Přednáška 13 $20 \frac{22}{XII} 20$

Pokračování důkazu věty 20

připomínáme: snažíme se dokázat klíčové tvrzení

$$(*) \begin{cases} \forall \delta \in (0,\infty)\ \exists C>0\ \forall k \in \mathbb{Z} \\ |\{x \in Q_k : Tf(x) > C\,Mf(x) + (Tf)^*(2t)\}| \leq \delta\,|Q_k|. \end{cases}$$

zatím máme (pro $f = g + h = f\chi_Q + h\chi_{\mathbb{R}^n\setminus Q}$)

$$|\{x \in Q_k : Tg(x) > C_2\, Mf(x)\}| \leq \frac{A}{C_2}\,|Q|,$$

kde $A = \|T\|_{L^1 \to L^{1,\infty}}$.

Položme $C_2 = 6AB$, potom

$$\frac{A|Q|}{C_2} = \frac{A|Q|}{6AB} = \frac{|Q|}{6B} \leq \frac{|Q_k|}{6}, \quad \text{neboť } \frac{|Q|}{|Q_k|} \leq B.$$

Tedy pro tuto konstantu C_2 a pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$|\{x \in Q_k : Tg(x) > C_2\, Mf(x)\}| \leq \frac{|Q_k|}{6}$$

(C_2 nezáleží na k).

Nyní tvrdíme, že

$$(**) \begin{cases} \exists C_1>0\ \forall \varepsilon \in (0,\infty)\ \forall k \in \mathbb{Z}\ \forall x \in Q_k \text{ platí} \\ |T_\varepsilon h(x)| \leq C_1\, Mf(x) + Tf(x_k) \end{cases}$$

Nechť $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in (0,\infty)$ a $x \in Q_k$. Položme

$$r = \max\{\varepsilon;\ \operatorname{dist}(x_k, \mathbb{R}^n \setminus Q)\}.$$

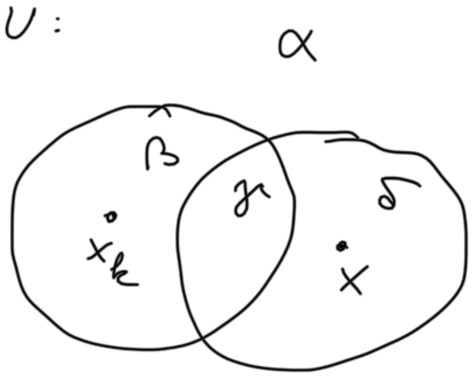
Potom $r > 10 \cdot \operatorname{diam} Q_k$. Označme

$$\triangle = B(x_k, \varepsilon) \div B(x, \varepsilon)$$

Potom

$$|T_\varepsilon h(x)| = \Big| \int_{\{y : |x-y| > \varepsilon\}} K(x-y)\, h(y)\, dy \Big|$$

SCHÉMA ODHADU:



$$\Big| \int_{\{|x-y|>\varepsilon\}} \dots \Big| = \Big| \int_{\{|x-y|>\varepsilon\}} \dots - \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} \dots + \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon} \dots \Big|$$

$$\le \Big| \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} \dots \Big| + \Big| \int_\alpha \dots + \int_\beta \dots - \int_\alpha \dots - \int_\delta \dots \Big|$$

$$\le \Big| \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} \dots \Big| + \Big| \int_\beta \dots \Big| + \Big| \int_\delta \dots \Big| .$$

Přesněji:

$$|T_\varepsilon h(x)| \le \Big| \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} K(x-y)\, h(y)\, dy \Big| + \int_\triangle |K(x-y)| \cdot |h(y)|\, dy$$

$$= \qquad I_1 \qquad + \qquad I_2 .$$

Odhad I_2: protože $\triangle \subset B(x, 3r)$ a $\forall z \in \triangle \cap \operatorname{supp} h$ platí $|x-z| > \frac{r}{2}$. Tedy dle (a) pro SIO máme

$$I_2 \leq c \int_{\Delta} \frac{|h(y)|}{|x-y|^n} dy \leq \frac{c\, 2^n}{r^n} \int_{\Delta} |h(y)|\, dy$$

$$\leq \frac{c\, 2^n}{r^n} \int_{B(x,3r)} |h(y)|\, dy$$

$$\leq C_3\, Mh(x) \leq C_3\, Mf(x)$$

pro nějaké vhodné C_3.

