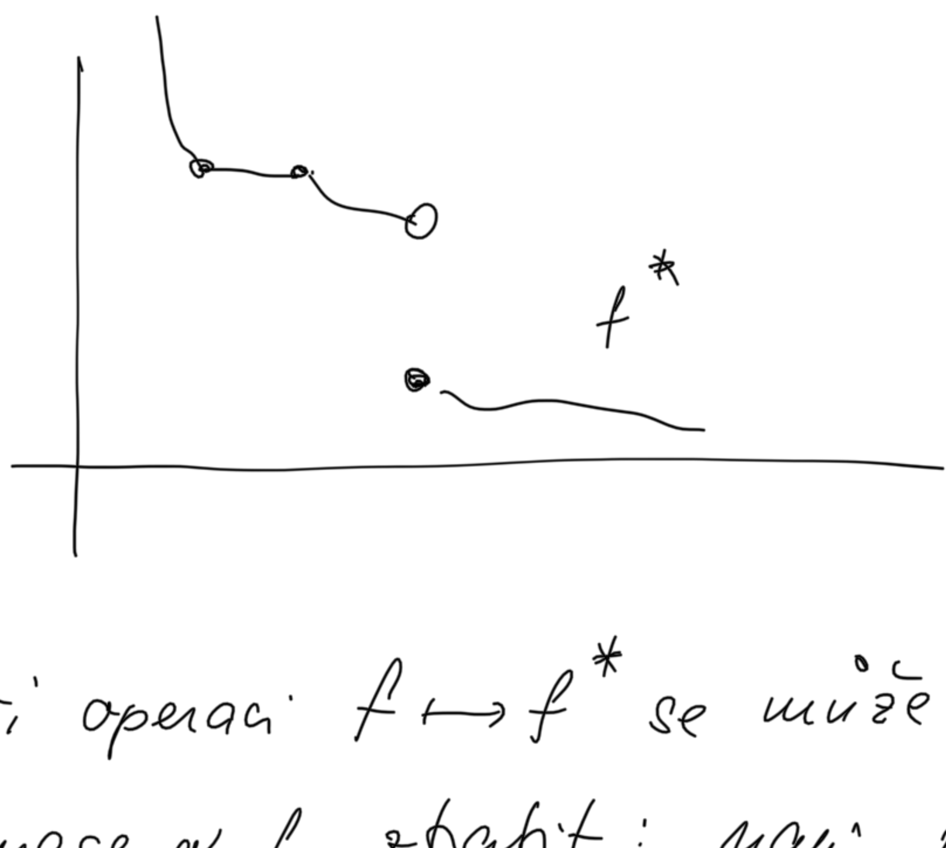
(a) f^* je nezáporná nerostoucí a zprava spojitá (bez důkazu)

(b) $(af)^* = |a| \cdot f^*$

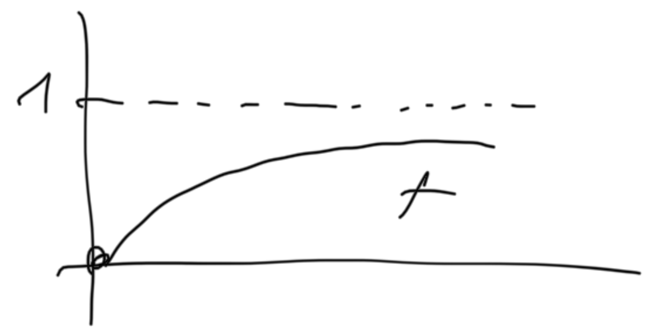
(c) $|f_n| \nearrow |f|$ a.e. $\Rightarrow$ $f_n^* \nearrow f^*$

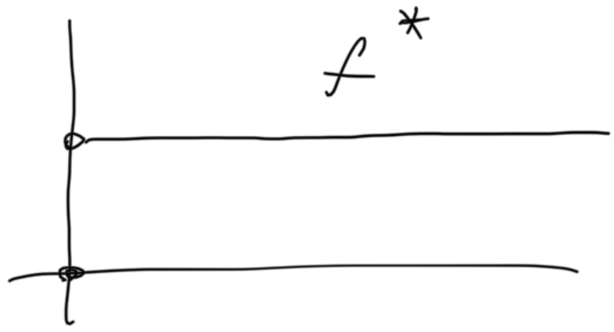
(d) je-li f_* klesající (ostře) a spojitá, pak $f^* = (f_*)^{-1}$





(e) při operaci $f \mapsto f^*$ se může část informace o f ztratit: např. pro $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ na $(0,\infty)$, pak





(takové funkce nás ale zajímají málokdy).

(f) $f \mapsto f^*$ se nehodí pro individuální funkce, je to teoretický nástroj pro výzkum prostorů funkcí a operátorů na nich

(g) $f \sim f^*$ $\quad (f_* = (f^*)_*)$

(h) $(|f|^p)^* = (f^*)^p, \quad p \in (0,\infty)$.

<u>Značení</u>: $\mathcal{M}(R,\mu) = \{f : R \to \mathbb{R}^*, \text{ měř.}\}$,

$\mathcal{M}_+(R,\mu) = \{f \in \mathcal{M}(R,\mu);\ f \geq 0\}$,

$\mathcal{M}_0(R,\mu) = \{f \in \mathcal{M}(R,\mu),\ f \text{ konečná a.e.}\}$.

<u>Tvrzení</u>. Nechť $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$. Potom

(a) $f^*(f_*(\lambda)) \leq \lambda \quad \forall \lambda \in (0,\infty)$,

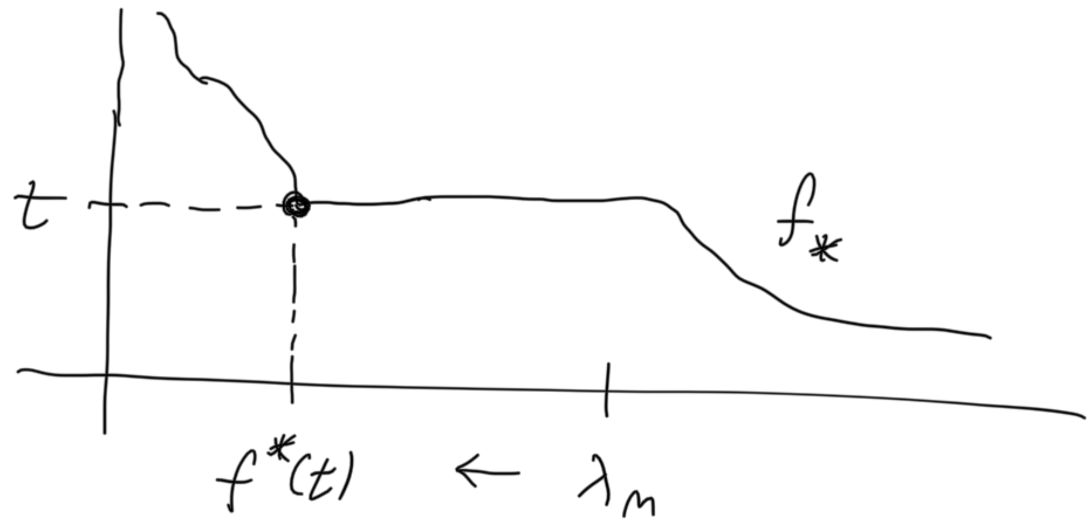
(b) $f_*(f^*(t)) \leq t \quad \forall t \in (0,\infty)$.

<u>Důkaz</u>. (a) Nechť $\lambda \in (0,\infty)$. Potom

$$f^*(f_*(\lambda)) = \inf\{\lambda';\ f_*(\lambda') \leq f_*(\lambda)\}$$

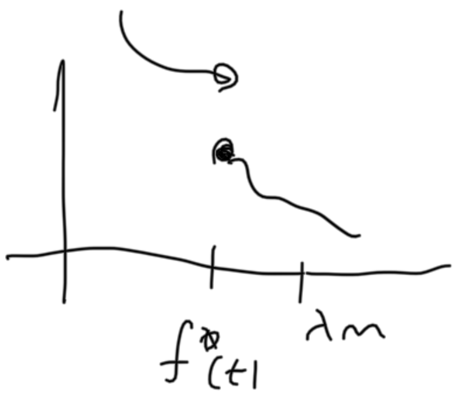
$\leq \lambda.$

(b) Nechť $t \in (0,\infty)$.



Potom $\exists \lambda_m \downarrow f^*(t)$ taková, že

$f_*(\lambda_m) \leq t$. Díky spojitosti



zprava funkce f_*

máme

$$f_*(f^*(t)) = \lim_{m\to\infty} f_*(\lambda_m) \leq t. \qquad \square$$

Tvrzení. $\forall p \in (0,\infty)\ \forall f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$

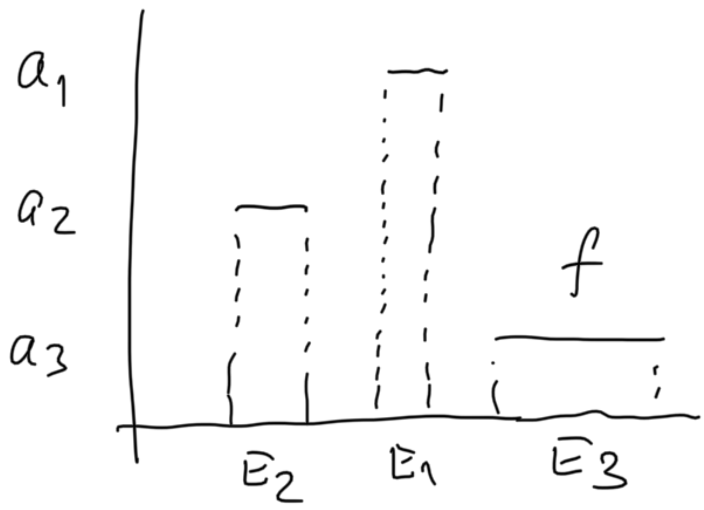
$$\int_R |f(x)|^p \, d\mu(x) = \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt.$$

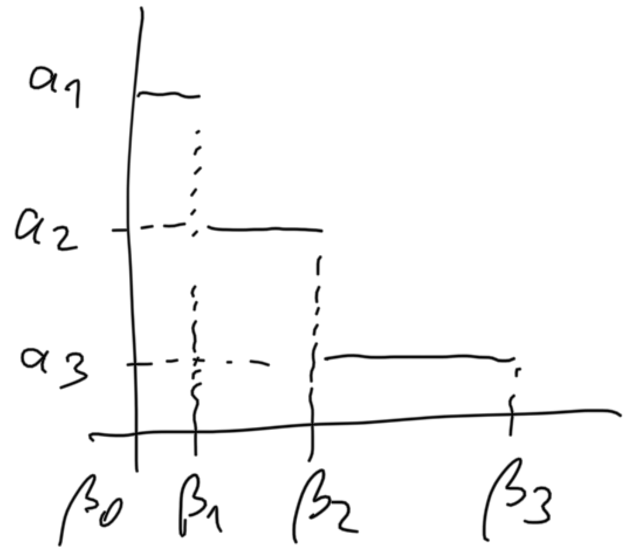
Důkaz. Nechť $f \geq 0$ a f je jednoduchá,

tedy $\quad f = \sum_{j=1}^J a_j \chi_{E_j},$

$E_j \subset \mathbb{R}$ měřitelné, $0 < \mu(E_j) < \infty$.

Označme $\beta_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$.





Potom

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu = \sum_{j=1}^{J} a_j^p \mu(E_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} a_j^p (\beta_j - \beta_{j-1}) \qquad (\beta_0 = 0)$$

$$= \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt.$$

Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}, \mu)$ obecná, pak existuje posloupnost $\{s_n\}$ jednoduchých funkcí splňující $0 \le s_n \nearrow f$. Výsledek potom plyne z Fatouovy vlastnosti nerostoucího přerovnání. $\square$

OTÁZKA: Je $f \mapsto f^*$ subaditivní?

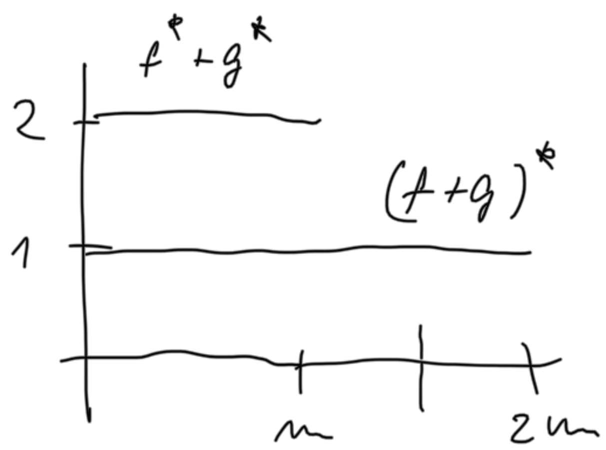
<u>odpověď</u>: Není, neplatí pro

$E, F \subset R$ měř., $\mu(E) = \mu(F) = m$,

$f = \chi_E$, $g = \chi_F$, $E \cap F = \emptyset$, platí

$$f^* = g^* = \chi_{[0,m)}, \quad (f+g)^* = \chi_{[0,2m)}.$$

Tedy např. $(f+g)^*\left(\frac{3}{2}m\right) = 1$, $f^*\left(\frac{3}{2}\right) + g^*\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.



Místo toho platí pouze následující tvrzení!

<u>Tvrzení</u>. Nechť $f, g \in \mathcal{M}(R, \mu)$, $s, t \in (0, \infty)$.

Potom $(f+g)^*(s+t) \leq f^*(s) + g^*(t)$.

<u>POZNÁMKA</u>. Nejčastěji se používá ve tvaru

$$(f+g)^*(t) \leq f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right),$$

případně $\leq f^*(\lambda t) + g^*((1-\lambda)t)$, $\lambda \in [0,1]$.

<u>Důkaz</u>. Položme $x = f^*(s) + g^*(t)$

a $y = (f+g)_*(x)$.

Potom

$$y = \mu(\{|f+g| > f^*(s) + g^*(t)\}) \quad \left(\begin{matrix}\text{def. } (f+g)_* \\ \text{a def. } \lambda\end{matrix}\right)$$

$$\leq \mu(\{|f| > f^*(s)\}) + \mu(\{|g| > g^*(t)\}) \quad (\text{inkluze})$$

$$= f_*(f^*(s)) + g_*(g^*(t)) \quad (\text{def } f_*, g_*)$$

$$\leq s + t \quad (\text{Tvrzení (b)}).$$

Tedy

$$(f+g)^*(s+t) \leq (f+g)^*(y) \quad ((f+g)^* \downarrow)$$

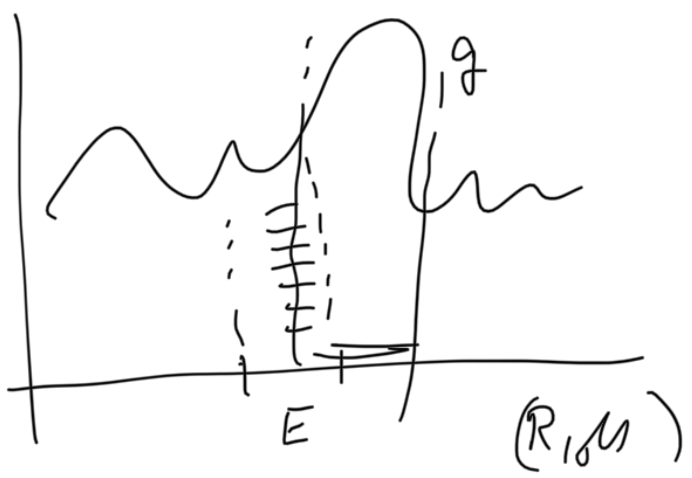
$$= (f+g)^*((f+g)_*(\lambda)) \quad (\text{def. } y)$$

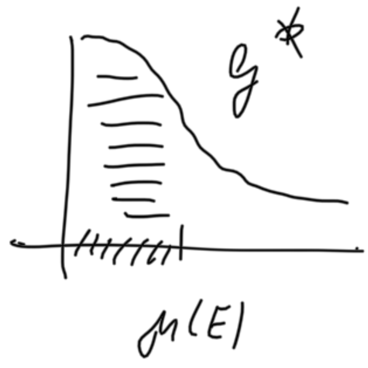
$$\leq \lambda \quad (\text{Tvrzení (a)})$$

$$= f^*(s) + g^*(t). \quad (\text{def. } \lambda) \quad \square$$

<u>Tvrzení</u>. Nechť $g \in \mathcal{M}_+(R,\mu)$, $E \subset R$ měř.

