Přednáška 11 20 $\frac{4}{\text{XII}}$ 20

2.6. SINGULÁRNÍ INTEGRÁLNÍ OPERÁTORY

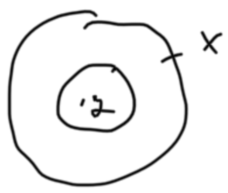
DEFINICE (SIO). Nechť $K: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ je měřitelná, $n \in \mathbb{N}$, a jsou splněny podmínky:

(a) $$|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{(decay)}$$

(b) $$\int_{\alpha < |x| < \beta} K(x)\,dx = 0 \quad \forall\, 0 < \alpha < \beta, \qquad \text{(cancellation)}$$

(c) $$|K(x-y) - K(x)| \leq C \frac{|y|}{|x|^{n+1}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ |y| \leq \frac{|x|}{2}.$$

(smoothness)



Pro $\varepsilon \in (0, \infty)$ definujeme

$$T_\varepsilon f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{R \to \infty} \int_{\varepsilon < |x-y| < R} f(y) K(x-y)\,dy, & \text{pokud lim existuje} \\ \infty, & \text{pokud lim neexistuje,} \end{cases}$$

$$\mathcal{K} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} T_\varepsilon f(x),$$

$$T f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} T_\varepsilon f(x).$$

Potom T nazveme singulárním integrálním operátorem (SIO).

Příklad. $n = 1$, $K(x) = \frac{1}{\pi x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

... Hilbertova transformace H

$$Hf(x) = \text{p.v. } \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ověření (c) ((a), (b) triviální):

$$|K(x-y) - K(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{\pi}\left|\frac{x-x+y}{x(x-y)}\right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{|y|}{|x|\cdot|x-y|} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2|y|}{|x|^2}. \quad \checkmark$$

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Další příklady: Rieszova transformace, C-Z operátory atd...

Cíl: „interpolace" SIO

k tomu: nutno vybudovat technické zázemí

- Whitneyovo lemma o pokrytí
- Calderónova–Zygmundova dekompozice
- bodové odhady $(Tf)^*$
- good-λ-nerovnost

Lemma (Whitneyovo o pokrytí). Nechť F je uzavřená neprázdná podmnožina $\mathbb{R}^n$. Označme $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$. Potom existuje posloupnost krychlí $\{Q_k\}$ se stěnami rovnoběžnými se souřadnými osami splňující

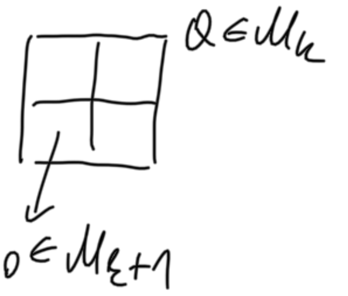
(a) $\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} Q_k$,

(b) $\overset{\circ}{Q}_j \cap \overset{\circ}{Q}_k = \emptyset \quad \forall j,k \in \mathbb{Z},\ j \neq k$,

(c) pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\operatorname{diam} Q_k \le \operatorname{dist}(Q, F) \le 4 \operatorname{diam} Q_k.$$

Důkaz. Nechť $\mathcal{M}_0$ je celočíselná mříž v $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{M}_k = 2^{-k}\mathcal{M}_0$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. každá krychle v $\mathcal{M}_k$ se dělí na 2^n krychlí v $\mathcal{M}_{k+1}$, přičemž $Q \in \mathcal{M}_k \iff$ délka hrany $Q = 2^{-k}$ (a tedy $\operatorname{diam} Q = \sqrt{n}\, 2^{-k}$)

