Přednáška 10 $\qquad$ $20\,\frac{1}{\text{XII}}\,20$

dnes: důkaz Marcinkiewiczovy věty (Věta 17)

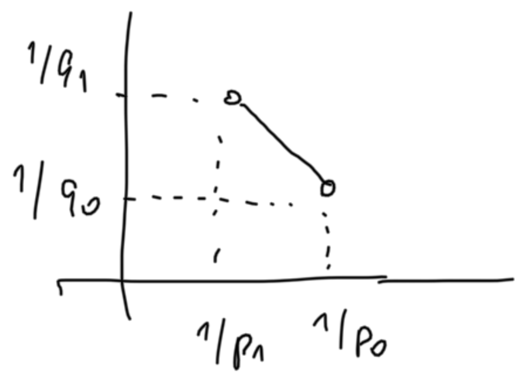
připomeňme tvrzení (náznak):

T slabých typů (p_i, q_i), $i = 0,1$, $\theta \in (0,1)$, p, q jako obvykle,

$1 \le p_0 < p_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $q_0 \neq q_1$,

potom $T : L^{p,r} \to L^{q,r}$, kde $r \in [1,\infty]$.

Důkaz. Definujme sklon $m = \dfrac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$



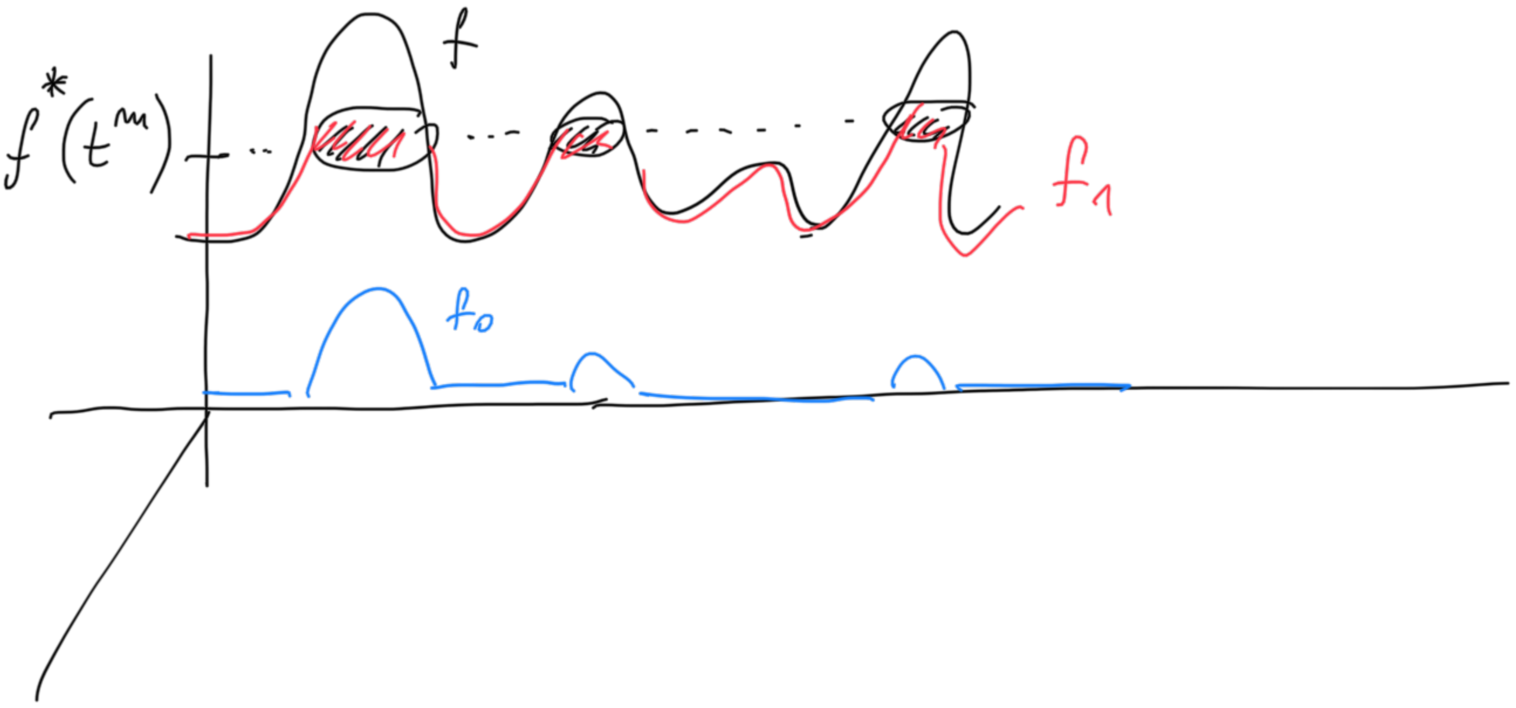
Definujme dále operátor $S : \mathcal{M}_+(0,\infty) \to \mathcal{M}_+(0,\infty)$