<u>Odhad I_1</u>: Platí

$$I_1 = \left| \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} K(x-y)\, h(y)\, dy \right|$$

$$\leq \left| \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} K(x_k-y)\, h(y)\, dy \right| +$$

$$+ \int_{\{|x_k-y|>\varepsilon\}} |K(x_k-y) - K(x-y)| \cdot |f(y)|\, dy .$$

První sčítanec je $|T_\varepsilon f(x_k)|$. Pro druhý sčítanec dostaneme díky vlastnosti (c) z definice SIO (přičemž značíme $\varepsilon = \operatorname{diam} Q_k$):

$$\int_{\{|x_k-y|>r\}} |K(x_k-y) - K(x-y)| \cdot |f(y)|\, dy \leq$$

$$\overset{(c)}{\leq} C \int_{\{|x-y|>\operatorname{diam} Q_k\}} |f(y)| \cdot \frac{\varepsilon}{|x-y|^{n+1}}\, dy$$

$$= C\varepsilon \int_{\{|x-y|>\varepsilon\}} |f(y)| \frac{dy}{|x-y|^{n+1}}$$

$$= C\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\{2^j\varepsilon < |x-y| \leq 2^{j+1}\varepsilon\}} |f(y)| \cdot \frac{dy}{|x-y|^{n+1}}$$

$$\leq C\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j\varepsilon)^{n+1}} \int_{B(x,2^{j+1}\varepsilon)} |f(y)|\, dy$$

$$= C\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^{j+1}\varepsilon)^n}{(2^j\varepsilon)^{n+1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2^{j+1}\varepsilon)^n} \int_{B(x,2^{j+1}\varepsilon)} |f(y)|\, dy}_{\leq Mf(x)}$$

$$\leq C\varepsilon\, Mf(x) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \cdot 2^{(j+1)n - j(n+1)}$$

$$= C \cdot 2^n \cdot Mf(x) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$$

$$= 2^{n+1} C\, Mf(x).$$

Celkem

$$|T_\varepsilon h(x)| \leq |Tf(x_\varepsilon)| + (C_3 + 2^{n+1} C)\, Mf(x),$$

což je (**) s $C_1 = C_3 + 2^{n+1} C$.

Kombinací odhadů dostáváme

$$|\{x \in Q_k : Tf(x) > C\, Mf(x) + (Tf)^*(2t)\}|$$

$$\leq \left|\{x \in Q_k : |Tg(x)| > C_2 Mf(x)\}\right|$$

$$+ \left|\{x \in Q_k : |Th(x)| > |Tf(x_k)| + C_1 Mf(x)\}\right|$$

$$\leq \frac{|Q_k|}{6}.$$

Odtud:

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > c\, Mf(x) + (Tf)^*(2t)\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{6} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k| \leq \frac{1}{6} |\Omega| \leq \frac{3t}{6} = \frac{t}{2}.$$

Tedy konečně

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > c(Mf)^*(\tfrac{t}{2}) + (Tf)^*(2t)\}\right|$$

$$\leq \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > c\, Mf(x) + (Tf)^*(2t)\}\right|$$

$$+ \left|\{x \in \mathbb{R}^n : c\, Mf(x) > c(Mf)^*(\tfrac{t}{2})\}\right|$$

$$\leq \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t,$$

takže tvrzení plyne z definice nerostoucího přerovnání:

$$(Tf)^*(t) = \inf\{s : |\{|Tf| > s\}| \leq t\},$$

a my víme, že $s = c(Mf)^*(\tfrac{t}{2}) + (Tf)^*(2t)$ je kandidát pro inf. $\square$

<u>Důsledek</u>. Nechť f splňuje $\lim_{t\to\infty} (Tf)^*(t) = 0$.

Potom

$$(Tf)^*(t) \le c\,(Mf)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + c\int_t^\infty (Mf)^*(s)\,\frac{ds}{s}.$$

Důkaz. Iterací Věty 20 dostaneme

$$(Tf)^*(t) \le c\sum_{k=0}^{\infty}(Mf)^*(2^{k-1}t) + \underbrace{\lim_{t\to\infty}(Tf)^*(t)}_{=0}$$

$$= c(Mf)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} c\int_{\{2^{k-2}t\le s\le 2^{k-1}t\}}(Mf)^*(s)\,\frac{ds}{s}$$

$$\le c(Mf)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + c\int_t^\infty (Mf)^*(s)\,\frac{ds}{s}. \qquad \square$$