Potom $$\int_E g \, d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(t)\, dt.$$

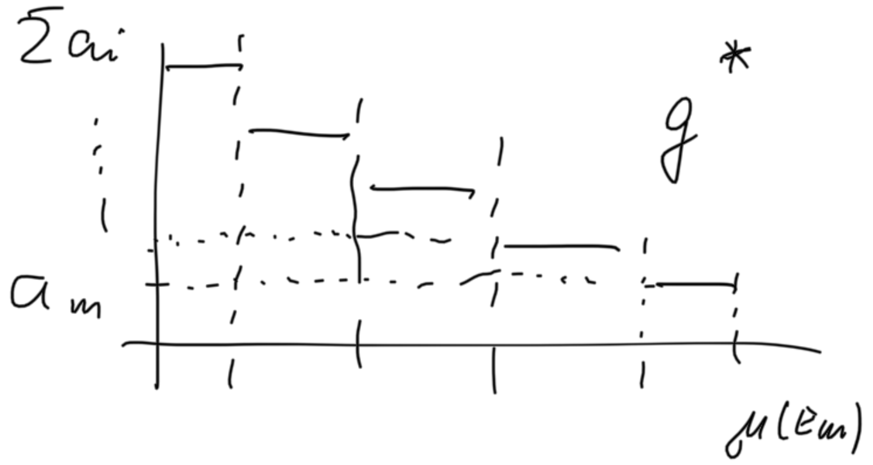




<u>Důkaz</u>. Předpokládejme, že

$$g = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}, \quad a_j > 0, \quad E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m,$$

$$0 < \mu(E_j) < \infty .$$



Potom $g^* = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}$. Tedy

$$\int_E g \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap E)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} a_j \min\{\mu(E_j), \mu(E)\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E)} \chi_{(0,\mu(E_j))}(t) \, dt$$

$$= \int_0^{\mu(E)} g^*(t) \, dt .$$

Pro obecnou g z hustoty jednod. fcí! $\square$

Věta 11 (Hardyova-Littlewoodova nerovnost).

Nechť $f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Potom

$$\int_R |fg| \, d\mu < \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) \, dt.$$

Důkaz. Stačí pro $f, g \geq 0$ a jednoduché!

Nechť $f = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \chi_{E_j}$, $E_1 \subset \dots \subset E_m$, $a_j > 0$.

Potom $f^* = \sum_{j=1}^{m} a_j \, \chi_{[0, \mu(E_j))}$

Tedy

$$\int_R fg \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{E_j} g \, d\mu \quad (\text{def. } f)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(t) \, dt \quad (\text{Tvrzení})$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_j \, \chi_{[0,\mu(E_j))}(t)}_{f^*(t)} \, g^*(t) \, dt$$

$$= \int_0^\infty f^*(t) \, g^*(t) \, dt. \qquad \square$$

DEFINICE. Pro $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ a $t > 0$ definujeme funkci $f^{**}: (0,\infty) \to [0,\infty]$ předpisem

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds.$$

Poznámka. $f^{**} = A(f^*) = M(f^*)$.

Cíl: dokázat, že $f \mapsto f^{**}$ subaditivní je.

Přednáška 8 $\quad 20 \frac{18}{XI} 20$

Věta 12 Nechť $f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ a $t \in (0, \infty)$.

Potom
$$(f+g)^{**}(t) \le f^{**}(t) + g^{**}(t).$$

Důkaz. Stačí dokázat, že

$$f^{**}(t) = \sup \left\{ \int_R |fh| \, d\mu, \int_R |h| \, d\mu = 1, |h| \le \frac{1}{t} \right\}.$$

Jest pro h s uvedenými vlastnostmi, pevná f, t:

$$\int_R |fh| \, d\mu \overset{(H-L)}{\le} \int_0^\infty f^*(s) h^*(s) \, ds$$

$$= \int_0^t f^*(s) h^*(s) \, ds + \int_t^\infty f^*(s) h^*(s) \, ds$$

$$\le \int_0^t f^*(s) h^*(s) \, ds + f^*(t) \int_t^\infty h^*(s) \, ds$$

$$= \int_0^t f^*(s) h^*(s) \, ds + f^*(t) \left(1 - \int_0^t h^*(s) \, ds\right)$$

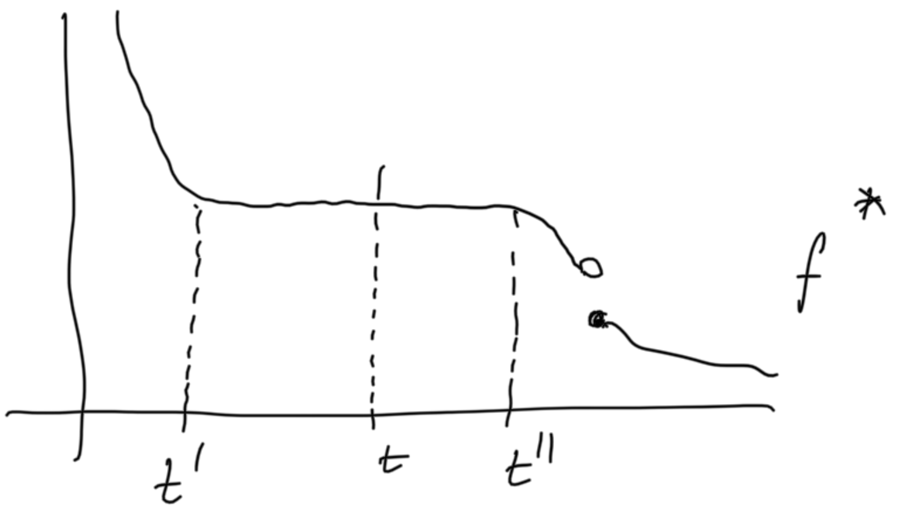
$$= \int_0^t f^*(s) h^*(s) \, ds + f^*(t) \int_0^t \underbrace{\left(\frac{1}{t} - h^*(s)\right)}_{\ge 0} ds$$

$$\le \int_0^t f^*(s) h^*(s) \, ds + \int_0^t f^*(s) \left(\frac{1}{t} - h^*(s)\right) ds$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds = f^{**}(t).$$

Tedy
$$\sup \left\{ \int_R |fh| \, d\mu, \int_R |h| \, d\mu = 1, |h| \le \frac{1}{t} \right\} \le f^{**}(t).$$

Opačně (nasycení): fixujme f, t a položme



$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{na } (0, t') \\ \alpha_t & \text{na } [t', t'') \quad (\text{pokud } t' < t'') \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

kde $t' = f_*(t) = \mu(\{f^* > t\})$,

$$t'' = f_*(t) = \mu(\{f^* \geq t\})$$

a α_t volíme tak, aby $\int_R \tilde{h}\, d\mu = 1$.

Dopočítáme α_t: jest

$$1 = \int_R \tilde{h}\, d\mu = \int_0^\infty (\tilde{h})^*(s)\, ds = \int_0^{t'} \frac{1}{t}\, ds + \int_{t'}^{t''} \alpha_t\, ds$$

$$= \frac{t'}{t} + \alpha_t (t'' - t'),$$

takže $\alpha_t = \dfrac{1 - \frac{t'}{t}}{t'' - t'} = \dfrac{t - t'}{t(t'' - t')}$.

Potom $|\tilde{h}| \le t$, $\int \tilde{h} = 1$ a máme

$$\int_0^\infty f^*(s)(\tilde{h})^*(s)\,ds = \int_0^{t'} f^*(s)\frac{1}{t}\,ds + \int_{t'}^{t''} f^*(s)\,\alpha_t\,ds$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^{t'} f^*(s)\,ds + \frac{t-t'}{t(t''-t')}\cdot\int_{t'}^{t''} f^*(t)\,ds$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^{t'} f^*(s)\,ds + \frac{t-t'}{t(t''-t')}(t''-t')\cdot f^*(t)$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^{t'} f^*(s)\,ds + \frac{1}{t}\int_{t'}^{t} f^*(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^{t} f^*(s)\,ds = f^{**}(t).$$

Odtud a ze subaditivity suprema plyne tvrzení! $\square$

<u>Věta 13</u> (Hardyovo lemma). Nechť f, g jsou nezáporné měřitelné funkce na $(0,\infty)$ a nechť pro každé $t \in (0,\infty)$ platí

$$\int_0^t f(s)\,ds \le \int_0^t g(s)\,ds.$$

Potom pro každou nerostoucí nezápornou funkci ξ na $(0,\infty)$ platí

$$\int_0^\infty f(s)\,\xi(s)\,ds \le \int_0^\infty g(s)\,\xi(s)\,ds.$$

Důkaz. Stačí dokázat pro ξ jednoduchou, tedy tvaru $\xi = \sum_{j=1}^{J} a_j \cdot \chi_{[0,\alpha_j]}$ pro $a_j > 0$, $\alpha_j > 0$.

Potom
$$\int_0^\infty f(s)\xi(s)\,ds = \sum_{j=1}^{J} a_j \int_0^{\alpha_j} f(s)\,ds$$
$$\leq \sum_{j=1}^{J} a_j \cdot \int_0^{\alpha_j} g(s)\,ds = \int_0^\infty g(s)\xi(s)\,ds. \qquad \square$$

Zpět k Lorentzovým prostorům. Připomeňme:

$p,q \in (0,\infty]$, $\quad \|f\|_{p,q} = \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\|_{L^q(0,\infty)}$,

Lorentzův prostor:

$$L^{p,q}(R,\mu) = \{f \in \mathcal{M}_0(R,\mu);\ \|f\|_{p,q} < \infty\}.$$

Poznámky.

(a)
$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty f^*(t)^q\, t^{\frac{q}{p}-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, & q<\infty, \\ \sup\limits_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & q=\infty. \end{cases}$$

(b) alternativní vzorec pro $\|\cdot\|_{p,q}$:

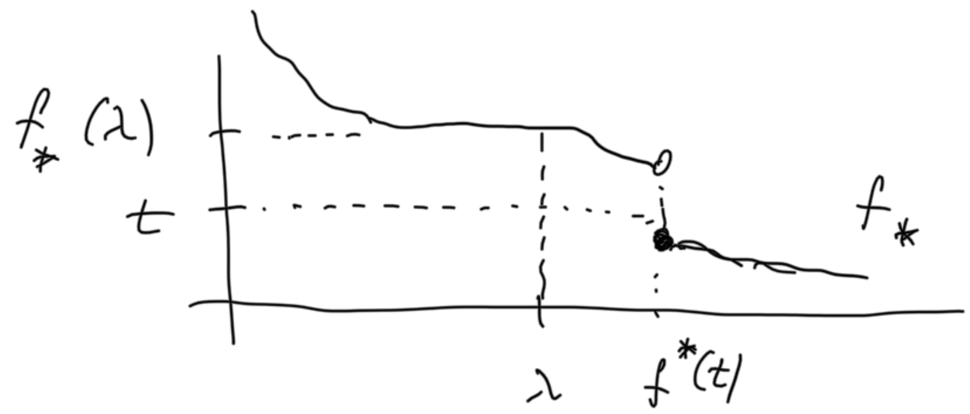
$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \|p\,\lambda^{q-1} f_*(\lambda)^{\frac{q}{p}}\|_{L^q(0,\infty)}, & \begin{matrix} p<\infty \\ q<\infty \end{matrix} \\ \sup\limits_{t\in(0,\infty)} \lambda\, f_*(\lambda)^{1/p}, & \begin{matrix} q=\infty, \\ p<\infty, \end{matrix} \end{cases}$$

a $\|f\|_{\infty,\infty} = \sup\limits_{\lambda\in(0,\infty)} f_*(\lambda)$.

<u>Důkaz</u>. Nejprve si povšimněme, že platí:

$\forall f,\ t,\lambda\in(0,\infty)$:

$$(*)\quad t< f_*(\lambda) \iff \lambda < f^*(t)$$



<u>Důkaz (*)</u>: označme $M_t=\{\sigma>0;\ f_*(\sigma)\le t\}$.

Potom:
- $f^*(t)=\inf M_t$,
- M_t je buď $[f^*(t),\infty)$ (díky spoj. +), nebo $(0,\infty)$.

Tedy platí-li $f^*(t)\neq 0$, pak

$$t<f_*(\lambda) \iff \lambda\notin M_t \iff \lambda<\inf M_t = f^*(t)\neq 0.$$

$\square$

<u>Důkaz (b)</u>: Nechť nejprve $q<\infty$. Potom

$$\|f\|_{p,q}^q \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{subst. } t=s^p \\ dt = p s^{p-1} ds \\ t^{-1}dt = p s^{-1} ds \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \infty \\ \hline s & 0 & \infty \end{array} \end{array}}$$

$$= p\int_0^\infty s^{q-1} f^*(s^p)^q\,ds$$

$$= p\int_0^\infty s^{q-1}\int_0^{f^*(s^p)} q\lambda^{q-1}\,d\lambda\,ds$$

$$\overset{(*)}{\underset{(\text{Fubini})}{=}} p\int_0^\infty \lambda^{q-1}\int_0^{f_*(\lambda)^{1/p}} q s^{q-1}\,ds\,d\lambda$$

$$\boxed{\begin{aligned} &0<\lambda<f^*(s^p) \overset{(*)}{\iff} \\ &\iff 0<s^p<f_*(\lambda) \\ &\iff 0<s<(f_*(\lambda))^{1/p} \end{aligned}}$$

$$= p\int_0^\infty \lambda^{q-1} f_*(\lambda)^{\frac{q}{p}}\,d\lambda.$$

Nyní předpokládejme, že $q=\infty$. Položme, pro $\lambda>0$, $t=f_*(\lambda)$. Potom

$$\|f\|_{p,\infty} \overset{\text{def.}}{=} \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$$

$$= \sup_{\lambda\in(0,\infty)} f_*(\lambda)^{\frac{1}{p}} f^*(f_*(\lambda)) \le \sup_{\lambda\in(0,\infty)} f_*(\lambda)^{1/p}\lambda,$$

a obráceně položme $\lambda=f^*(t)$ pro t pevné, pak

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda f_*(\lambda)^{1/p} \le \sup_{t\in(0,\infty)} f^*(t) f_*(f^*(t))^{1/p} \le$$

$$\le \sup_{t\in(0,\infty)} f^*(t)\, t^{1/p} = \|f\|_{p,\infty}.$$

Případ $p=q=\infty$ je triviální! $\square$

(c) $L^{p,p}=L^p$, neboť

$$\|f\|_{p,p} = \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}} f^*(t)\|_p = \|f^*\|_p = \|f\|_p.$$

(d) pro $p=\infty$ a $q<\infty$ je $L^{p,q}$ triviální ve smyslu $L^{p,q} = \{0\}$, neboť pro $q<\infty$ jest

$$\|f\|_{\infty,q} \overset{\text{def}}{=} \left(\int_0^\infty f^*(t)^q \, t^{(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{q})q} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_0^\infty f^*(t)^q \, t^{-1} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{pro každou } f \not\equiv 0 \\ 0 & \text{pro } f \equiv 0. \end{cases}$$

(e) $L^{p,q}$ je lineární množina, neboť

$$\|f+g\|_{p,q} \overset{\text{def}}{=} \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f+g)^*(t)\|_{L^q(0,\infty)}$$

$$\leq \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(f^*(\tfrac{t}{2}) + g^*(\tfrac{t}{2})\right)\|_{L^q(0,\infty)}$$

$$\overset{(\|\cdot\|_q \text{ je kvazinorma})}{\leq} C\left(\|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(\tfrac{t}{2})\|_{L^q(0,\infty)} + \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} g^*(\tfrac{t}{2})\|_{L^q(0,\infty)}\right)$$

$$\overset{(\text{subst. } s=\frac{t}{2} \text{ atd.})}{\leq} C'\left(\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}\right),$$

a pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{p,q} = |\alpha| \cdot \|f\|_{p,q}.$$

(f) nejdůležitější případy Lorentzových prostorů

- $q=p$ … $L^{p,p} = L^p$ (Lorentz = Lebesgue),

- $q = \infty \ldots L^{p,q} = L^{p,\infty}$ (Lorentz = slabý Lebesgue),
- $q = 1 \ldots L^{p,q} = L^{p,1}$ (Lorentz = „přísný Lebesgue").