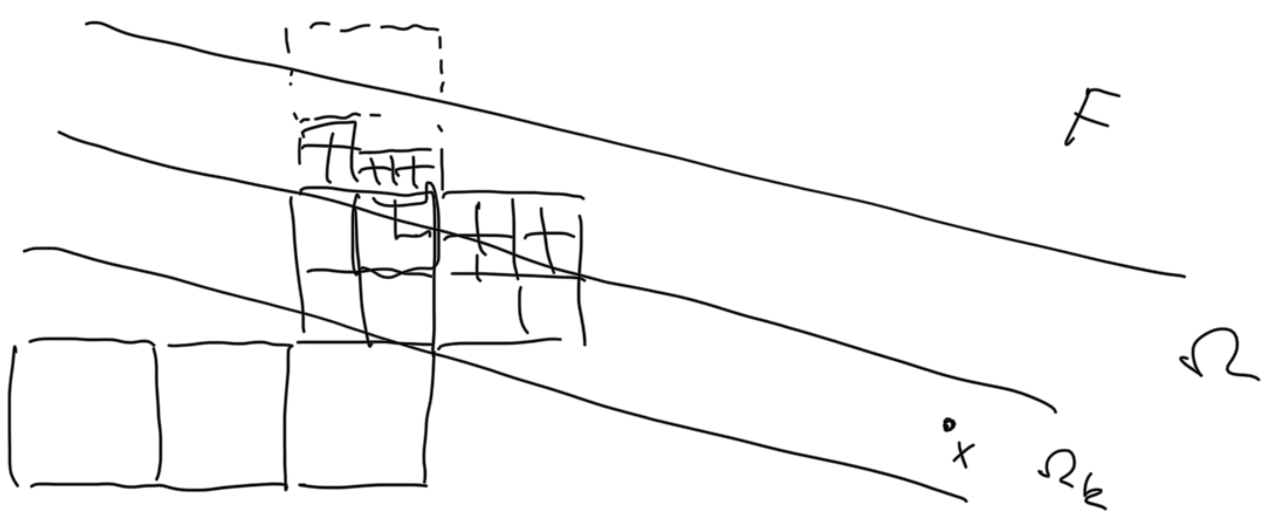


Definujeme „vrstvy" množiny Ω předpisem

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : c\, 2^{-k} < \operatorname{dist}(x, F) \le c\, 2^{-k+1}\},$$

kde $c > 0$ je konstanta, kterou určíme později. Potom $\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$. Položme

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{Q \in \mathcal{M}_k : Q \cap \Omega_k \ne \emptyset\}.$$



Nechť $Q \in \mathcal{M}_k \cap \mathcal{F}$. Potom jednak $\operatorname{diam} Q = \sqrt{n}\, 2^{-k}$ a jednak $\exists x \in Q \cap \Omega_k$. Tedy

$$\operatorname{dist}(Q,F) \le \operatorname{dist}(x,F) \le c\,2^{-k+1}$$

a zároveň

$$\operatorname{dist}(Q,F) \ge \operatorname{dist}(x,F) - \operatorname{diam} Q > c\,2^{-k} - \sqrt{n}\,2^{-k}.$$

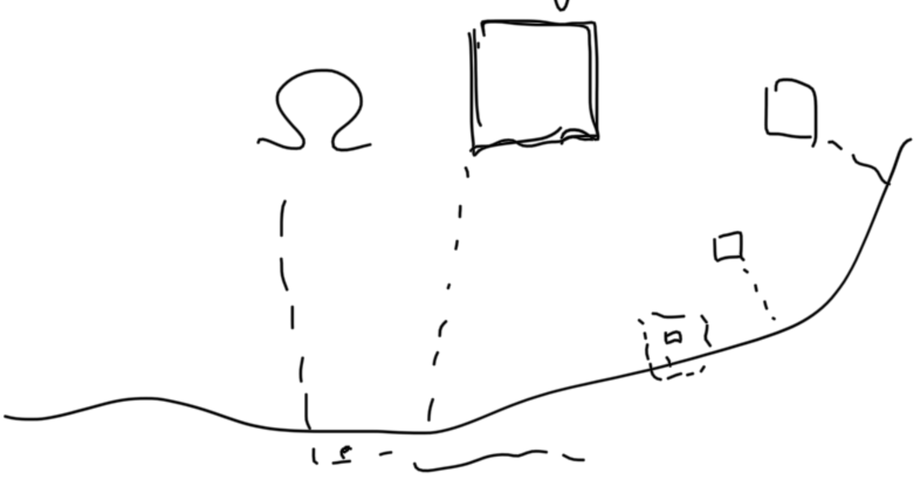
Položme $c = 2\sqrt{n}$. Dostaneme

$$\sqrt{n}\,2^{-k} \le \operatorname{dist}(Q,F) \le 4\sqrt{n}\,2^{-k},$$

tedy

$$\operatorname{diam} Q \le \operatorname{dist}(Q,F) \le 4 \operatorname{diam} Q.$$