Co víme o M? Například víme

$$M : L^1 \to L^{1,\infty}$$

$$\& \quad M : L^\infty \to L^\infty.$$

Věta 21 (bodový odhad pro maximální operátor).
Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $t\in(0,\infty)$. Potom

$$(Mf)^*(t) \le C f^{**}(t).$$

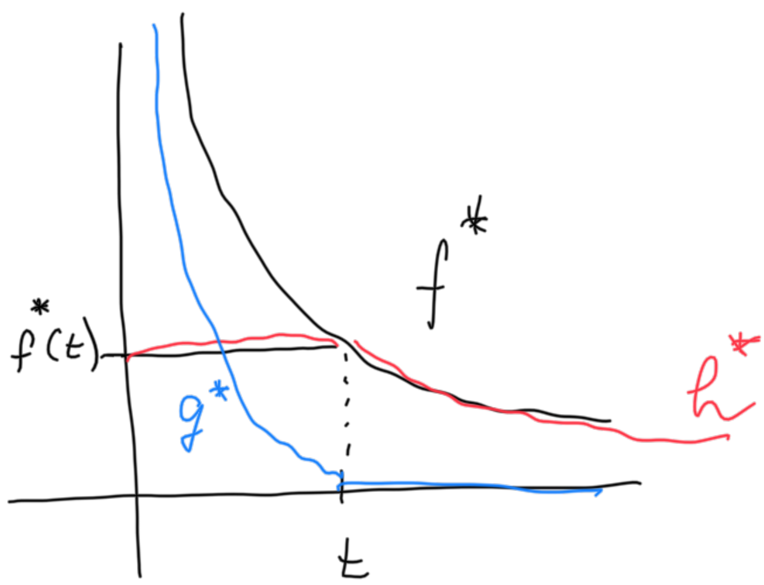
Důkaz. Jest

$$t\cdot(Mf)^*(t) \le \ ?$$

pro jakýkoli rozklad

$$f = g + h$$

dostaneme:



$$t\,(Mf)^*(t) = t\,\big(M(g+h)\big)^*(t)$$

$$\leq t\,(Mg+Mh)^*(t)$$

$$\leq t\,(Mg)^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + t\,(Mh)^*\left(\tfrac{t}{2}\right)$$

$$\leq \sup_{s\in(0,\infty)} s\,(Mg)^*\left(\tfrac{s}{2}\right) + t\,(Mh)^*\left(\tfrac{t}{2}\right)$$

$$\leq 2\,\|Mg\|_{1,\infty} + t\,\|Mh\|_\infty$$

$$\leq 2c\,\|g\|_1 + t\,\|h\|_\infty .$$

Hledáme optimální rozklad $f = g+h$ (obrázek).

Položme

$$h = |f|\cdot \operatorname{sign} f \cdot \chi_{\{|f|\leq f^*(t)\}},$$

$$g = \big(|f| - f^*(t)\big)_+ \operatorname{sign} f,$$

potom $f = g+h$ a

$$g^*(s) = \chi_{(0,t)}(s)\, f^*(s), \quad h^*(s) = \min\{f^*(s), f^*(t)\}.$$

Tedy $\|h\|_\infty = f^*(t)$,

$$\|g\|_1 = \int |g| = \int_0^\infty g^*(s)\,ds = \int_0^t f^*(s)\,ds.$$

Celkem

$$t\cdot (Mf)^*(t) \leq 2c\int_0^t f^*(s)\,ds + t f^*(t),$$

to jest

$$(Mf)^{*}(t) \leq 2c\, f^{**}(t) + f^{*}(t)$$

$$\leq (2c+1)\, f^{**}(t). \qquad \square$$

<u>Důsledek</u>. Nechť T je S10. Potom

$$(Tf)^{*}(t) \leq c\left(f^{**}(t) + \int_t^\infty \frac{f^{*}(s)}{s}\,ds \right)$$

$\forall t \in (0,\infty)$ $\forall f \in \mathcal{D}(T)$.

<u>Důkaz</u>. plyne z Věty 21 a Důsledku Věty 20 za použití Fubiniovy věty a vhodné aproximace (detaily vynecháme). $\square$

<u>ZÁVĚR</u>.

$$(Mf)^{*}(t) \leq c \cdot \frac{1}{t}\int_0^t f^{*}(s)\,ds,$$

$$(Tf)^{*}(t) \leq c\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^{*}(s)\,ds + \int_t^\infty \frac{f^{*}(s)}{s}\,ds \right).$$