Poznámka: viděli jsme, že

$A: L^1 \not\to L^1$, ale $A: L^1 \to L^{1,\infty}$ (na $(0,\infty)$),

$I_\gamma: L^1 \not\to L^{\frac{n}{n-\gamma}}$, ale $I_\gamma: L^1 \to L^{\frac{n}{n-\gamma},\infty}$ (na $\mathbb{R}^n$),

a dle Čebyševovy nerovnosti $L^p \subset L^{p,\infty}$.

Cíl: otázka: kdy je $\|\cdot\|_{p,q}$ norma?

(připomeňme: $\|\cdot\|_p$ je norma $\iff p \in [1,\infty]$)

Věta 14 (Lorentzovy normy).
Nechť $1 \le q \le p \le \infty$. Potom je $\|\cdot\|_{p,q}$ je norma.

Důkaz. Je-li $p = q = 1$, nebo $p = q = \infty$, pak není co dokazovat. Předpokládejme, že $1 < p < \infty$ a $1 \le q \le p$. Stačí dokázat $\triangle$-nerovnost (ostatní vlastnosti normy jsou triviálně splněny). Platí pro $f, g \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$

$$\|f+g\|_{p,q} \overset{def}{=} \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^*(t)\|_{L^q(0,\infty)}$$

$$= \sup_{\|h\|_{L^{q'}(0,\infty)} \le 1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f+g)^*(t)\, h(t)\, dt$$

$$\overset{(!)}{=} \sup_{\|h\|_{L^{q'}(0,\infty)} \le 1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f+g)^*(t)\, h^*(t)\, dt .$$

$\ge \dots$ triviální (restrikce sup na $\downarrow$ funkce)

$\le \dots$ H-L nerovnost, neboť

$t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f+g)^*(t)$ je nerostoucí,

a to díky tomu, že $\frac{1}{p} \le \frac{1}{q}$

Víme, že $(f+g)^{**} \le f^{**} + g^{**}$, to znamená, že

$$\int_0^t (f+g)^*(s)\, ds \le \int_0^t \left(f^*(s) + g^*(s)\right) ds ,$$

a tedy podle Hardyova lemmatu je

$$\int_0^\infty (f+g)^*(t)\, \xi(t)\, dt \le \int_0^\infty \left(f^*(t) + g^*(t)\right) \xi(t)\, dt$$

pro každou $\xi \ge 0$, $\xi \downarrow$. Použijeme to pro speciální volbu

$$\xi(t) = t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} h^*(t),$$

která je nezáporná a nerostoucí. Dostaneme

$$\|f+g\|_{p,q} \le \dots \le \sup_{\|h\|_{L^{q'}}\le 1} \left(\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f^*(t)+g^*(t))\, h^*(t)\,dt \right)$$

(subadd supreme)

$$\le \sup_{\|h\|_{L^{q'}}\le 1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\, h^*(t)\,dt$$

$$+ \sup_{\|h\|_{L^{q'}}\le 1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} g^*(t)\, h^*(t)\,dt$$

$$= \|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}. \qquad \square$$

Přednáška 9 $\quad$ 20 $\frac{25}{XI}$ 20

Věta 15 (vnoření Lorentzových prostorů).

Nechť $p, q, r \in (0, \infty]$, $q \le r$. Potom

$$L^{p,q}(R,\mu) \hookrightarrow L^{p,r}(R,\mu)$$

(spojité vnoření, tj.: $\exists C > 0 \ \forall f \in L^{p,q}(R,\mu)$

platí $\|f\|_{p,r} \le C \|f\|_{p,q}$.

POZNÁMKA. Nezáleží na (R,μ).

Důkaz Věty 15. Pro $q = r$ je tvrzení zřejmé. Pro $p = \infty$ je tvrzení rovněž zřejmé, neboť $L^{\infty,q} = \begin{cases} L^{\infty} & (q = \infty) \\ \{0\} & (q < \infty) \end{cases}$.

Nechť $p < \infty$ a $q < r$.

1. krok: $r = \infty$. Pro pevná f a t máme

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = c_{p,q} \left(\int_0^t s^{\frac{q}{p}-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} f^*(t)$$

$\left(c_{p,q} = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q}\right)$

$$\overset{(f^* \downarrow)}{\le} c_{p,q} \left(\int_0^t s^{\frac{q}{p}-1} f^*(s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c_{p,q} \left(\int_0^\infty s^{\frac{q}{p}-1} f^*(s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C_{p,q} \cdot \|f\|_{p,q}$$

a přimaluujeme vlevo supremum, takže

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \le C_{p,q} \cdot \|f\|_{p,q}.$$

<u>2. krok</u> Nechť $0<q<r<\infty$. Potom

$$\|f\|_{p,r} = \left(\int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} f^*(t)^r \, dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q \cdot \underbrace{t^{\frac{r-q}{p}} \cdot f^*(t)^{r-q}}_{\le \sup_t \dots = \|f\|_{p,\infty}^{r-q}} \, dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\le \|f\|_{p,\infty}^{1-\frac{q}{r}} \cdot \|f\|_{p,q}^{\frac{q}{r}}$$

(interpolační nerovnost pro Lor. pr.)

$$\overset{(1. krok)}{\le} C_{p,q,r} \cdot \|f\|_{p,q}^{1-\frac{q}{r}} \cdot \|f\|_{p,q}^{\frac{q}{r}}$$

$$= C_{p,q,r} \|f\|_{p,q}. \qquad \square$$

Cíl: Víme, že $\|\cdot\|_{p,q}$ je norma pro $1 \le q \le p \le \infty$.

To je nepříjemné omezení.

Spokojíme-li se s tím, aby $\|\cdot\|_{p,q}$ bylo ekvivalentní nějaké normě, dostaneme obecnější výsledek.

K tomu: váhová Hardyova nerovnost.

K tomu: Minkowského nerovnost.

Tvrzení (Minkowského nerovnost).
Nechť (R,μ), (S,ν) jsou dva σ-konečné prostory s mírami, $p \in [1,\infty)$, $F: R \times S \to \mathbb{R}$, $\mu \times \nu$ – měřitelná,

$$\int_S \left(\int_R |F(x,y)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y) < \infty .$$

Potom

$$\left(\int_R \left| \int_S F(x,y) \, d\nu(y) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \le \int_S \left(\int_R |F(x,y)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y) .$$

Důkaz. Pro $p=1$ plyne z Fubiniovy věty.

Nechť $p\in(1,\infty)$. Položme

$$f(x)=\int_S F(x,y)\,d\nu(y),\quad x\in R,$$

$$A=\int_S\left(\int_R |F(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}d\nu(y).$$

Nechť $g\in L^{p'}(R,\mu)$, $\|g\|_{L^{p'}(R,\mu)}\le 1$. Potom

$$\int_R |f||g|\,d\mu \le \int_R\int_S |F(x,y)|\,d\nu(y)\,|g(x)|\,d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int_S\int_R |F(x,y)|\cdot|g(x)|\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

$$\overset{\text{Hölder uvnitř}}{\le}\int_S\left(\int_R |F(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}\left(\int_R |g(x)|^{p'}d\mu(x)\right)^{1/p'}d\nu(y)$$

$$\le A,$$

takže

$$\|f\|_{L^p(d\mu)}=\sup_{\|g\|_{L^{p'}(d\mu)}\le 1}\int_R |fg|\,d\mu\le A. \qquad \square$$

Poznámka. Minkowského nerovnost se dobře pamatuje ve tvaru

$$\left\| \int_S F(x,y)\, d\nu(y) \right\|_{L^p(d\mu)} \le \int_S \|F(x,y)\|_{L^p(d\mu)}\, d\nu(y),$$

a platí i pro obecnější normy.

<u>Důsledek</u> (váhová Hardyova nerovnost).

Nechť $p \in (1,\infty)$, $\alpha \in (-\infty, p-1)$. Potom

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s)\, ds \right)^p t^\alpha\, dt \le$$

$$\le \left(\frac{p}{p-1-\alpha} \right)^p \int_0^\infty f(t)^p t^\alpha\, dt$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{M}_+(0,\infty)$

(tedy $A : L^p(t^\alpha dt) \to L^p(t^\alpha dt)$).

<u>Důkaz.</u> Jest pro $f \in \mathcal{M}_+(0,\infty)$

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s)\, ds \right)^p t^\alpha\, dt \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(ty)\, dy\, t^{\frac{\alpha}{p}} \right)^p dt \right)^{1/p}$$

subst.

$s = ty$

$y = \frac{s}{t}$

$ds = t\, dy$

s	0	t
y	0	1

(Minkowski)
$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(ty)^p t^\alpha \, dt \right)^{1/p} dy$$

subst.
- $z = ty$
- $t = \frac{z}{y}$
- $dt = \frac{dz}{y}$

t	0	∞
z	0	∞

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(z)^p \frac{z^\alpha}{y^\alpha} \frac{dz}{y} \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

$$= \left(\int_0^\infty f(z)^p z^\alpha \, dz \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 y^{-\frac{\alpha+1}{p}} dy.$$

Protože $\alpha < p-1$, tedy $\frac{\alpha+1}{p} < 1$, je

$$\int_0^1 y^{-\frac{\alpha+1}{p}} dy = \frac{1}{1 - \frac{\alpha+1}{p}} = \frac{p}{p-\alpha-1}. \quad \square$$

<u>Věta 16</u> (alternativní norma na Lorentzově prostoru). Nechť $p \in (1, \infty]$, $q \in [1, \infty]$. Potom funkcionál

$$\| \cdot \|_{(p,q)} : \mathcal{M}(R, \mu) \to [0, \infty],$$

definovaný předpisem

$$\| f \|_{(p,q)} = \| t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} f^{**}(t) \|_{L^q(0,\infty)},$$

je norma na $L^{p,q}(R, \mu)$, a platí

$$\| f \|_{p,q} \leq \| f \|_{(p,q)} \leq C_{p,q} \| f \|_{p,q}, \quad f \in \mathcal{M}(R, \mu).$$

Důkaz. První nerovnost bezprostředně plyne z toho, že $f^*(t) \le f^{**}(t)$ $\forall f\ \forall t$.

Dokážeme druhou nerovnost. Nechť nejprve $q \in [1,\infty)$. Potom

$$\|f\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right)^q t^{\frac{q}{p}-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

(vážená Hardyova nerovnost)

$$\le C_{p,q}\left(\int_0^\infty f^*(t)^q\, t^{\frac{q}{p}-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C_{p,q} \cdot \|f\|_{p,q},$$

neboť $\frac{q}{p}-1 < q-1$ $\quad (p>1)$.

Nyní nechť $q=\infty$. Nechť $\|f\|_{p,\infty} < \infty$, jinak není co dokazovat. Označme $M = \|f\|_{p,\infty}$. Podle definice tedy

$$\sup_{t\in(0,\infty)} t^{1/p} f^*(t) = M,$$

takže $\forall t \in (0,\infty)$ $f^*(t) \le \frac{M}{t^{1/p}}$. Tedy

$$\|f\|_{(p,\infty)} = \sup_{t\in(0,\infty)} t^{1/p} f^{**}(t)$$

$$= \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s)\,ds$$

$$\leq \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t \frac{M}{s^{1/p}}\,ds$$

$$= \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \cdot M \cdot t^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= M \frac{p}{p-1}, \text{ tedy}$$

$$\|f\|_{(p,\infty)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{p,\infty}. \qquad \square$$

<u>POZNÁMKY</u>. (a) Pro $p=1$ tvrzení neplatí, tj.: $\|f\|_{(1,q)} \gg \|f\|_{1,q}$.

(b) V dalším budeme kdy považovat Lorentzovy prostory $L^{p,q}(R,\mu)$ za NLP, pokud je splněna jedna z podmínek:

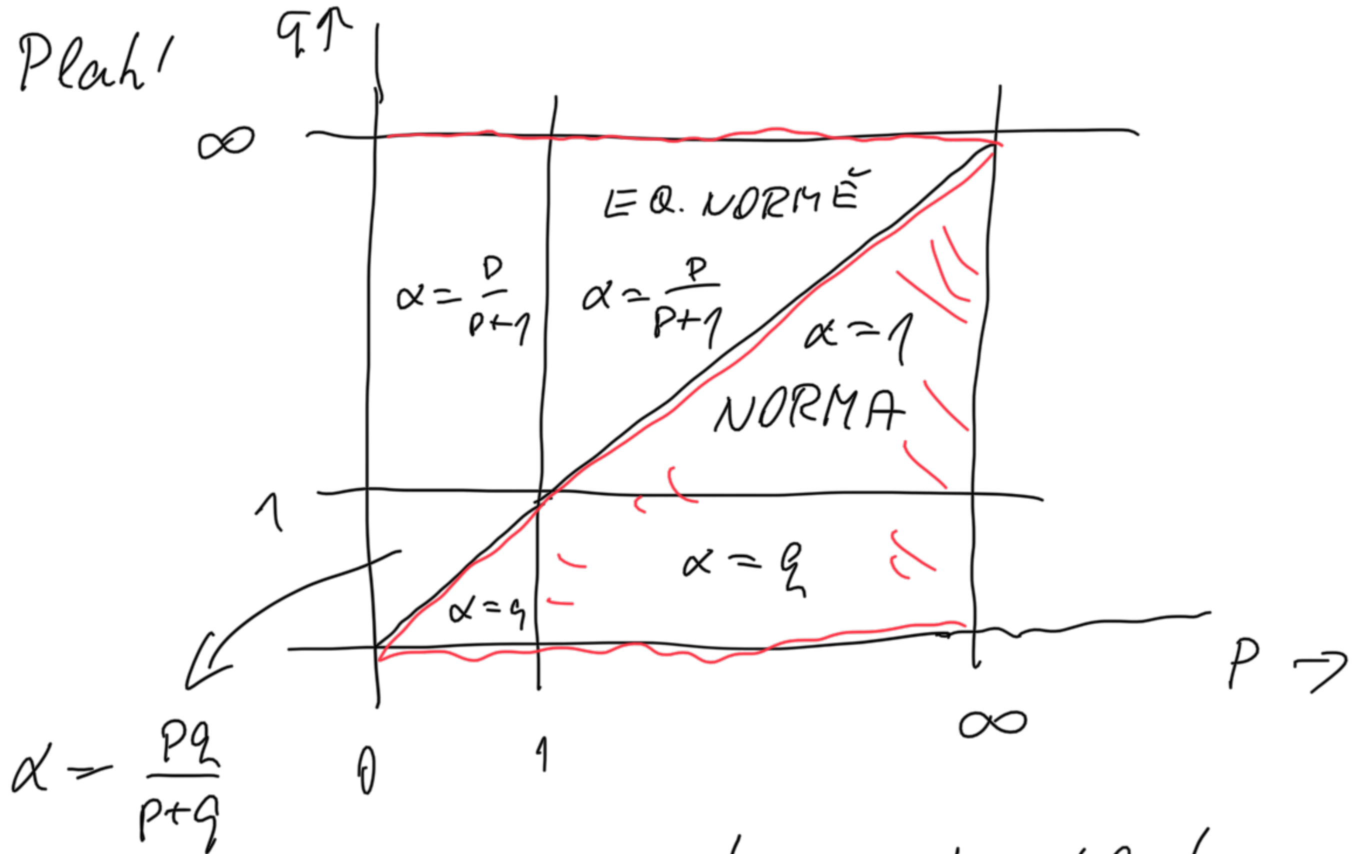
- $p = q = 1$,

- $p = q = \infty$,
- $p \in (1,\infty)$ & $q \in [1,\infty]$.

