Přednáška 9

$20 \frac{25}{XI} 20$

Věta 15 (vnoření Lorentzových prostorů).

Nechť $p, q, r \in (0, \infty]$, $q \le r$. Potom

$$L^{p,q}(R,\mu) \hookrightarrow L^{p,r}(R,\mu)$$

(spojité vnoření, tj. $\exists C > 0 \ \forall f \in L^{p,q}(R,\mu)$

platí $\|f\|_{p,r} \le C \|f\|_{p,q}$.

POZNÁMKA. Nezáleží na (R,μ).

Důkaz Věty 15. Pro $q = r$ je tvrzení zřejmé. Pro $p = \infty$ je tvrzení rovněž zřejmé, neboť

$$L^{\infty,q} = \begin{cases} L^\infty & (q = \infty) \\ \{0\} & (q < \infty) \end{cases}.$$

Nechť $p < \infty$ a $q < r$.

1. krok: $r = \infty$. Pro pevná f a t máme

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = c_{p,q} \left(\int_0^t s^{\frac{q}{p}-1} ds \right)^{\frac{1}{q}} f^*(t)$$

$\left(c_{p,q} = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} \right)$

$$\overset{(f^* \downarrow)}{\le} c_{p,q} \left(\int_0^t s^{\frac{q}{p}-1} f^*(s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c_{p,q} \left(\int_0^\infty s^{\frac{q}{p}-1} f^*(s)^q ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C_{p,q} \cdot \|f\|_{p,q}$$

a přimajorizujeme vlevo supremum, takže

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \leq C_{p,q} \cdot \|f\|_{p,q}.$$

<u>2. krok</u> Nechť $0<q<r<\infty$. Potom

$$\|f\|_{p,r} = \left(\int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} f^*(t)^r \, dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q \cdot \underbrace{t^{\frac{r-q}{p}} \cdot f^*(t)^{r-q}}_{\leq \sup_t \dots = \|f\|_{p,\infty}^{r-q}} \, dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \|f\|_{p,\infty}^{1-\frac{q}{r}} \cdot \|f\|_{p,q}^{\frac{q}{r}}$$

(interpolační nerovnost pro Lor. pr.)

$$\overset{(1.\text{ krok})}{\leq} C_{p,q,r} \cdot \|f\|_{p,q}^{1-\frac{q}{r}} \cdot \|f\|_{p,q}^{\frac{q}{r}}$$

$$= C_{p,q,r} \|f\|_{p,q}. \qquad \square$$

<u>cíl:</u> Víme, že $\|\cdot\|_{p,q}$ je norma pro $1 \le q \le p \le \infty$.

To je nepříjemné omezení.

Spokojíme-li se s tím, aby $\|\cdot\|_{p,q}$ bylo <u>ekvivalentní</u> nějaké normě, dostaneme obecnější výsledek.

K tomu: váhová Hardyova nerovnost.

K tomu: Minkowského nerovnost.

<u>Tvrzení</u> (Minkowského nerovnost).
Nechť (R,μ), (S,ν) jsou dva σ-konečné prostory s mírami, $p \in [1,\infty)$, $F: R \times S \to \mathbb{R}$, $\mu \times \nu$-měřitelná,

$$\int_S \left(\int_R |F(x,y)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y) < \infty.$$

Potom

$$\left(\int_R \left| \int_S F(x,y) \, d\nu(y) \right|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

$$\le \int_S \left(\int_R |F(x,y)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y).$$

Důkaz. Pro $p=1$ plyne z Fubiniovy věty.

Nechť $p\in(1,\infty)$. Položme

$$f(x)=\int_S F(x,y)\,d\nu(y),\quad x\in R,$$

$$A=\int_S\left(\int_R |F(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}d\nu(y).$$

Nechť $g\in L^{p'}(R,\mu)$, $\|g\|_{L^{p'}(R,\mu)}\le 1$. Potom

$$\int_R |f||g|\,d\mu \le \int_R\int_S |F(x,y)|\,d\nu(y)\,|g(x)|\,d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int_S\int_R |F(x,y)|\cdot|g(x)|\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

$$\overset{\text{Hölder uvnitř}}{\le}\int_S\left(\int_R |F(x,y)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p}\left(\int_R |g(x)|^{p'}d\mu(x)\right)^{1/p'}d\nu(y)$$

$$\le A,$$

takže

$$\|f\|_{L^p(d\mu)}=\sup_{\|g\|_{L^{p'}(d\mu)}\le 1}\int_R |fg|\,d\mu\le A. \qquad \square$$

Poznámka. Minkowského nerovnost se dobře pamatuje ve tvaru

$$\left\| \int_S F(x,y)\, d\nu(y) \right\|_{L^p(d\mu)} \le \int_S \|F(x,y)\|_{L^p(d\mu)}\, d\nu(y),$$

a platí i pro obecnější normy.