předpisem

$$Sg(t) = t^{-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}-1} g(s)\, ds + t^{-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}-1} g(s)\, ds$$

pro $g \in \mathcal{M}_+(0,\infty)$ a $t \in (0,\infty)$. Nechť $t \in (0,\infty)$

a $f \in \mathcal{M}_0(R)$ a položme



$$f = f_0 + f_1, \quad \text{kde}$$

$$f_1 = \min\{|f|, f^*(t^m)\} \cdot \operatorname{sign} f,$$

$$f_0 = f - f_1 = \left(|f| - f^*(t^m)\right)_+ \operatorname{sign} f.$$

Potom je snadné ověřit, že

$$f_1^*(s) = \min\{f^*(s), f^*(t^m)\},$$

$$f_0^*(s) = \left(f^*(s) - f^*(t^m)\right)_+$$

pro každé $s \in (0,\infty)$.

<u>IDEA</u>: f_0 ... velká ... $\|f_0\|_{L^{p_0,1}}$,

f_1 ... malá ... $\|f_1\|_{L^{p_1,1}}$.

Tedy

$$\|f_1\|_{p_1,1} = \int_0^\infty s^{\frac{1}{p_1}-1} f_1^*(s)\,ds$$

$$= \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(t^m)\,ds + \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(s)\,ds$$

$$= p_1 \cdot t^{\frac{m}{p_1}} \cdot f^*(t^m) + \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(s)\,ds,$$

$$\|f_0\|_{p_0,1} = \int_0^\infty s^{\frac{1}{p_0}-1} \left(f^*(s) - f^*(t^m)\right)_+ ds$$

$$= \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(s)\,ds - p_0\, t^{\frac{m}{p_0}} f^*(t^m).$$

Dále jest díky kvasilinearitě T pro každé $s \in (0,\infty)$

$$(Tf)^*(s) = |Tf|^*(s) \le$$

$$\le c\left(|Tf_0| + |Tf_1|\right)^*(s)$$

$$\le c\left((Tf_0)^*\left(\frac{s}{2}\right) + (Tf_1)^*\left(\frac{s}{2}\right)\right).$$

Víme: $T : L^{p_i,1} \to L^{q_i,\infty}$ pro $i = 0,1$, a tedy

$$\sup_{\tau\in(0,\infty)} \tau^{\frac{1}{q_i}} (Tf_i)^*(\tau) \le C_i \|f_i\|_{p_i,1}, \quad i = 0,1,$$

tedy speciálně pro $\tau = \frac{s}{2}$ máme

$$(Tf_i)^*\left(\frac{s}{2}\right) \le C_i \left(\frac{s}{2}\right)^{-\frac{1}{q_i}} \|f_i\|_{p_i,1}$$

pro každé $s\in(0,\infty)$ a $i = 0,1$. Tedy celkem

$$(Tf)^*(s) \le C\left(C_0\left(\frac{s}{2}\right)^{-\frac{1}{q_0}}\|f_0\|_{p_0,1} + C_1\left(\frac{s}{2}\right)^{-\frac{1}{q_1}}\|f_1\|_{p_1,1}\right).$$

Najdeme K dost velké, aby platilo

$$(Tf)^*(s) \le K\left(\frac{s^{-\frac{1}{q_0}}}{p_0}\|f_0\|_{p_0,1} + \frac{s^{-\frac{1}{q_1}}}{p_1}\|f_1\|_{p_1,1}\right)$$

pro $s\in(0,\infty)$ (například $K = C\max_{i=0,1}\{p_i C_i 2^{1/q_i}\}$).

Toto platí pro každé $s\in(0,\infty)$. Tedy speciálně to platí také pro $s = t$. Tedy

$$(Tf)^*(t) \le K\left(\frac{t^{-\frac{1}{q_0}}}{p_0}\|f_0\|_{p_0,1} + \frac{t^{-\frac{1}{q_1}}}{p_1}\|f_1\|_{p_1,1}\right)$$

$$= K\left(\frac{t^{-\frac{1}{q_0}}}{p_0}\int_0^{t^m}\tau^{\frac{1}{p_0}-1}f^*(\tau)\,d\tau - f^*(t^m)\,t^{\frac{m}{p_0}-\frac{1}{q_0}} +\right.$$

$$\left. + f^*(t^m)\,t^{\frac{m}{p_1}-\frac{1}{q_1}} + \frac{t^{-\frac{1}{q_1}}}{p_1}\int_{t^m}^{\infty}\tau^{\frac{1}{p_0}-1}f^*(\tau)\,d\tau\right).$$

Pozorování: $\frac{m}{p_0}-\frac{1}{q_0}=\frac{m}{p_1}-\frac{1}{q_1}$ (plyne z def. m),

takže prostřední členy se odečtou. Odtud plyne klíčový odhad

$$(Tf)^*(t) \leq S(f^*)(t)$$

pro každé $f\in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ a každé $t\in(0,\infty)$.