(c) Ve všech ostatních případech, tj.:

$p,q \in (0,\infty]$, je $\|\cdot\|_{p,q}$ kvazinorma a pro vhodné α je to α-norma.

Plati!



červené = optimální α

2.5. MARCINKIEWICZOVA VĚTA (1939)

Definice. Nechť $p,q \in [1,\infty]$ a T je operátor definovaný alespoň na jednoduchých funkcích na (R,μ) a s hodnotami v $\mathcal{M}_0(S,\nu)$. Řekneme, že T je slabého typu (p,q), jestliže $T : L^{p,1}(R,\nu) \to L^{q,\infty}(S,\nu)$, je-li $p<\infty$, a $T: L^{\infty}(R,\mu) \to L^{q,\infty}(S,\nu)$,

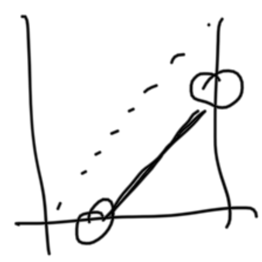
je-li $q=\infty$.

<u>Poznámka</u> silný typ $\Rightarrow$ slabý typ

(neboť $L^{p,1} \hookrightarrow L^{p,p} = L^p$, $L^q = L^{q,q} \hookrightarrow L^{q,\infty}$).

<u>Příklady</u> (a) I_γ je slabého typu

$\left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right)$ a $\left(\frac{n}{\gamma}, \infty\right)$



,

(b) M, A jsou slabého typu $(1,1)$

a silného typu (∞, ∞)

(pro (∞,∞) splývá silný typ se slabým)

- pro A známe,
- pro M je to snadný důsledek Vitaliovy věty o pokrytí, načrtnu:

$E_\lambda = \{ Mf(x) > \lambda \}$, $\lambda \in (0,\infty)$,

$$x \in E_\lambda \Rightarrow \exists B(x,r) : \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f| > \lambda ,$$

Vitali: ∃ disj. podsyst. konečný

$$E_\lambda \subset \bigcup_{\text{fin}} B(x_j, 5r_j),$$

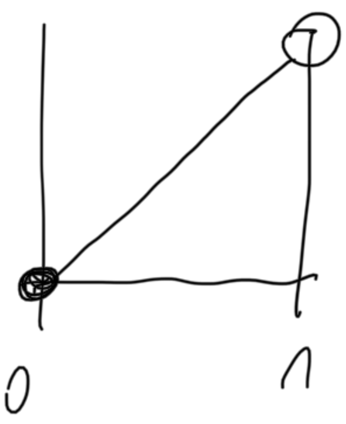
tedy

$$|E_\lambda| \le \sum |B(x_j,5r_j)| \le \frac{C_n}{\lambda} \sum \int_{B(x_j,r_j)} |f|$$

$$\overset{\text{disj.}}{\le} \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

a tedy

$$\sup_\lambda \lambda \cdot |\{Mf>\lambda\}| \le C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$



(c) Hilbertova transformace

$$Hf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy$$

je sl. typu (1,1) (těžké – uvidíme),

ale nemáme duální krajní odhad.

<u>Věta 17</u> (Marcinkiewicz). Nechť

$1 \le p_0 < p_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $q_0 \ne q_1$,

$\theta \in (0,1)$, $r \in [1,\infty]$. Definujeme p, q předpisem

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Nechť T je kvasilineární operátor slabých typů (p_i, q_i), $i = 0,1$. Potom

$$T : L^{p,r} \to L^{q,r}.$$

IDEA DŮKAZU: nalezneme operátor S splňující $(Tf)^* \leq S(f^*)$ a dokážeme příslušné odhady pro S.

Operátory typu S nazýváme Calderónovými operátory.

Důkaz příště, přednáška v úterý $20\frac{1}{XII}20$ v 17^{20}.

Přednáška 10 $\qquad 20\tfrac{1}{XII}20$

dnes: důkaz Marcinkiewiczovy věty (Věta 17)

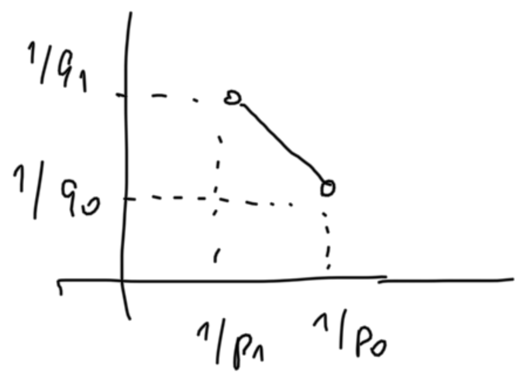
připomeňme tvrzení (nástin):

T slabých typů (p_i, q_i), $i=0,1$, $\theta\in(0,1)$, p,q jako obvykle,

$1\le p_0<p_1<\infty$, $1\le q_0,q_1\le\infty$, $q_0\ne q_1$,

potom $T: L^{p,r}\to L^{q,r}$, kde $r\in[1,\infty]$.

Důkaz. Definujme sklon $m=\dfrac{\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}$



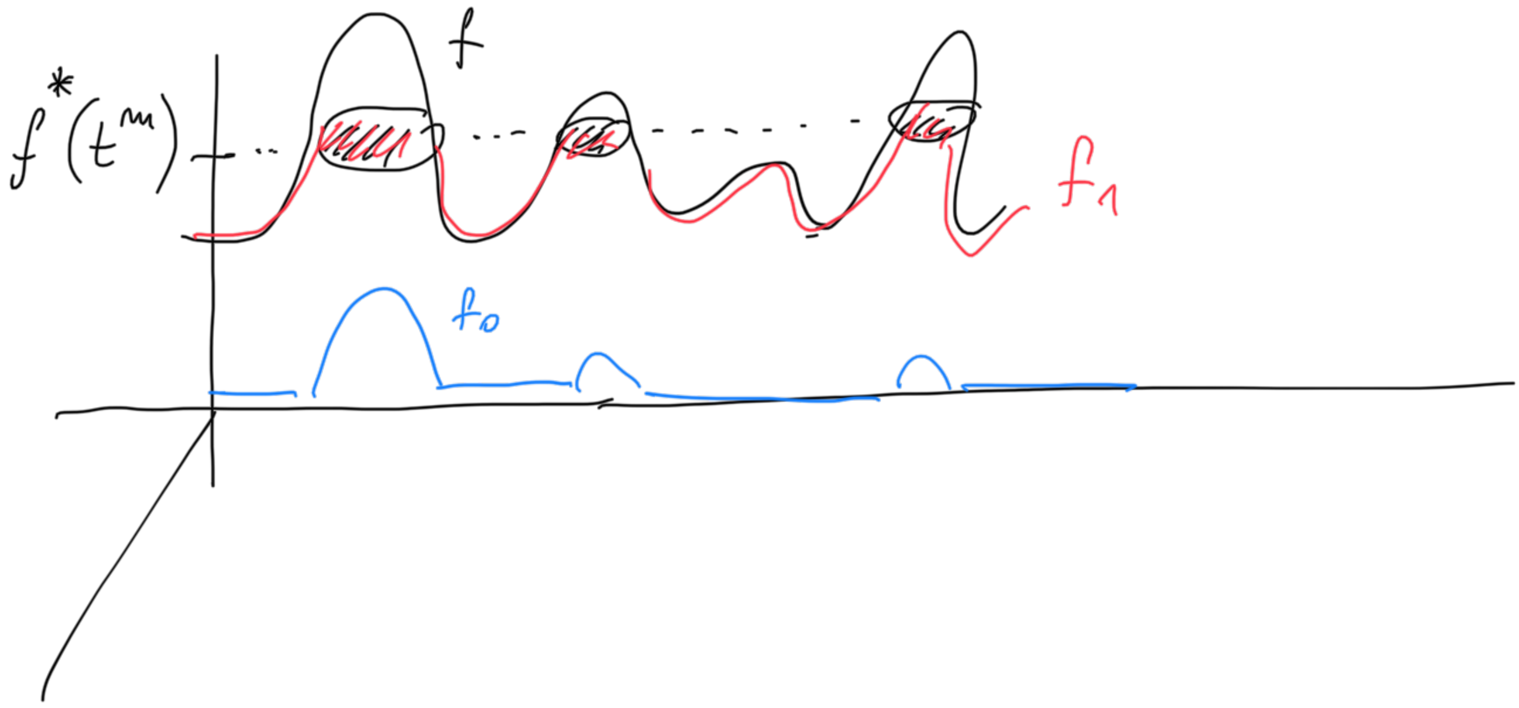
Definujme dále operátor $S: \mathcal{M}_+(0,\infty)\to\mathcal{M}_+(0,\infty)$

předpisem

$$Sg(t)=t^{-\frac{1}{q_0}}\int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}-1}g(s)\,ds+t^{-\frac{1}{q_1}}\int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}-1}g(s)\,ds$$

pro $g\in\mathcal{M}_+(0,\infty)$ a $t\in(0,\infty)$. Nechť $t\in(0,\infty)$

a $f\in\mathcal{M}_0(R)$ a položme



$$f = f_0 + f_1, \text{ kde}$$
$$f_1 = \min\{|f|, f^*(t^m)\} \cdot \operatorname{sign} f,$$
$$f_0 = f - f_1 = \left(|f| - f^*(t^m)\right)_+ \operatorname{sign} f.$$

Potom je snadné ověřit, že
$$f_1^*(s) = \min\{f^*(s), f^*(t^m)\},$$
$$f_0^*(s) = \left(f^*(s) - f^*(t^m)\right)_+$$
pro každé $s \in (0,\infty)$.

<u>IDEA</u>: f_0 ... velká ... $\|f_0\|_{L^{p_0,1}}$,

f_1 ... malá ... $\|f_1\|_{L^{p_1,1}}$.

Tedy
$$\|f_1\|_{p_1,1} = \int_0^\infty s^{\frac{1}{p_1}-1} f_1^*(s)\,ds$$
$$= \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(t^m)\,ds + \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(s)\,ds$$
$$= p_1 \cdot t^{\frac{m}{p_1}} \cdot f^*(t^m) + \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(s)\,ds,$$

$$\|f_0\|_{p_0,1} = \int_0^\infty s^{\frac{1}{p_0}-1} \left(f^*(s) - f^*(t^m)\right)_+ ds$$
$$= \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(s)\,ds - p_0\, t^{\frac{m}{p_0}} f^*(t^m).$$

Dále jest díky kvasilinearitě T pro každé $s \in (0,\infty)$

$$(Tf)^*(s) = |Tf|^*(s) \leq$$

$$\leq c\left(|Tf_0| + |Tf_1|\right)^*(s)$$

$$\leq c\left((Tf_0)^*\left(\tfrac{s}{2}\right) + (Tf_1)^*\left(\tfrac{s}{2}\right)\right).$$

Víme: $T : L^{p_i,1} \to L^{q_i,\infty}$ pro $i=0,1$, a tedy

$$\sup_{\tau\in(0,\infty)} \tau^{\frac{1}{q_i}} (Tf_i)^*(\tau) \leq C_i \, \|f_i\|_{p_i,1} \quad , \quad i=0,1,$$

tedy speciálně pro $\tau = \frac{s}{2}$ máme

$$(Tf_i)^*\left(\tfrac{s}{2}\right) \leq C_i \left(\tfrac{s}{2}\right)^{-\frac{1}{q_i}} \|f_i\|_{p_i,1}$$

pro každé $s\in(0,\infty)$ a $i=0,1$. Tedy celkem

$$(Tf)^*(s) \leq C\left(C_0 \left(\tfrac{s}{2}\right)^{-\frac{1}{q_0}} \|f_0\|_{p_0,1} + C_1 \left(\tfrac{s}{2}\right)^{-\frac{1}{q_1}} \|f_1\|_{p_1,1}\right).$$

Najdeme K dost velké, aby platilo

$$(Tf)^*(s) \leq K\left(\frac{s^{-\frac{1}{q_0}}}{p_0} \|f_0\|_{p_0,1} + \frac{s^{-\frac{1}{q_1}}}{p_1} \|f_1\|_{p_1,1}\right)$$

pro $s\in(0,\infty)$ (například $K = C \max_{i=0,1} \{p_i C_i 2^{1/q_i}\}$).

Toto platí pro každé $s\in(0,\infty)$. Tedy speciálně to platí také pro $s=t$. Tedy

$$(Tf)^*(t) \leq K\left(\frac{t^{-\frac{1}{q_0}}}{p_0} \|f_0\|_{p_0,1} + \frac{t^{-\frac{1}{q_1}}}{p_1} \|f_1\|_{p_1,1}\right)$$

$$= K\left(\frac{t^{-\frac{1}{q_0}}}{p_0} \int_0^{t^m} \tau^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(\tau)\, d\tau - f^*(t^m)\, t^{\frac{m}{p_0}-\frac{1}{q_0}} + \right.$$

$$\left. + f^*(t^m)\, t^{\frac{m}{p_1}-\frac{1}{q_1}} + \frac{t^{-\frac{1}{q_1}}}{p_1} \int_{t^m}^{\infty} \tau^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(\tau)\, d\tau \right).$$

Pozorování: $\frac{m}{p_0} - \frac{1}{q_0} = \frac{m}{p_1} - \frac{1}{q_1}$ (plyne z def. m),

takže prostřední členy se odečtou. Odtud plyne klíčový odhad

$$(Tf)^*(t) \leq S(f^*)(t)$$

pro každé $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ a každé $t \in (0,\infty)$.

Odtud dostáváme

$$\|Tf\|_{q,r} = \| t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} (Tf)^*(t) \|_{L^r(0,\infty)}$$

$$\leq \| t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} S(f^*)(t) \|_{L^r(0,\infty)}$$

$$\leq K\left(\| t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(s)\, ds \|_{L^r(0,\infty)} + \right.$$

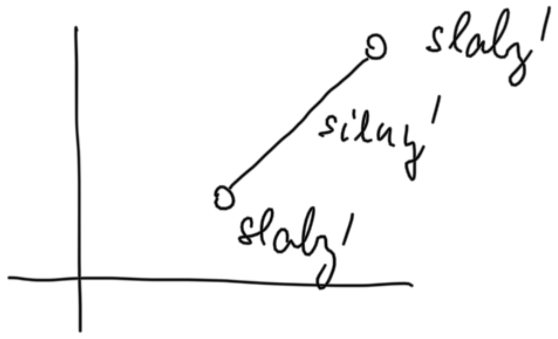
$$\left. + \| t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(s)\, ds \|_{L^r(0,\infty)} \right)$$

$$\overset{\text{substituce}}{=} K\,|m|^{-\frac{1}{r}} \left(\| y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}-\frac{1}{r}} \int_0^{y} s^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(s)\, ds \|_r + \right.$$

$$\left. + \| y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{r}} \int_y^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(s)\, ds \|_r \right)$$

$$\overset{\text{(Hardyova nerovnost)}}{\leq} K\,|m|^{-1/r} \left(\frac{p p_0}{p-p_0} \|f\|_{p,r} + \frac{p p_1}{p-p_1} \|f\|_{p,r} \right).$$

Tedy T je silného typu (p,q). $\square$



<u>Příklady</u> (i) $Af(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds$,

nebo $Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy$,

$A: \mathfrak{M}_+(0,\infty) \to \mathfrak{M}_+(0,\infty)$,

$M: L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{M}_+(\mathbb{R}^n)$,

potom A, M jsou slabých typů $(1,1)$ a (∞,∞),

a tedy, dle Marc. ner., silného typu (p,p)

pro $p \in (1,\infty)$ $\big(p \in (1,\infty]\big)$.