Tedy $\mathcal{F}$ splňuje (a) a (c), nesplňuje však nutně (b). Jestliže $Q, \tilde{Q} \in \mathcal{F}$, $Q \ne \tilde{Q}$, $Q^0 \cap \tilde{Q}^0 \ne \emptyset$, pak jsou nutně v inkluzi. Stačí z $\mathcal{F}$ vyhodit ty menší! Zůstanou pouze maximální krychle. Pak je splněno i (b). $\square$



<u>Poznámka</u>. Základní vlastnost Whitneyovy krychle: existuje universální konstanta (např. 5) splňující

$$5Q \cap F \ne \emptyset,$$

kde $5Q$ je krychle se stejným středem jako Q a s 5x delší hranou.

Věta 18 (Calderónova–Zygmundova dekomposice).

Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a $\alpha \in (0,\infty)$. Potom existují funkce g, b takové, že $f = g + b$, $b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k$ a existuje posloupnost krychlí $\{Q_k\}$ tak, že platí

(a) $|g(x)| \leq \alpha$ skoro všude na F, kde $F = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Q_k$,

(b) $\operatorname{supp} b_k \subset Q_k$, $k \in \mathbb{Z}$,

(c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |b_k| \, dx \leq C \alpha |Q_k|$, $k \in \mathbb{Z}$,

(d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} b_k(x) \, dx = 0$, $k \in \mathbb{Z}$,

(e) $\displaystyle\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(x)| \, dx \leq C\alpha$ $(\exists C \, \forall k \in \mathbb{Z})$,

(f) $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$

(zde i níže C označuje konstantu závislou pouze na n, jejíž hodnota se může průběžně měnit).

Důkaz. Označme $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \ Mf(x) > \alpha\}$. Potom Ω je otevřená, neboť Mf je zdola polospojitá. Navíc $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, neboť $f \in L^1$, neboť $|\Omega| \leq C \frac{\|f\|_1}{\alpha}$ díky tomu, že M je slabého typu $(1,1)$. Nechť $\{Q_k\}$ je whitneyovské pokrytí Ω. Položme $g = f\chi_F + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f \right) \chi_{Q_k}$.

Potom $f = g + b = g + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k$, kde

$$b_k = \chi_{Q_k}\left(f(x) - \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(y)\,dy\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potom pro s.v. $x \in F$ platí: $|f(x)| \leq Mf(x) \leq \alpha$. Tedy $|g| \leq \alpha$ skoro všude na F. Tedy platí (a). Navíc

$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|\,dx \leq \frac{5^m}{|5Q_k|}\int_{5Q_k} |f(x)|\,dx.$$

Povšimněme si, že: $5Q_k \cap F \neq \emptyset$, tedy $\exists\, x_k \in 5Q_k \cap F$, tedy $Mf(x_k) \leq \alpha$, tedy

$$\sup_{Q \ni x_k} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy \leq \alpha, \text{ tedy (neboť } x_k \in 5Q_k)$$