Odtud dostáváme

$$\|Tf\|_{q,r} = \|t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}(Tf)^*(t)\|_{L^r(0,\infty)}$$

$$\leq \|t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}S(f^*)(t)\|_{L^r(0,\infty)}$$

$$\leq K\left(\|t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{q_0}}\int_0^{t^m}s^{\frac{1}{p_0}-1}f^*(s)\,ds\|_{L^r(0,\infty)} +\right.$$

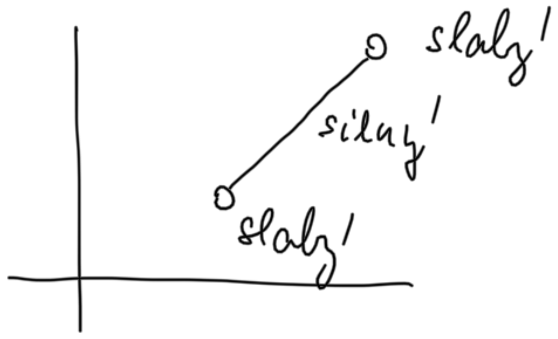
$$\left. + \|t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{q_1}}\int_{t^m}^{\infty}s^{\frac{1}{p_1}-1}f^*(s)\,ds\|_{L^r(0,\infty)}\right)$$

$$\overset{\text{substituce}}{=} K|m|^{-\frac{1}{r}}\left(\|y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}-\frac{1}{r}}\int_0^{y}s^{\frac{1}{p_0}-1}f^*(s)\,ds\|_r +\right.$$

$$\left. + \|y^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{r}}\int_y^{\infty}s^{\frac{1}{p_1}-1}f^*(s)\,ds\|_r\right)$$

$$\overset{\text{(Hardyova nerovnost)}}{\leq} K|m|^{-1/r}\left(\frac{pp_0}{p-p_0}\|f\|_{p,r} + \frac{pp_1}{p-p_1}\|f\|_{p,r}\right).$$

Tedy T je silného typu (p,q). $\square$



Příklady (i) $Af(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds$,

nebo $Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy$,

$A: \mathcal{M}_+(0,\infty) \to \mathcal{M}_+(0,\infty)$,

$M: L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^n)$,

potom A, M jsou slabých typů $(1,1)$ a (∞,∞),

a tedy, dle Marc. věty, silného typu (p,p)

pro $p \in (1,\infty)$ $\big(p \in (1,\infty]\big)$.

(ii) $I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\,dy$, $\gamma \in (0,n)$,

(Rieszův potenciál),

I_γ je slabých typů $\left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right)$ a $\left(\frac{n}{\gamma}, \infty\right)$.

Tedy dle Marcinkiewiczovy věty

$$I_\gamma : L^{p,r} \to L^{q,r}, \text{ kde } r \in [1,\infty] \text{ a}$$

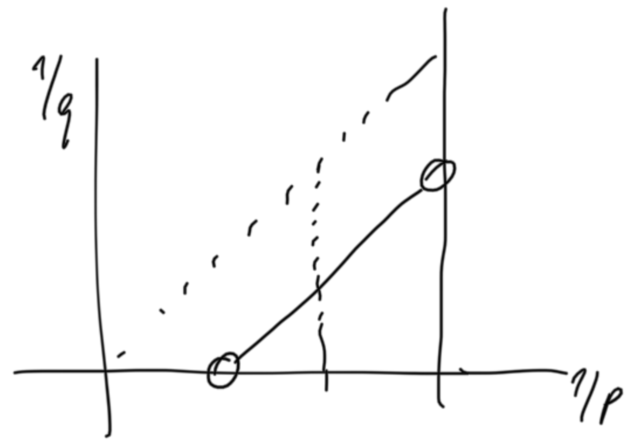
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta \cdot \gamma}{n}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{n}(n-\gamma) + \frac{\theta}{\infty},$$

tedy $\frac{1}{p} = 1 - \theta\left(\frac{\gamma}{n} - 1\right)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{n} - \theta\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)$,

dosadíme $\theta\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right) = 1 - \frac{1}{p}$, takže pro dané

$p \in \left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right)$ dopočítáme q podle vzorce

$$\boxed{\frac{1}{q} = \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{p}}$$



Z Marcinkiewiczovy věty víme, že

$$I_\gamma : L^{p,r} \to L^{q,r} \text{ pro } p \in \left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right),$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n} - 1.$$

Speciálně, pro $r = p$,

$$I_\gamma : L^{p,p} = L^p \longrightarrow L^{q,p}.$$

Povšimneme si, že $q > p$, neboť $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$,

a tedy $L^{q,p} \hookrightarrow L^{q,q} = L^q$, a tedy dostáváme

silný odhad (I_γ je silného typu (p,q)).
V předchozím případě tento problém nenastal, neboť A, M se pohybují po diagonále, tedy

$A, M : L^{p,r} \to L^{p,r}$, takže pro silný typ stačí volit $r = p$.