(ii) $I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy$, $\gamma \in (0,n)$,

(Rieszův potenciál),

I_γ je slabých typů $\left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right)$ a $\left(\frac{n}{\gamma}, \infty\right)$.

Tedy dle Marcinkiewiczovy věty

$I_\gamma : L^{p,r} \to L^{q,r}$, kde $r \in [1,\infty]$ a

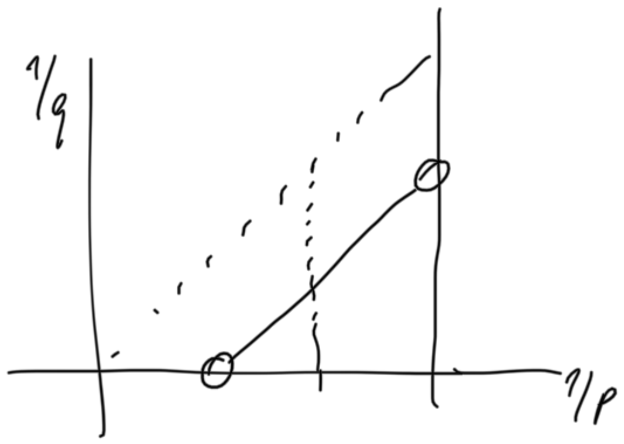
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta \cdot \gamma}{n}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{n}(n-\gamma) + \frac{\theta}{\infty},$$

tedy $\frac{1}{p} = 1 - \theta\left(\frac{\gamma}{n} - 1\right)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{n} - \theta\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)$,

dosadíme $\theta\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right) = 1 - \frac{1}{p}$, takže pro dané

$p \in \left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right)$ dopočítáme q podle vzorce

$$\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{p}}$$



Z Marcinkiewiczovy věty víme, že

$$I_\gamma : L^{p,r} \to L^{q,r} \text{ pro } p \in \left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n} - 1.$$

Speciálně, pro $r = p$,

$$I_\gamma : L^{p,p} = L^p \longrightarrow L^{q,p}.$$

Povšimneme si, že $q > p$, neboť $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$,

a tedy $L^{q,p} \hookrightarrow L^{q,q} = L^q$, a tedy dostáváme silný odhad (I_γ je silného typu (p,q)).

V předchozím případě tento problém nenastal, neboť A, M se posunují po diagonále, tedy

$$A, M : L^{p,r} \to L^{p,r}, \text{ takže pro silný typ}$$

stačí volit $r = p$.

(iii) Laplaceova transformace

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(s)\,ds, \quad t \in (0,\infty),$$
$$f \in \mathcal{M}_+(0,\infty)$$

je slabých typů $(1,\infty)$ a $(\infty,1)$, tj.

$$\mathcal{L} : L^1 \to L^\infty, \quad \mathcal{L} : L^\infty \to L^{1,\infty}$$

(zde je třeba rozšířit Marcinkiewiczovu větu na případ $p_1 = \infty$ (což lze)), dostaneme

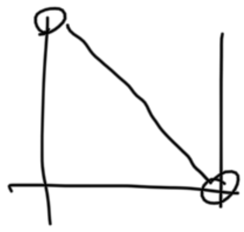
$$\mathcal{L} : L^{p,r} \to L^{q,r}, \text{ kde}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{\infty}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{1},$$

tedy $\frac{1}{p} = 1-\theta$, $\frac{1}{q} = \theta = 1 - \frac{1}{p}$, takže $q = p'$!

Dostáváme $\mathcal{L} : L^{p,r} \to L^{p',r}$ $\forall r \in [1,\infty]$
$\forall p \in (1,\infty)$.

Je $\mathcal{L}$ silného typu (p,p')? (pozor, $m = -1$)



NE VŽDY (!)

Máme $\mathcal{L}: L^{p,r} \to L^{p',r}$ $\forall r \in [1,\infty]$,

položme $r=p$, dostaneme

$$\mathcal{L}: L^{p,p} = L^{p} \to L^{p',p},$$

plyne odtud, že $\mathcal{L}$ je silného typu (p,p') ?

ANO, pokud $p \le 2$ (pak $p \le p'$ atd.)

NE, pokud $p > 2$.

Poznámka. Věta 17 platí pro $p_1 = \infty$ (s odpovídajícími úpravami). Neplatí však bez předpokladu $q_0 \neq q_1$.

Jednoduchý protipříklad: položme

$$Tf(t) = \frac{\alpha(f)}{\sqrt{t}},$$

kde $f \in L^1(0,1)$, $\alpha \in [L^1(0,1)]^*$, netriviální.

Potom

$$\|Tf\|_{2,\infty} = \|t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\infty}}(Tf)^*(t)\|_\infty$$

$$= |\alpha(f)| \cdot \|t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\|_{L^\infty} = |\alpha(f)|$$

$$\le \|\alpha\| \cdot \|f\|_{L^1(0,1)},$$

takže $T: L^1 \to L^{2,\infty}$. Z možení

$L^\infty(0,1) \hookrightarrow L^1(0,1)$ dostaneme (tím spíše)

$$T : L^\infty \to L^{2,\infty}, \text{ tedy}$$

$$\left.\begin{aligned} T &: L^1 \to L^{2,\infty} \\ T &: L^\infty \to L^{2,\infty} \end{aligned}\right\} \overset{\theta = \frac{1}{2}}{\Longrightarrow} \quad T : L^{2,2} \to L^{2,2},$$

(kdyby Marc. věta platila pro $q_0 = q_1 = 2$)

tedy $T : L^2 \to L^2$. To ale neplatí, neboť například pro $f = \chi_{(0,1)}$ máme

$$\|f\|_{L^2(0,1)} = 1,\quad \text{ale}$$

$$\|Tf\|_2 = \left\| \frac{\alpha(f)}{\sqrt{t}} \right\|_2 = |\alpha(f)| \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\infty}.$$

Tedy $T : L^2 \not\to L^2$.

<u>POZNÁMKA.</u> Marcinkiewiczova věta se v uvedeném tvaru nedá použít například na tzv. singulární integrální operátory, jejichž pilotním příkladem je Hilbertova transformace H, definovaná předpisem

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{f(y)}{x-y}\, dy,$$

pro $x \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{D}(H)$. Tyto operátory typicky splňují $H : L^1 \to L^{1,\infty}$ (slabý typ

$(1,1)$), ale nejsou slabého typu (∞,∞), přestože obvykle splňují $T: L^p \to L^p$ pro každé $p \in (1,\infty)$. Vzniká otázka, zda se dá chybějící slabý typ něčím nahradit. Těmito otázkami se budeme napříště zabývat.

2.6. SINGULÁRNÍ INTEGRÁLNÍ OPERÁTORY

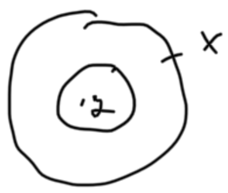
<u>DEFINICE</u> (SIO). Nechť $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ je měřitelná, $n \in \mathbb{N}$, a jsou splněny podmínky:

(a) $$|K(x)| \le \frac{C}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{(decay)}$$

(b) $$\int_{\alpha < |x| < \beta} K(x)\,dx = 0 \quad \forall\, 0 < \alpha < \beta, \qquad \text{(cancellation)}$$

(c) $$|K(x-y) - K(x)| \le C \frac{|y|}{|x|^{n+1}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ |y| \le \frac{|x|}{2}.$$

(smoothness)



Pro $\varepsilon \in (0, \infty)$ definujeme

$$T_\varepsilon f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{R \to \infty} \displaystyle\int_{\varepsilon < |x-y| < R} f(y) K(x-y)\,dy, & \text{pokud lim existuje} \\ \infty, & \text{pokud lim neexistuje,} \end{cases}$$

$$\mathcal{K} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} T_\varepsilon f(x),$$

$$T f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} T_\varepsilon f(x).$$

Potom T nazveme <u>singulárním integrálním operátorem (SIO)</u>.

<u>Příklad</u>. $n = 1$, $K(x) = \frac{1}{\pi x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

... <u>Hilbertova transformace H</u>

$$Hf(x) = \text{p.v.}\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ověření (c) ((a),(b) triviální):

$$|K(x-y) - K(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{x-x+y}{x(x-y)}\right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{|y|}{|x|\cdot|x-y|} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2|y|}{|x|^2}. \quad \checkmark$$

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Další příklady: Rieszova transformace, C-Z operátory atd...

Cíl: „interpolace" SIO

K tomu: nutno vybudovat technické zázemí

- Whitneyovo lemma o pokrytí
- Calderónova–Zygmundova dekompozice
- bodové odhady $(Tf)^*$
- good-λ-nerovnost

Lemma (Whitneyovo o pokrytí). Nechť F je uzavřená neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^n$. Označme $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$. Potom existuje posloupnost krychlí $\{Q_k\}$ se stěnami rovnoběžnými se souřadnými osami splňující

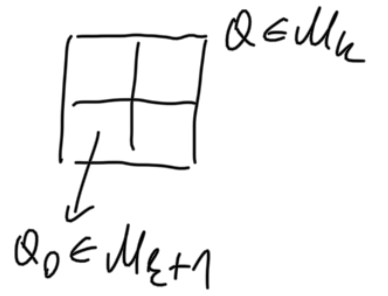
(a) $\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} Q_k$,

(b) $\mathring{Q}_j \cap \mathring{Q}_k = \emptyset \quad \forall j,k \in \mathbb{Z},\ j \neq k$,

(c) pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\operatorname{diam} Q_k \leq \operatorname{dist}(Q,F) \leq 4 \operatorname{diam} Q_k .$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{M}_0$ je celočíselná mříž v $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{M}_k = 2^{-k}\mathcal{M}_0$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. každá krychle v $\mathcal{M}_k$ se dělí na 2^n krychlí v $\mathcal{M}_{k+1}$, přičemž $Q \in \mathcal{M}_k \iff$ délka hrany $Q = 2^{-k}$ (a tedy $\operatorname{diam} Q = \sqrt{n}\, 2^{-k}$)

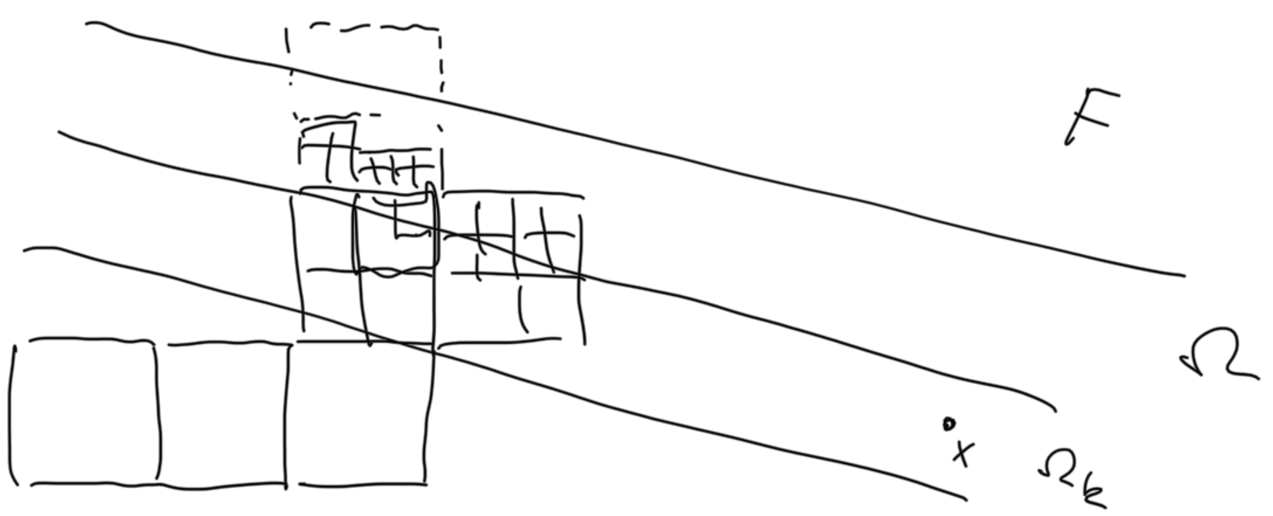


Definujeme „vrstvy" množiny Ω předpisem

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : c\,2^{-k} < \operatorname{dist}(x,F) \leq c\,2^{-k+1}\},$$

kde $c > 0$ je konstanta, kterou určíme později. Potom $\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$. Položme

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{Q \in \mathcal{M}_k : Q \cap \Omega_k \neq \emptyset\}.$$



Nechť $Q \in \mathcal{M}_k \cap \mathcal{F}$. Potom jednak $\operatorname{diam} Q = \sqrt{n}\, 2^{-k}$ a jednak $\exists x \in Q \cap \Omega_k$. Tedy

$$\operatorname{dist}(Q,F) \le \operatorname{dist}(x,F) \le c\,2^{-k+1}$$

a zároveň

$$\operatorname{dist}(Q,F) \ge \operatorname{dist}(x,F) - \operatorname{diam} Q > c\,2^{-k} - \sqrt{n}\,2^{-k}.$$

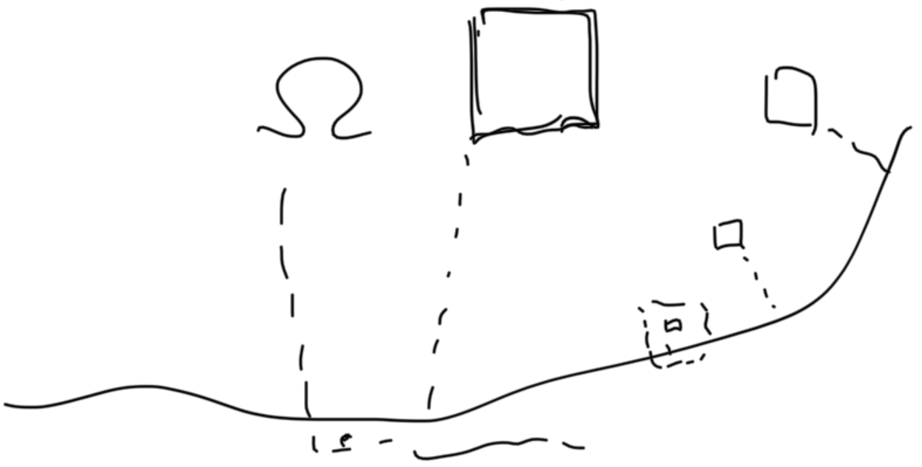
Položme $c = 2\sqrt{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n}\,2^{-k} \le \operatorname{dist}(Q,F) \le 4\sqrt{n}\,2^{-k},$$

tedy

$$\operatorname{diam} Q \le \operatorname{dist}(Q,F) \le 4 \operatorname{diam} Q.$$

Tedy $\mathcal{F}$ splňuje (a) a (c), nesplňuje však nutně (b). Jestliže $Q, \tilde{Q} \in \mathcal{F}$, $Q \ne \tilde{Q}$, $Q^0 \cap \tilde{Q}^0 \ne \emptyset$, pak jsou nutně v inkluzi. Stačí z $\mathcal{F}$ vyhodit ty menší! Zůstanou pouze maximální krychle. Pak je splněno i (b). $\square$



<u>Poznámka</u>. Základní vlastnost Whitneyovy krychle: existuje universální konstanta (např. 5) splňující

$$5Q \cap F \ne \emptyset,$$

kde $5Q$ je krychle se stejným středem jako Q a s $5\times$ delší hranou.

<u>Věta 18</u> (Calderónova-Zygmundova dekomposice).