<u>Důsledek</u> (váhová Hardyova nerovnost).

Nechť $p \in (1,\infty)$, $\alpha \in (-\infty, p-1)$. Potom

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s)\, ds \right)^p t^\alpha\, dt \le$$

$$\le \left(\frac{p}{p-1-\alpha} \right)^p \int_0^\infty f(t)^p\, t^\alpha\, dt$$

pro každou funkci $f \in \mathfrak{M}_+(0,\infty)$

(tedy $A : L^p(t^\alpha dt) \to L^p(t^\alpha dt)$).

<u>Důkaz.</u> Jest pro $f \in \mathfrak{M}_+(0,\infty)$

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s)\, ds \right)^p t^\alpha\, dt \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(ty)\, dy\, t^{\frac{\alpha}{p}} \right)^p dt \right)^{1/p}$$

subst.

$s = ty$

$y = \frac{s}{t}$

$ds = t\, dy$

$$\begin{array}{c|cc} s & 0 & t \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

$$\overset{\text{(Minkowski)}}{\leq} \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(ty)^p \, t^\alpha \, dt \right)^{1/p} dy$$

subst.

$z = ty$

$t = \frac{z}{y}$

$dt = \frac{dz}{y}$

t	0	∞
z	0	∞

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(z)^p \frac{z^\alpha}{y^\alpha} \frac{dz}{y} \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

$$= \left(\int_0^\infty f(z)^p z^\alpha dz \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 y^{-\frac{\alpha+1}{p}} dy.$$

Protože $\alpha < p-1$, tedy $\frac{\alpha+1}{p} < 1$, je

$$\int_0^1 y^{-\frac{\alpha+1}{p}} dy = \frac{1}{1-\frac{\alpha+1}{p}} = \frac{p}{p-\alpha-1}. \quad \square$$

<u>Věta 16</u> (alternativní norma na Lorentzově prostoru). Nechť $p \in (1,\infty]$, $q \in [1,\infty]$. Potom funkcionál

$$\| \cdot \|_{(p,q)} : \mathcal{M}(R,\mu) \to [0,\infty],$$

definovaný předpisem

$$\|f\|_{(p,q)} = \| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^{**}(t) \|_{L^q(0,\infty)},$$

je norma na $L^{p,q}(R,\mu)$, a platí

$$\|f\|_{p,q} \leq \|f\|_{(p,q)} \leq C_{p,q} \|f\|_{p,q}, \quad f \in \mathcal{M}(R,\mu).$$

Důkaz. První nerovnost bezprostředně plyne z toho, že $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ $\forall f\ \forall t$.

Dokážeme druhou nerovnost. Nechť nejprve $q \in [1,\infty)$. Potom

$$\|f\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right)^q t^{\frac{q}{p}-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

(vážená Hardyova nerovnost)

$$\leq C_{p,q}\left(\int_0^\infty f^*(t)^q\, t^{\frac{q}{p}-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C_{p,q}\cdot \|f\|_{p,q},$$

neboť $\frac{q}{p}-1 < q-1$ $(p>1)$.

Nyní nechť $q=\infty$. Nechť $\|f\|_{p,\infty} < \infty$, jinak není co dokazovat. Označme $M = \|f\|_{p,\infty}$. Podle definice tedy

$$\sup_{t\in(0,\infty)} t^{1/p} f^*(t) = M,$$

takže $\forall t \in (0,\infty)$ $f^*(t) \leq \frac{M}{t^{1/p}}$. Tedy

$$\|f\|_{(p,\infty)} = \sup_{t\in(0,\infty)} t^{1/p} f^{**}(t)$$

$$= \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s)\,ds$$

$$\le \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t \frac{M}{s^{1/p}}\,ds$$

$$= \sup_{t\in(0,\infty)} t^{\frac{1}{p}-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \cdot M \cdot t^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= M\frac{p}{p-1}, \text{ tedy}$$

$$\|f\|_{(p,\infty)} \le \frac{p}{p-1} \|f\|_{p,\infty}. \qquad \square$$

POZNÁMKY. (a) Pro $p=1$ toto tvrzení neplatí, tj.: $\|f\|_{(1,q)} >> \|f\|_{1,q}$.