(iii) Laplaceova transformace

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(s)\,ds, \quad t \in (0,\infty),$$
$$f \in \mathcal{M}_+(0,\infty)$$

je slabých typů $(1,\infty)$ a $(\infty,1)$, tj.

$$\mathcal{L} : L^1 \to L^\infty, \quad \mathcal{L} : L^\infty \to L^{1,\infty}$$

(zde je třeba rozšířit Marcinkiewiczovu větu na případ $p_1 = \infty$ (což lze)), dostaneme

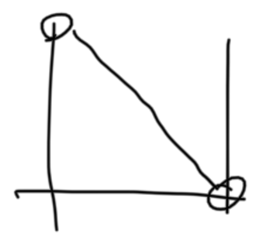
$$\mathcal{L} : L^{p,r} \to L^{q,r}, \text{ kde}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{\infty}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{1},$$

tedy $\frac{1}{p} = 1-\theta$, $\frac{1}{q} = \theta = 1 - \frac{1}{p}$, takže $q = p'$!

Dostáváme $\mathcal{L} : L^{p,r} \to L^{p',r}$ $\forall r \in [1,\infty]$
$\forall p \in (1,\infty)$.

Je $\mathcal{L}$ silného typu (p,p')? (pozor, $m = -1$)



NE VŽDY (!)

Máme $\mathcal{L}: L^{p,r} \to L^{p',r}$ $\forall r \in [1,\infty]$,

položme $r=p$, dostaneme

$$\mathcal{L}: L^{p,p} = L^{p} \to L^{p',p},$$

plyne odtud, že $\mathcal{L}$ je silného typu (p,p')?

ANO, pokud $p \le 2$ (pak $p \le p'$ atd.)

NE, pokud $p > 2$.

Poznámka. Věta 17 platí pro $p_1 = \infty$ (s odpovídajícími úpravami). Neplatí však bez předpokladu $q_0 \neq q_1$.

Jednoduchý protipříklad: položme

$$Tf(t) = \frac{\alpha(f)}{\sqrt{t}},$$

kde $f \in L^1(0,1)$, $\alpha \in [L^1(0,1)]^*$ netriviální.

Potom

$$\|Tf\|_{2,\infty} = \| t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\infty}} (Tf)^*(t) \|_\infty$$

$$= |\alpha(f)| \cdot \| t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \|_{L^\infty} = |\alpha(f)|$$

$$\le \|\alpha\| \cdot \|f\|_{L^1(0,1)},$$

takže $T: L^1 \to L^{2,\infty}$. Z možení

$L^\infty(0,1) \hookrightarrow L^1(0,1)$ dostaneme (ještě tříště)

$$T : L^\infty \to L^{2,\infty}, \text{ tedy}$$

$$\left.\begin{array}{l} T : L^1 \to L^{2,\infty} \\ T : L^\infty \to L^{2,\infty} \end{array}\right\} \overset{\theta = \frac{1}{2}}{\Longrightarrow} \quad T : L^{2,2} \to L^{2,2},$$

(kdyby Marc. věta platila pro $q_0 = q_1 = 2$)

tedy $T : L^2 \to L^2$. To ale neplatí, neboť například pro $f = \chi(0,1)$ máme

$$\|f\|_{L^2(0,1)} = 1, \quad \text{ale}$$

$$\|Tf\|_2 = \left\| \frac{\alpha(f)}{\sqrt{t}} \right\|_2 = |\alpha(f)| \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\infty}.$$

Tedy $T : L^2 \not\to L^2$.

<u>POZNÁMKA.</u> Marcinkiewiczova věta se v uvedeném tvaru nedá použít například na tzv. singulární integrální operátory, jejichž pilotním příkladem je Hilbertova transformace H, definovaná předpisem

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{f(y)}{x-y} \, dy,$$

pro $x \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{D}(H)$. Tyto operátory typicky splňují $H : L^1 \to L^{1,\infty}$ (slabý typ

$(1,1)$), ale nejsou slabého typu (∞,∞), přesto obvykle splňují $T: L^p \to L^p$ pro každé $p \in (1,\infty)$. Vzniká otázka, zda se dá chybějící slabý typ nějak nahradit. Těmito otázkami se budeme napříště zabývat.