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a $\alpha \in (0,\infty)$. Potom existují funkce g, b takové, že $f = g + b$, $b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k$ a existuje posloupnost krychlí $\{Q_k\}$ tak, že platí

(a) $|g(x)| \leq \alpha$ skoro všude na F, kde $F = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k$,

(b) $\operatorname{supp} b_k \subset Q_k$, $k \in \mathbb{Z}$,

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} |b_k|\, dx \leq C \alpha |Q_k|$, $k \in \mathbb{Z}$,

(d) $\int_{\mathbb{R}^n} b_k(x)\, dx = 0$, $k \in \mathbb{Z}$,

(e) $\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(x)|\, dx \leq C\alpha$ $\quad (\exists C\ \forall k \in \mathbb{Z})$,

(f) $\sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

(zde i níže C označuje konstantu závislou pouze na n, jejíž hodnota se může průběžně měnit).

<u>Důkaz.</u> Označme $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Mf(x) > \alpha\}$. Potom Ω je otevřená, neboť Mf je zdola polospojitá. Navíc $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, neboť $f \in L^1$, neboť $|\Omega| \leq C \frac{\|f\|_1}{\alpha}$ díky tomu, že M je slabého typu $(1,1)$. Nechť $\{Q_k\}$ je whitneyovské pokrytí Ω. Položme $g = f\chi_F + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f \right) \chi_{Q_k}$.

Potom $f = g + b = g + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k$, kde

$$b_k = \chi_{Q_k}\left(f(x) - \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(y)\,dy\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potom pro s.v. $x \in F$ platí: $|f(x)| \le Mf(x) \le \alpha$. Tedy $|g| \le \alpha$ skoro všude na F. Tedy platí (a). Navíc

$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|\,dx \le \frac{5^n}{|5Q_k|}\int_{5Q_k} |f(x)|\,dx.$$

Povšimněme si, že: $5Q_k \cap F \ne \emptyset$, tedy $\exists\, x_k \in 5Q_k \cap F$, tedy $Mf(x_k) \le \alpha$, tedy

$$\sup_{Q \ni x_k} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \le \alpha, \quad \text{tedy (neboť } x_k \in 5Q_k)$$

$$\frac{1}{|5Q_k|}\int_{5Q_k} |f(x)|\,dx \le \alpha.$$

Tedy $\forall k \in \mathbb{Z}$ máme

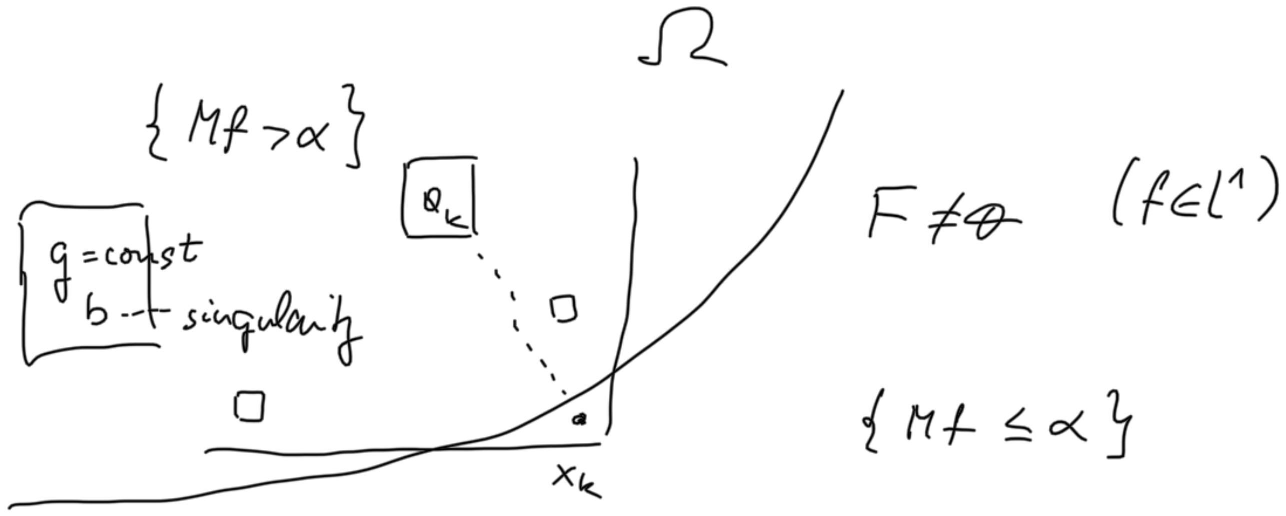
$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|\,dx \le 5^n \alpha, \quad \text{odtud plyne (e)}$$

Vlastnosti (b) a (d) platí díky definici b. Dále

$$\int_{\mathbb{R}^n} |b_k(x)|\,dx \le 2\int_{Q_k} |f(x)|\,dx \overset{(e)}{\le} 2 \cdot 5^n \alpha\, |Q_k|, \quad k \in \mathbb{Z},$$

což dokazuje (c). Zbývá (f). Díky tomu, že M je slabého typu (1,1), dostáváme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k| = |\Omega| = |\{Mf > \alpha\}| \overset{(1,1)}{\le} \frac{c}{\alpha}\|f\|_1. \qquad \square$$



$$|g| \leq \alpha$$

Věta 19 (slabý typ (1,1) jistého typu operátorů).

Nechť K je měřitelná funkce a T je operátor definovaný alespoň na $L^2(\mathbb{R}^n)$ a representovatelný předpisem

$$Tf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\, f(y)\, dy .$$

Předpokládejme, že platí:

(a) $\exists C>0\ \forall f \in L^1 \cap L^2: \quad \|Tf\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$,

(b) $\exists A>0\ \forall y \in \mathbb{R}^n\ \forall \delta>0\ \forall \bar{y} \in Q(y,\delta)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q(y,3\delta)} |K(x-y) - K(x-\bar{y})|\, dx \leq A .$$

Potom T je slabého typu (1,1) (tj. $\forall f \in L^1 \cap L^2$ platí $\sup_\alpha \alpha |\{Tf > \alpha\}| \leq c \|f\|_1$.

Poznámka. Hilbertova transformace splňuje předpoklady Věty 19.

<u>Důkaz Poznámky:</u> $n=1$, $K(x)=\frac{1}{\pi x}$, tedy

$$\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq 3\delta}\left|\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-\bar{y}}\right|dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq 3\delta}\frac{|y-\bar{y}|}{|x-y|\cdot|x-\bar{y}|}dx$$

$$=\frac{|y-\bar{y}|}{\pi}\int_{|x-y|\geq 3\delta}\frac{dx}{|x-y|\cdot|x-\bar{y}|}\overset{(*)}{\leq} c\,|y-\bar{y}|\int_{|x-y|\geq 3\delta}\frac{dx}{|x-y|^2}$$

$\leq c\cdot|y-\bar{y}|\cdot\frac{1}{\delta}\leq C$, kde $(*)$ plyne z toho, že

$|x-\bar{y}|\geq|x-y|-|y-\bar{y}|\geq 3\delta-\delta=2\delta$, taky

$$|x-y|\leq|x-\bar{y}|+|\bar{y}-y|\leq|x-\bar{y}|+\delta=|x-\bar{y}|+\tfrac{1}{2}\cdot 2\delta$$

$$\leq|x-\bar{y}|+\tfrac{1}{2}|x-\bar{y}|=\tfrac{3}{2}|x-\bar{y}|. \qquad \square$$

Přednáška 12 $\qquad 20 \frac{16}{XII} 20$

Důkaz (Věty 19) Nechť $f \in L^1 \cap L^2$ a $\alpha > 0$.

Chceme:
$$|\{x \in \mathbb{R} : |Tf(x)| > \alpha\}| \leq C \frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

Díky CZ-dekomposici píšeme $f = g + b$, přičemž jsou splněna tvrzení (a)–(f) z Věty 18.

Pro g platí:
$$|\{|Tg| > \alpha\}| \overset{\text{Čebyšev}}{\leq} \frac{\|Tg\|_2^2}{\alpha^2} \overset{(a)}{\leq} C \frac{\|g\|_2^2}{\alpha^2}$$

(připomeňme: C se může měnit)

$$= \frac{C}{\alpha^2} \left(\int_F |g|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{Q_k} \left(|f|_{Q_k} \right)^2 dx \right),$$

kde značíme $\quad f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\, dy$.

Tedy $\quad (g = f$ na F & $|g| \leq \alpha$ na $F)$
$$|\{|Tg| > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha^2} \left(\int_F \alpha |f| + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k| \cdot \left(|f|_{Q_k} \right)^2 \right)$$
$$= \frac{C}{\alpha} \int_F |f| + \frac{C}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|Q_k|} \left(\int_{Q_k} |f| \right)^2$$
$$\overset{(e)\text{-CZ}}{\leq} \frac{C}{\alpha} \int_F |f| + \frac{C}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|Q_k|} (C\alpha)^2 \cdot |Q_k|^2$$

$$= \frac{c}{\alpha}\int_F |f| + c\sum_{k\in\mathbb{Z}} |Q_k|$$

$$\overset{(f)-cz}{\leq} \frac{c}{\alpha}\int_F |f| + \frac{c}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f|,$$

takže $\quad |\{|Tg|>\alpha\}| \leq C\,\frac{\|f\|_1}{\alpha}.$

Zbývá Tb. Pro $k\in\mathbb{Z}$ označme

y_k ... střed krychle Q_k. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\,b_k(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \big(K(x-y)-K(x-y_k)\big)\,b_k(y)\,dy,$$

neboť podle (cz)-(d) platí $\int_{\mathbb{R}^n} b_k = 0$.

Chceme $\quad |\{|Tb|>\alpha\}| \leq C\,\frac{\|f\|_1}{\alpha}.$

Máme

$$\{|Tb|>\alpha\} = \{x\in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} 3Q_k : |Tb(x)|>\alpha\}$$

$$\cup\ \{x\in \mathbb{R}^n\setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} 3Q_k : |Tb(x)|>\alpha\}$$

$$\subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} 3Q_k \cup \{x\in\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} 3Q_k : |Tb(x)|>\alpha\}.$$

Platí

$$\Big|\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} 3Q_k\Big| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |3Q_k| \leq c\sum_{k\in\mathbb{Z}}|Q_k| \overset{(f)-cz}{\leq} C\,\frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

Dále

$$\alpha \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} 3Q_\ell : |Tb(x)| > \alpha\right\}\right| \leq (\check{\text{C}}\text{ebyšev})$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_k} |Tb_k(x)|\,dx$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_k} \left|\int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\, b_k(y)\,dy\right| dx$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_k} \left|\int_{\mathbb{R}^n} (K(x-y) - K(x-y_k))\, b_k(y)\,dy\right| dx$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |b_k(y)| \int_{\mathbb{R}^n \setminus 3Q_k} |K(x-y) - K(x-y_k)|\,dx\,dy$$

$$\overset{(b)}{\leq} C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |b_k(y)|\,dy$$

$$\overset{(c)-CZ}{\leq} C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha |Q_k| \overset{(f)-CZ}{\leq} \frac{C}{\alpha}\alpha \|f\|_1,$$

takže

$$\alpha \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\ell\in\mathbb{Z}} 3Q_\ell : |Tb(x)| > \alpha\right\}\right| \leq c\,\|f\|_1 .$$

Celkem

$$\alpha\,|\{|Tf|>\alpha\}| \le \alpha\,|\{|Tb|+|Tg|>\alpha\}|$$

$$\le \dots \le \|f\|_1. \qquad \square$$

Poznámka. Nechť T je SIO. Potom T splňuje předpoklady Věty 19.

Ověřme (b): Víme, že $\bar y \in Q(y,\delta)$ a

$x \in \mathbb{R}^n \setminus Q(y,3\delta)$, takže

$|y-\bar y| \le c\delta$ a $(c=\sqrt{n})$

$$|x-\bar y| \ge |x-y|-|y-\bar y| \ge 3c\delta - c\delta = 2c\delta \ge 2\delta$$

takže $|y-\bar y| \le \dfrac{|x-\bar y|}{2}$.

Tedy dle axiomu (c) pro SIO platí

$\forall \bar y \in Q(y,\delta)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus Q(y,3\delta)$:

$$|K(x-y)-K(x-\bar y)| \le C\,\frac{|y-\bar y|}{|x-\bar y|^{n+1}}.$$

Odtud a z nerovnosti

$$|x-y| \le |x-\bar y| + |\bar y - y| \le |x-\bar y| + c\delta \le |x-\bar y|\cdot C \qquad \left(C=\tfrac{3}{2}\right)$$

plyne:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q(y,3\delta)} |K(x-y)-K(x-\bar y)|\,dx$$

$$\le C\,|y-\bar{y}| \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q(y,3\delta)} \frac{dx}{|x-\bar{y}|^{n+1}}$$

$$\le C\,|y-\bar{y}| \int_{\mathbb{R}^n\setminus Q(y,3\delta)} \frac{dx}{|x-y|^{n+1}}$$

$$\le C\,|y-\bar{y}| \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(y,3\delta)} \frac{dx}{|x-y|^{n+1}}$$

$$\le C\delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}}\, r^{n-1}\, dr$$

$$= C\delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = C.$$

Tedy axiom (b) pro SIO je splněn.

<u>Otázka: platí (a)</u>? Tj. $T: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

To je známé tvrzení z harmonické analýzy.

Postup: K ... C-Z jádro (jádro SIO)

sestrojí se temperovaná distribuce

$$\langle \mathcal{K},\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y)\varphi(y)\,dy,$$

$$K_\varepsilon = K \chi_{\{|x| \geq \varepsilon\}}$$

dokáže se, že $\|\hat{K}\|_\infty < \infty$.

Potom

$$\|Tf\|_2 \overset{\text{Planch.}}{=} \|\widehat{Tf}\|_2 = \|\hat{K} \cdot \hat{f}\|_2 \leq \|\hat{K}\|_\infty \cdot \|\hat{f}\|_2 \overset{\text{Planch. 2}}{=} \|\hat{K}\|_\infty \cdot \|f\|_2 .$$

<u>Důsledek</u>. Nechť T je SIO. Potom $T: L^1 \to L^{1,\infty}$ (tedy T je slabého typu $(1,1)$).

<u>OTÁZKA</u>: Jak nahradit chybějící odhad na „opačném konci" ?

<u>různé přístupy</u>:

<u>1. přístup</u>:
$$\left.\begin{array}{l} L^2 \to L^2 \\ L^1 \to L^{1,\infty} \end{array}\right\} \overset{\text{Marcinkie}}{\Rightarrow} T: L^p \to L^p, \quad p \in (1,2),$$

z „adjungovanosti" dokážeme
$$T: L^p \to L^p, \quad p \in (2,\infty)$$

<u>2. přístup</u>: T lze rozšířit na operátor splňující $T: L^\infty \to BMO$, a lze interpolovat mezi $L^{1,\infty}$ a BMO

<u>3. přístup</u>: obdobně, ale místo $T: L^\infty \to BMO$ lze dokázat $T: L^\infty \to \text{weak } L^\infty$, kde
$$\|f\|_{\text{weak } L^\infty} = \sup_{t \in (0,\infty)} \left(f^{**}(t) - f^*(t) \right)$$

<u>Co provedeme my?</u> Naučíme se techniky zahrnující:

- good-λ-inequality (přerovnaná verse),
- operátory <u>sdruženého slabého typu</u>,
- Calderónův operátor.

<u>Věta 20</u> (good-λ-odhad pro SIO). Nechť T je SIO. Potom

$$(Tf)^*(t) \leq C \cdot (Mf)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + (Tf)^*(2t)$$

pro nějaké $C>0$ a každé $t\in(0,\infty)$ a každou $f\in\mathcal{D}(T)$, kde M je Hardyův–Littlewoodův maximální operátor.