$$\frac{1}{|5Q_k|}\int_{5Q_k} |f(x)|\,dx \leq \alpha.$$

Tedy $\forall k \in \mathbb{Z}$ máme

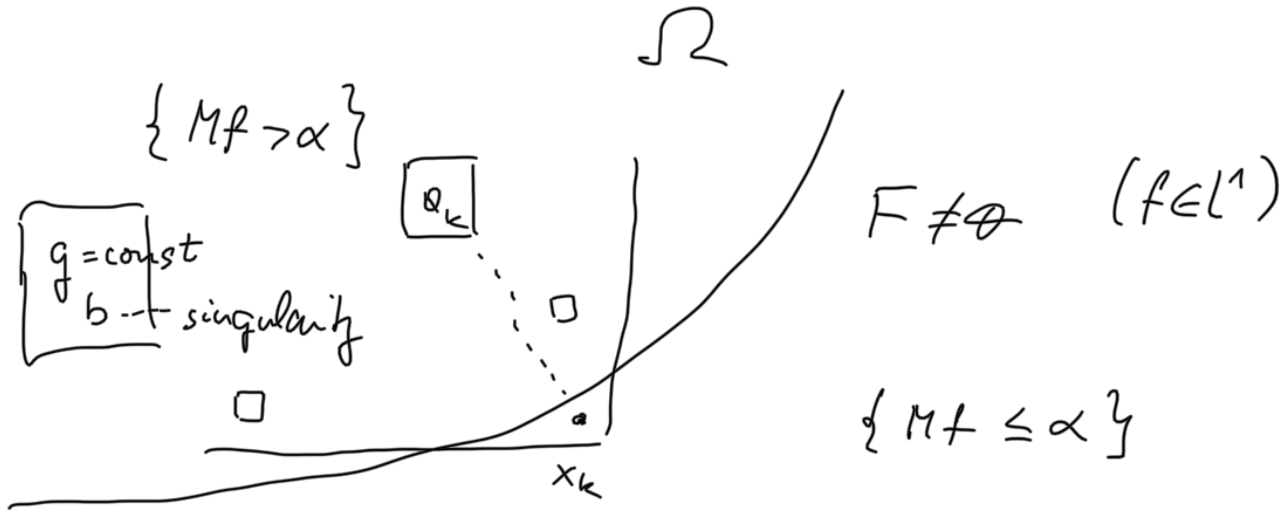
$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f(x)|\,dx \leq 5^m \alpha, \text{ odtud plyne (e)}$$

Vlastnosti (b) a (d) platí díky definici b. Dále

$$\int_{\mathbb{R}^m} |b_k(x)|\,dx \leq 2\int_{Q_k} |f(x)|\,dx \overset{(e)}{\leq} 2 \cdot 5^m \alpha\, |Q_k|, \quad k \in \mathbb{Z},$$

což dokazuje (c). Zbývá (f). Díky tomu, že M je slabého typu (1,1), dostáváme

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |Q_k| = |\Omega| = |\{Mf > \alpha\}| \overset{(1,1)}{\leq} \frac{c}{\alpha}\|f\|_1. \qquad \square$$



$$|g| \le \alpha$$

Věta 19 (slabý typ (1,1) jistého typu operátorů).

Nechť K je měřitelná funkce a T je operátor definovaný alespoň na $L^2(\mathbb{R}^n)$ a representovatelný předpisem

$$Tf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)\, f(y)\, dy .$$

Předpokládejme, že platí:

(a) $\exists C>0\ \forall f\in L^1\cap L^2:\quad \|Tf\|_{L^2} \le C\,\|f\|_{L^2}$,

(b) $\exists A>0\ \forall y\in\mathbb{R}^n\ \forall \delta>0\ \forall \bar{y}\in Q(y,\delta)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q(y,3\delta)} |K(x-y)-K(x-\bar{y})|\, dx \le A.$$

Potom T je slabého typu $(1,1)$ (tj. $\forall f\in L^1\cap L^2$ platí $\sup_{\alpha} \alpha\, |\{Tf>\alpha\}| \le c\,\|f\|_1$.

Poznámka. Hilbertova transformace splňuje předpoklady Věty 19.

<u>Důkaz Poznámky</u>: $n=1$, $K(x)=\frac{1}{\pi x}$, tedy

$$\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq 3\delta}\left|\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x-\bar{y}}\right|dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|\geq 3\delta}\frac{|y-\bar{y}|}{|x-y|\cdot|x-\bar{y}|}dx$$

$$=\frac{|y-\bar{y}|}{\pi}\int_{|x-y|\geq 3\delta}\frac{dx}{|x-y|\cdot|x-\bar{y}|}\overset{(*)}{\leq} c\,|y-\bar{y}|\int_{|x-y|\geq 3\delta}\frac{dx}{|x-y|^2}$$

$$\leq c\cdot|y-\bar{y}|\cdot\frac{1}{\delta}\leq C,$$ kde (*) plyne z toho, že

$$|x-\bar{y}|\geq |x-y|-|y-\bar{y}|\geq 3\delta-\delta=2\delta,$$ także

$$|x-y|\leq|x-\bar{y}|+|\bar{y}-y|\leq|x-\bar{y}|+\delta=|x-\bar{y}|+\tfrac{1}{2}\cdot 2\delta$$

$$\leq|x-\bar{y}|+\tfrac{1}{2}|x-\bar{y}|=\tfrac{3}{2}|x-\bar{y}|.$$ $\square$