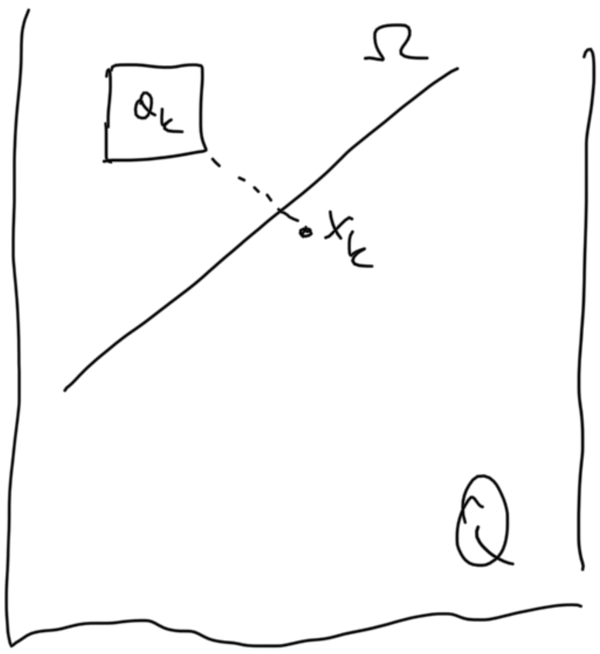
<u>Důkaz.</u> Nechť $t\in(0,\infty)$ a nechť $f\in\mathcal{D}(T)$. Označme

$$E_t = \{x\in\mathbb{R}^n : |Tf(x)| > (Tf)^*(2t)\}.$$

Potom $|E_t|\leq 2t$. Díky regularitě míry nalezneme $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ otevřenou a splňující: $E_t\subset\Omega$ a $|\Omega|\leq 3t$. Nechť $\{Q_k\}$ jsou Whitneyovy krychle odpovídající Ω. Dokážeme klíčové tvrzení: $\forall\delta\in(0,\infty)\ \exists C>0\ \forall k\in\mathbb{N}$:

$$(*)\quad \left|\{x\in Q_k : |Tf(x)| > C\cdot Mf(x) + (Tf)^*(2t)\}\right| \leq \delta\,|Q_k|.$$

Nechť $k\in\mathbb{Z}$. Nalezneme $x_k\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ splňující



$\operatorname{dist}(x_k, Q_k) \leq 4 \operatorname{diam} Q_k$.

Označme

$$Q = Q(x_k, 20 r_k),$$

kde r_k je délka strany Q_k.

Bude užitečné si uvědomit, že existuje konstanta B závislá jen na dimensi n a taková, že

$$\frac{|Q|}{|Q_k|} \leq B \quad (\text{pro každé } k \in \mathbb{Z}).$$

Položme $\quad f = g + h, \quad$ kde

$$g = f \chi_Q \quad \text{a} \quad h = f \chi_{\mathbb{R}^n \setminus Q}.$$

Potom pro každé $x \in Q_k$ platí (neboť $Q_k \subset Q$)

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, dy = \frac{\|g\|_1}{|Q|}.$$

Tedy pro (zatím neurčené) $C_2 > 0$ platí

$$|\{x \in Q_k : |Tg(x)| > C_2 Mf(x)\}|$$

$$\leq |\{x \in Q_k : |Tg(x)| > \frac{C_2}{|Q|} \|g\|_1\}|$$

$$\overset{T \text{ sl. typu } (1,1)}{\leq} \frac{A}{C_2} \cdot \frac{|Q|}{C_2 \|g\|_1} \cdot \|g\|_1 = \frac{A}{C_2} |Q|,$$

kde $A = \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}}$.

Přednáška 13 $\qquad$ 20 XII 2022

Pokračování důkazu Věty 20

připomínáme: snažíme se dokázat klíčové tvrzení

$$(*)\begin{cases} \forall \delta\in(0,\infty)\ \exists C>0\ \forall k\in\mathbb{Z} \\ |\{x\in Q_k : Tf(x) > C\,Mf(x) + (Tf)^*(2t)\}| \le \delta\,|Q_k|. \end{cases}$$

zatím víme (pro $f = g+h = f\chi_Q + h\chi_{\mathbb{R}^n\setminus Q}$)

$$|\{x\in Q_k : Tg(x) > C_2\,Mf(x)\}| \le \frac{A}{C_2}|Q|,$$

kde $A = \|T\|_{L^1\to L^{1,\infty}}$.

Položme $C_2 = 6AB$, potom

$$\frac{A|Q|}{C_2} = \frac{A|Q|}{6AB} = \frac{|Q|}{6B} \le \frac{|Q_k|}{6}, \text{ neboť } \frac{|Q|}{|Q_k|}\le B.$$

Tedy pro tuto konstantu C_2 a pro každé $k\in\mathbb{Z}$ platí

$$|\{x\in Q_k : Tg(x) > C_2\,Mf(x)\}| \le \frac{|Q_k|}{6}$$

(C_2 nezáleží na k).

Nyní tvrdíme, že

$$(**)\begin{cases} \exists C_1>0\ \forall\varepsilon\in(0,\infty)\ \forall k\in\mathbb{Z}\ \forall x\in Q_k \text{ platí} \\ |T_\varepsilon h(x)| \le C_1\,Mf(x) + Tf(x_k) \end{cases}$$

Nechť $k\in\mathbb{Z}$, $\varepsilon\in(0,\infty)$ a $x\in Q_k$. Položme

$$r = \max\{\varepsilon;\ \operatorname{dist}(x_k, \mathbb{R}^n\setminus Q)\}.$$

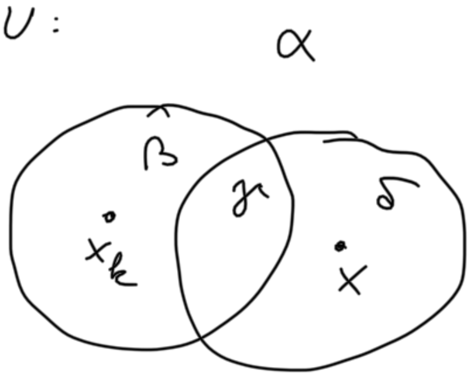
Potom $r > 10\cdot\operatorname{diam} Q_k$. Označme

$$\Delta = B(x_k,\varepsilon) \div B(x,\varepsilon)$$

Potom

$$|T_\varepsilon h(x)| = \left|\int_{\{y:\,|x-y|>\varepsilon\}} K(x-y)\,h(y)\,dy\right|$$

SCHÉMA ODHADU:



$$\left|\int_{\{|x-y|>\varepsilon\}} \dots\right| = \left|\int_{\{|x-y|>\varepsilon\}} \dots - \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} \dots + \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon} \dots\right|$$

$$\le \left|\int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} \dots\right| + \left|\int_\alpha \dots + \int_\beta \dots - \int_\alpha \dots - \int_\delta \dots\right|$$

$$\le \left|\int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} \dots\right| + \left|\int_\beta \dots\right| + \left|\int_\delta \dots\right|.$$

Přesněji:

$$|T_\varepsilon h(x)| \le \left|\int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} K(x-y)\,h(y)\,dy\right| + \int_\Delta |K(x-y)|\cdot|h(y)|\,dy$$

$$= \quad I_1 \quad + \quad I_2 .$$

Odhad I_2: protože $\Delta \subset B(x,3r)$ a $\forall z\in\Delta\cap \operatorname{supp} h$ platí $|x-z| > \frac{r}{2}$. Tedy dle (a) pro SIO máme

$$I_2 \leq c \int_{\Delta} \frac{|h(y)|}{|x-y|^n}\,dy \leq \frac{c\,2^n}{r^n} \int_{\Delta} |h(y)|\,dy$$

$$\leq \frac{c\,2^n}{r^n} \int_{B(x,3r)} |h(y)|\,dy$$

$$\leq C_3 \; Mh(x) \leq C_3 \; Mf(x)$$

pro nějaké vhodné C_3.

Odhad I_1: Platí

$$I_1 = \left| \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} K(x-y)\,h(y)\,dy \right|$$

$$\leq \left| \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} K(x_k-y)\,h(y)\,dy \right| +$$

$$+ \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} |K(x_k-y)-K(x-y)| \cdot |f(y)|\,dy .$$

První sčítanec je $|T_\varepsilon f(x_k)|$. Pro druhý sčítanec dostaneme díky vlastnosti (c) z definice SIO (přičemž značíme $\varepsilon = \operatorname{diam} Q_k$):

$$\int_{\{|x_k-y|>r\}} |K(x_k-y)-K(x-y)| \cdot |f(y)|\,dy \leq$$

$$\overset{(c)}{\leq} C \int_{\{|x-y|>\operatorname{diam} Q_k\}} |f(y)| \cdot \frac{\varepsilon}{|x-y|^{n+1}}\,dy$$

$$= C\varepsilon \int_{\{|x-y|>\varepsilon\}} |f(y)| \frac{dy}{|x-y|^{n+1}}$$

$$= C\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\{2^j\varepsilon < |x-y| \le 2^{j+1}\varepsilon\}} |f(y)| \cdot \frac{dy}{|x-y|^{n+1}}$$

$$\le C\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j\varepsilon)^{n+1}} \int_{B(x,2^{j+1}\varepsilon)} |f(y)|\, dy$$

$$= C\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^{j+1}\varepsilon)^n}{(2^j\varepsilon)^{n+1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2^{j+1}\varepsilon)^n} \int_{B(x,2^{j+1}\varepsilon)} |f(y)|\, dy}_{\le Mf(x)}$$

$$\le C\varepsilon\, Mf(x) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2^{(j+1)n - j(n+1)}$$

$$= C \cdot 2^n \cdot Mf(x) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$$

$$= 2^{n+1} C\, Mf(x).$$

Celkem

$$|T_\varepsilon h(x)| \le |Tf(x_\varepsilon)| + (C_3 + 2^{n+1} C)\, Mf(x),$$

což je (**) s $C_1 = C_3 + 2^{n+1} C$.

Kombinací odhadů dostáváme

$$|\{x \in Q_k : Tf(x) > C\,Mf(x) + (Tf)^*(2t)\}|$$

$$\le \left|\{x \in Q_k : |Tg(x)| > C_2 Mf(x)\}\right|$$

$$+ \left|\{x \in Q_k : |Th(x)| > |Tf(x_k)| + C_1 Mf(x)\}\right|$$

$$\le \frac{|Q_k|}{6}.$$

Odtud:

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > c\, Mf(x) + (Tf)^*(2t)\}\right|$$

$$\le \frac{1}{6} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k| \le \frac{1}{6} |\Omega| \le \frac{3t}{6} = \frac{t}{2}.$$

Tedy konečně

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > c(Mf)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + (Tf)^*(2t)\}\right|$$

$$\le \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > c\, Mf(x) + (Tf)^*(2t)\}\right|$$

$$+ \left|\{x \in \mathbb{R}^n : c\, Mf(x) > c(Mf)^*\left(\tfrac{t}{2}\right)\}\right|$$

$$\le \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t,$$

takže tvrzení plyne z definice nerostoucího přerovnání:

$$(Tf)^*(t) = \inf\{s : |\{|Tf| > s\}| \le t\},$$

a my víme, že $s = c(Mf)^*\left(\frac{t}{2}\right) + (Tf)^*(2t)$ je kandidát pro inf. $\square$

<u>Důsledek</u>. Nechť f splňuje $\lim_{t \to \infty} (Tf)^*(t) = 0$.

Potom

$$(Tf)^*(t) \le c\,(Mf)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + c\int_t^\infty (Mf)^*(s)\,\frac{ds}{s}.$$

<u>Důkaz.</u> Iterací Věty 20 dostaneme

$$(Tf)^*(t) \le c\sum_{k=0}^{\infty} (Mf)^*(2^{k-1}t) + \underbrace{\lim_{t\to\infty}(Tf)^*(t)}_{=0}$$

$$= c(Mf)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} c\int_{\{2^{k-2}t\le s\le 2^{k-1}t\}} (Mf)^*(s)\,\frac{ds}{s}$$

$$\le c(Mf)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + c\int_t^\infty (Mf)^*(s)\,\frac{ds}{s}. \qquad \square$$

Co víme o M? Například víme

$$M: L^1 \to L^{1,\infty}$$

$$\& \quad M: L^\infty \to L^\infty.$$

<u>Věta 21</u> (bodový odhad pro maximální operátor).
Nechť $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $t\in(0,\infty)$. Potom

$$(Mf)^*(t) \le c\, f^{**}(t).$$

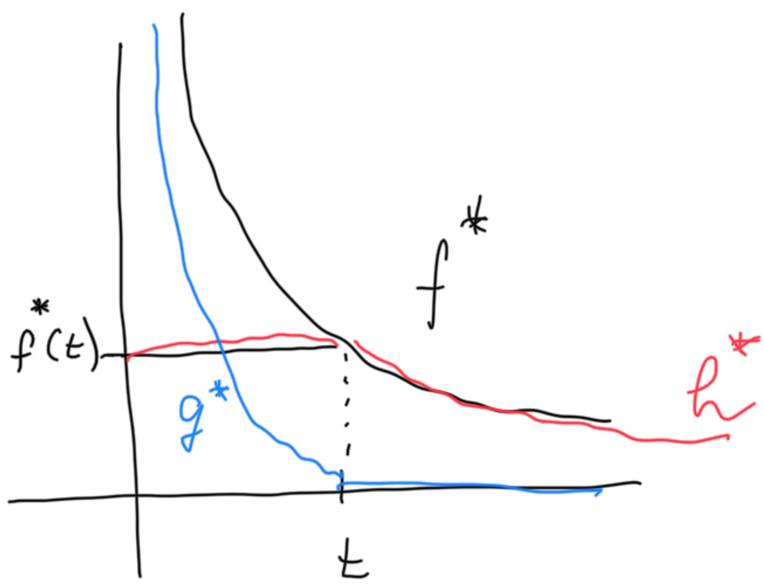
<u>Důkaz.</u> Jest

$$t\cdot(Mf)^*(t) \le \;?$$

pro jakýkoli rozklad

$$f = g+h$$

dostaneme:



$$
\begin{aligned}
t(Mf)^*(t) &= t\left(M(g+h)\right)^*(t) \\
&\le t\,(Mg+Mh)^*(t) \\
&\le t(Mg)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + t(Mh)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) \\
&\le \sup_{s\in(0,\infty)} s(Mg)^*\left(\tfrac{s}{2}\right) + t(Mh)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) \\
&\le 2\|Mg\|_{1,\infty} + t\,\|Mh\|_\infty \\
&\le 2c\,\|g\|_1 + t\,\|h\|_\infty .
\end{aligned}
$$

Hledáme optimální rozklad $f=g+h$ (obrázek).

Položme

$$h = |f|\cdot \operatorname{sign} f \cdot \chi_{\{|f|\le f^*(t)\}},$$

$$g = \left(|f| - f^*(t)\right)_+ \operatorname{sign} f,$$

potom $f=g+h$ a

$$g^*(s) = \chi_{(0,t)}(s)\, f^*(s), \qquad h^*(s) = \min\{f^*(s), f^*(t)\}.$$

Tedy $\|h\|_\infty = f^*(t)$,

$$\|g\|_1 = \int |g| = \int_0^\infty g^*(s)\,ds = \int_0^t f^*(s)\,ds.$$

Celkem

$$t\cdot (Mf)^*(t) \le 2c\int_0^t f^*(s)\,ds + t f^*(t),$$

to jest

$$(Mf)^*(t) \le 2c f^{**}(t) + f^*(t)$$

$$\le (2c+1) f^{**}(t). \qquad \square$$

<u>Důsledek</u>. Nechť T je SIO. Potom

$$(Tf)^*(t) \le c\left(f^{**}(t) + \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s}\,ds \right)$$

$\forall t \in (0,\infty)$ $\forall f \in \mathcal{D}(T)$.

<u>Důkaz</u>. plyne z Věty 21 a Důsledku Věty 20 za použití Fubiniovy věty a vhodné aproximace (detaily vynecháme). $\square$

<u>ZÁVĚR</u>.

$$(Mf)^*(t) \le c \cdot \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds,$$

$$(Tf)^*(t) \le c\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds + \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s}\,ds \right).$$

2.7. OPERÁTORY SDRUŽENÉHO TYPU A CALDERÓNŮV OPERÁTOR

víme: 1) nerovnosti:

$$(Mf)^*(t) \leq c\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right) \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \forall t \in (0,\infty),$$

$$(Tf)^*(t) \leq c\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds + \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s}\,ds\right)$$

$$\forall f \in \mathcal{D}(T) \quad \forall t \in (0,\infty),$$

2) aplikace těchto nerovností, např. pro L^p-omezenost operátorů:

pro $p \in (1,\infty]$:

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|(Mf)^*\|_{L^p(0,\infty)}$$

$$\leq c\left\|\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right\|_{L^p(0,\infty)}$$

$$\leq c'\|f^*\|_{L^p(0,\infty)} \quad \left(\begin{array}{l}\text{omezenost } A \\ \text{nebo Hardyova} \\ \text{nerovnost}\end{array}\right)$$

$$= c'\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

tedy $M: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in (1,\infty]$

a platí $\|Mf\|_{L^p} \leq c'\|f\|_{L^p} \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Podobně, je-li $p \in (1,\infty)$ a T je S/O, pak
$$T: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$$
a $\quad \|Tf\|_p \le c\,\|f\|_p \quad \forall f \in \mathcal{D}(T).$

Poznámky: 1) Mezi M a T je rozdíl: M je omezený na $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, T nikoli (obecně tam není ani definován).

2) Existují i spodní odhady, takže popis akce operátorů je „optimální" („přesný"), tj. v jistém smyslu jej nelze vylepšit:

pro M platí „bodový":
$$(Mf)^*(t) \ge c\,\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \quad \forall f\,\forall t,$$
pro H bodový dolní odhad neplatí, místo něj ale platí:

jestliže $(Sf)^*(1) < \infty$, kde $S = A + A'$,

tj. $Sg(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g(s)\,ds + \int_t^\infty \frac{g(s)}{s}\,ds$, potom existuje g splňující $g^* = f^*$ (jsou souměřitelné – equimeasurable) a taková, že
$$S(f^*) \le 2\pi\,(Hg)^* \quad \text{na } (0,\infty)$$
(konstrukce: $g = \begin{cases} 0, & x \ge 0 \\ f^*(-x), & x < 0 \end{cases}$)

IDEA: vybudujeme na základě těchto pozorování obecný interpolační princip, lepší než Marcinkiewiczova věta v tom smyslu, že bude zahrnovat i operátory typu H nebo SIO.

POSTUP (SCHÉMA METODY). Předpokládejme, že

- je dán operátor T, $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{M}_0(R,\mu)$, kde (R,μ) je σ-konečný prostor s mírou,
$$\mathcal{M}_0(R,\mu) = \{ f : R \to \mathbb{R} : f \ \mu\text{-měřitelná}, \ f \text{ je konečná } \mu\text{-a.e. na } R \},$$
- S je operátor splňující: $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{M}_0((0,\infty), dx)$, platí:
$$(Tf)^*(t) \leq c\, S(f^*)(t)$$
$$(\exists c > 0 \ \forall f \in \mathcal{D}(T) \ \forall t \in (0,\infty)),$$
- X, Y alespoň kvazinormované lineární prostory, $X \subset \mathcal{M}(R,\mu)$, $Y \subset \mathcal{M}(S,\nu)$, chceme dokázat, že $T : X \to Y$ ve smyslu, že
$$\exists C > 0 \ \forall f \in \mathcal{D}(T) : \ \|Tf\|_{Y(S,\nu)} \leq C \|f\|_{X(R,\mu)},$$
- (kvazi)normy $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ jsou „representovatelné" ve smyslu:
$$\|f\|_{X(R,\mu)} = \|f^*\|_{X(0,\infty)},$$
- Y má svazovou vlastnost („lattice property"), tj.:
$$0 \leq f \leq g \Rightarrow \|f\|_{Y(S,\nu)} \leq \|g\|_{Y(S,\nu)},$$

- $S : X(0,\infty) \to Y(0,\infty)$.

Potom

$$\|Tf\|_{Y(S,\nu)} = \|(Tf)^*\|_{Y(0,\infty)} \quad \text{(representace } Y\text{)}$$
$$\leq c\,\|S(f^*)\|_{Y(0,\infty)} \quad \left(\begin{array}{c}\text{lattice \& odhad}\\ T \text{ pomocí } S\end{array}\right)$$
$$\leq c'\,\|f^*\|_{X(0,\infty)} \quad (S : X(0,\infty) \to Y(0,\infty))$$
$$= c'\,\|f\|_{X(R,\mu)} \quad \text{(representace } X\text{)}.$$

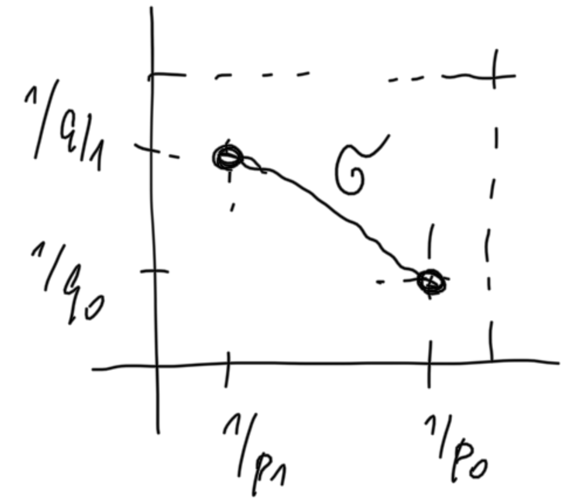
Netriviální je 3. krok ($S : X(0,\infty) \to Y(0,\infty)$), např. pro M je $S = A$, tedy 3. krok je Hardyho nerovnost, resp. omezenost A na L^p (platí pro $p \in (1,\infty]$), pro H je $S = A + A'$, tedy 3. krok jsou dvě Hardyho nerovnosti, resp. omezenost A, A' na L^p (platí pro $p \in (1,\infty)$).

OTÁZKY: 1) Jak z toho vybudovat interpolační princip?

2) Jaké další operátory můžeme zapojit do hry?

3) Na jakou třídu prostorů funkcí lze tuto teorii rozšířit?

DEFINICE. Nechť $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $q_0 \neq q_1$. Označme $\sigma = \left[\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right), \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)\right]$. Pak σ nazýváme interpolačním segmentem. Hodnotu



$$m = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

nazýváme sklonem σ (slope).

Pro g měř., ≥ 0, $t \in (0,\infty)$ položme

$$(S_\sigma g)(t) = t^{-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}-1} g(s)\,ds + t^{-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}-1} g(s)\,ds.$$

Operátor S_σ nazýváme Calderónovým operátorem příslušejícím interpolačnímu segmentu σ.

PŘÍKLAD: Pro $\sigma = [(1,1),(0,0)]$ je $S_\sigma = A + A'$.

DEFINICE. Nechť $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, $q_0 \neq q_1$, nechť T je kvazilineární operátor vzhledem k (R,μ) a (S,ν), tj.:

$\mathcal{D}(T)$ je lineární podprostor $\mathcal{M}_0(R,\mu)$,

$R(T) \subset \mathcal{M}(S,\nu)$,

$$\exists C \geq 1: \quad |T(f+g)| \leq C\left(|Tf| + |Tg|\right),$$
$$|T(\lambda f)| = |\lambda| \cdot |Tf|$$

ν-a.e. na S $\forall f,g \in \mathcal{D}(T)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Řekneme, že T je sdruženého typu $(p_0,q_0;p_1,q_1)$

(joint weak type, jwt), jestliže

$$(Tf)^*(t) \le c\, S_\sigma(f^*)(t)$$

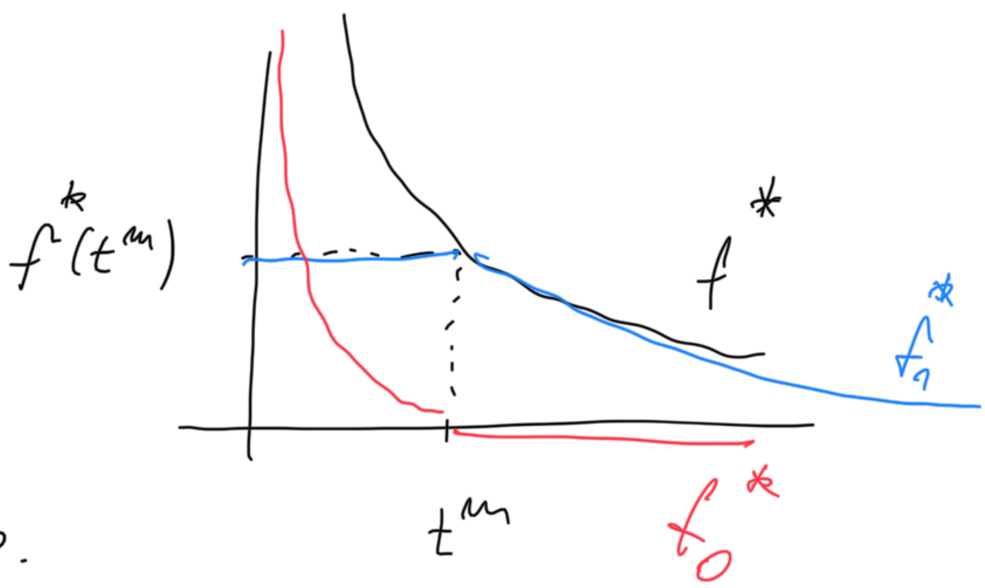
$(\exists c>0\ \forall f \in \mathcal{D}(T)\ \forall t \in (0,\infty))$.

Poznámka. Sám operátor S_σ je sdruženého typu $(p_0,q_0;p_1,q_1)$, neboť $(S_\sigma f)^* = S_\sigma f \le S_\sigma(f^*)$ pro každou $f \ge 0$ splňující $S_\sigma(f^*)(1) < \infty$. (cvičení)

Příklady: M a T jsou sdruženého typu $(1,1,\infty,\infty)$, přičemž M je „lepší".

Poznámka. Nechť $1 \le p_0 < p_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $q_0 \ne q_1$, a T je kvazilineární operátor, potom T je sdruženého typu $(p_0,q_0;p_1,q_1)$ právě tehdy, když je slabého typu (p_0,q_0), (p_1,q_1). Myšlenka důkazu: „$\Rightarrow$" jednoduché (z $(Tf)^* \le S_\sigma(f^*)$), „$\Leftarrow$" $f_1 = \min\{|f|, f^*(t^m)\}\operatorname{sign} f$,

$$f_0 = f - f_1$$



Použije se kvazilinearita a slabé typy.

Podstatné je, že $p_1 < \infty$.

Pro případy, kdy $p_1 = \infty$, může být operátor sdruženého typu, ačkoli není příslušných slabých typů. Příklady: H, T (S10). V tomto smyslu interpolace operátorů sdruženého typu rozšiřuje Marcinkiewiczovu větu.

OTÁZKA (PROBLÉM): Nalézt k danému operátoru „jeho" Calderónův operátor.

Příklady: (i) Daná funkce g na $\mathbb{R}^n$, definujeme konvolutor K_g: $K_g(f) = g * f$.

Věta (O'Neil 1964): Je-li $g \in L^{p,\infty}$, pak K_g je sdruženého typu $(1, p; p', \infty)$. Speciální případ: Rieszův potenciál: pro $\gamma \in (0, n)$:

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\, dy,$$

tedy zde $g(x) = |x|^{\gamma - n} \in L^{\frac{n}{n-\gamma}, \infty}$, takže

I_γ je sdruženého typu $\left(1, \frac{n}{n-\gamma}; \frac{n}{\gamma}, \infty\right)$.

Pozn. odhady jsou optimální.

(ii) frakční maximální operátor: $\gamma \in [0, n)$:

$$M_\gamma f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \int_Q |f(y)|\, dy.$$

Platí bodový odhad $M_\gamma f \le c\, I_\gamma(|f|)$, neboť

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy \ge \int_{Q \ni x} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy$$

$$\ge \frac{1}{(\operatorname{diam} Q)^{n-\gamma}} \int_Q |f(y)|\,dy$$

$$= \frac{c}{|Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \int_Q |f(y)|\,dy$$

a vezmeme $\sup\limits_Q$. Tedy

$$I_\gamma : X \to Y \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad M_\gamma : X \to Y,$$

speciálně M_γ je sdruženého typu $\left(1, \frac{n}{n-\gamma}; \frac{n}{\gamma}, \infty\right)$.

Ale to NENÍ optimální informace. M_γ má „blízko" L^∞ „lepší" vlastnosti, než I_γ, mají.

$$\|M_\gamma f\|_{L^\infty} = \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \int_Q |f| \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Lorentzovský}\\ \text{Hölder}\end{array}\right)$$

$$\le \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1-\frac{\gamma}{n}}} \|f\|_{\frac{n}{\gamma},\infty} \cdot \|\chi_Q\|_{\frac{n}{n-\gamma},1}$$

$$= \|f\|_{\frac{n}{\gamma},\infty}.$$

Takže $M_\gamma : L^{\frac{n}{\gamma},\infty} \to L^\infty$, zatímco I_γ splňuje

pouze $I_\gamma : L^{\frac{n}{\gamma},1} \to L^\infty$ (jak víme).

<u>Otázka</u>: co je vhodný Calderónův operátor pro M_γ? Otevřená až do 2000.

<u>Věta</u> (Cianchi a spol.): $\gamma \in [0,n)$, pak

$$(M_\gamma f)^*(t) \lesssim \sup_{t \le s \le 1} s^{\frac{\gamma}{n}} f^{**}(s)$$

$\forall f \; \forall t$ (zahrnuje i případ $M_0 = M$).

<u>Pozn.</u> Odhad je optimální!

(iii) Laplaceova transformace je sdruženého typu $(1,\infty;\infty,1)$ a splňuje

$$(\mathcal{L} f)^*(t) \le \int_0^{1/t} f^*(s)\,ds.$$

<u>Pozn.</u> Odhad je optimální!

(iv) Fourierova transformace je sdruženého typu $(1,\infty;2,2)$ a splňuje

$$(\mathcal{F} f)^*(t) \le \int_0^{1/t} f^*(s)\,ds + t^{-\frac{1}{2}} \int_{1/t}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} f^*(s)\,ds.$$

<u>Pozn.</u> Není se, zda je optimální.

(v) „dědění regularity"

Uvažujme rovnici $\Delta u = f$ na Ω
$u = 0$ na $\partial\Omega$,

Ω omezená lipschitzovská oblast v $\mathbb{R}^n$,

<u>otázka:</u> víme-li něco o f, co můžeme říci o u?

Lze dokázat, že

$$u^*(t) \le c\left(t^{\frac{2}{n}-1}\int_0^t (\Delta u)^*(s)\,ds + \int_t^{|\Omega|} s^{\frac{2}{n}-1} (\Delta u)^*(s)\,ds \right)$$

$$= S_\sigma((\Delta u)^*),$$

kde $\sigma = (1, \frac{n}{n-2}; \frac{n}{2}, \infty)$. Odtud:

- $f \in L^p$, $1 < p < \frac{n}{2} \Rightarrow u \in L^{\frac{np}{n-2p}}$
- $f \in L^1 \Rightarrow u \in L^{\frac{n}{n-2},\infty}$,
- $f \in L^{\frac{n}{2},1} \Rightarrow u \in L^\infty$ a u je spojitá,
- $f \in L^p$, $p > \frac{n}{2} \Rightarrow u \in C^{0,\alpha}$, $\alpha = 1 - \frac{2p}{n}$

atd. (je to optimální).

Obdobná tvrzení platí pro různé typy Sobolevových vnoření.

Fundamentální interpolační princip:

Calderónova věta (1966):

- každý kvazi-lineární operátor sdruženého typu je omezený z $X \to Y$ (X, Y vhodné (r.i.) prostory)

($\Longleftarrow$)

(!?)

- $S_\sigma : X \to Y$.