(b) V dalším budeme tedy považovat Lorentzovy prostory $L^{p,q}(R,\mu)$ za NLP, pokud je splněna jedna z podmínek:

- $p = q = 1$,

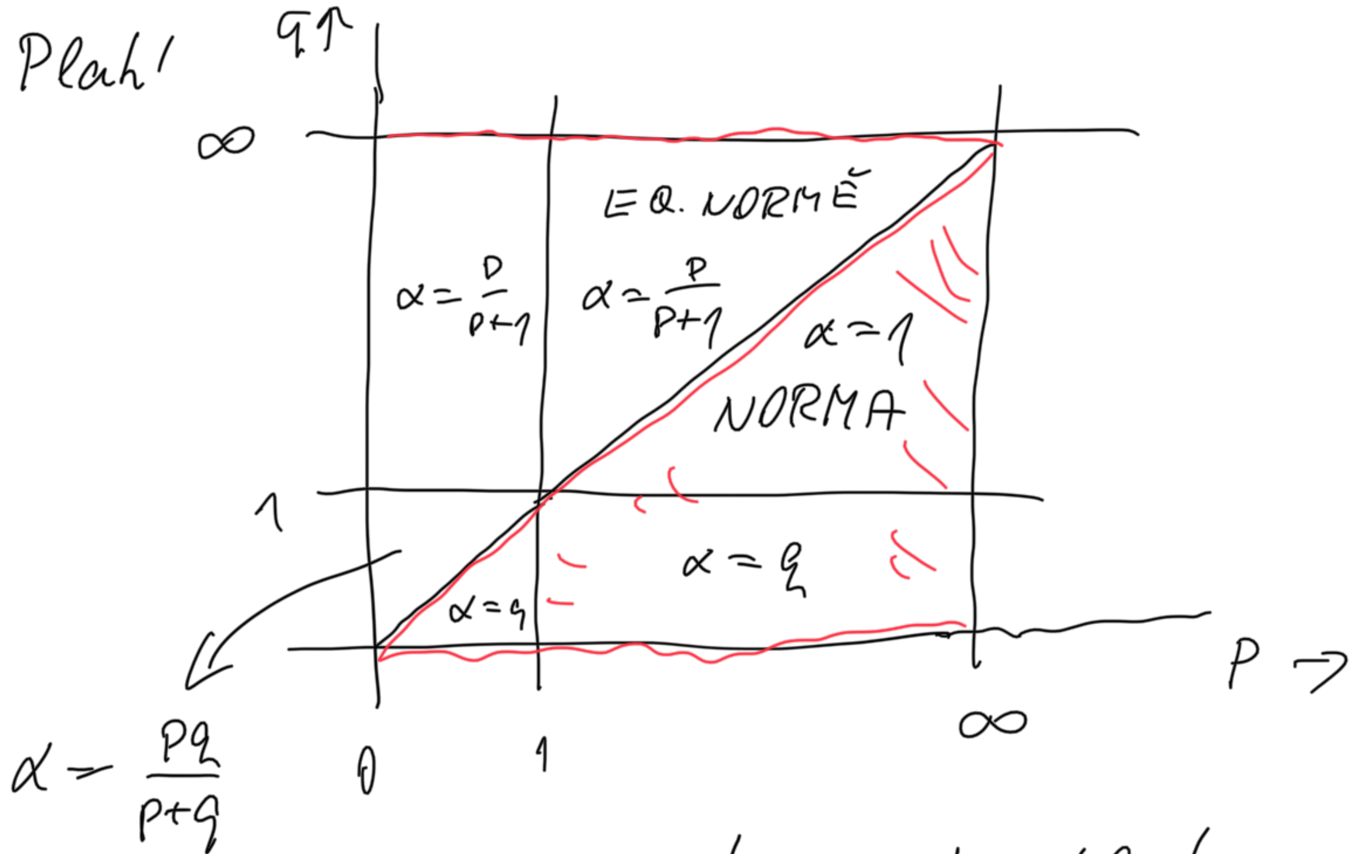
- $p = q = \infty$,
- $p \in (1, \infty)$ & $q \in [1, \infty]$.

(c) Ve všech ostatních případech, tj:

$p, q \in (0, \infty]$, je $\| \cdot \|_{p,q}$ kvazinorma

a pro vhodné α je to α-norma.

Platí



červené = optimální α

2.5. MARCINKIEWICZOVA VĚTA (1939)

<u>Definice</u>. Nechť $p, q \in [1, \infty]$ a T je operátor definovaný alespoň na jednoduchých funkcích na (R, μ) a s hodnotami v $M_0(S, \nu)$. Řekneme, že T je <u>slabého typu (p, q)</u>, jestliže $T : L^{p,1}(R, \nu) \to L^{q,\infty}(S, \nu)$,

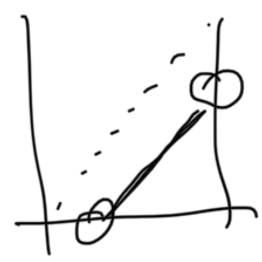
je-li $p<\infty$, a $T: L^\infty(R,\mu) \to L^{q,\infty}(S,\nu)$, je-li $q=\infty$.

<u>Poznámka</u> silný typ $\Rightarrow$ slabý typ

(neboť $L^{p,1} \hookrightarrow L^{p,p} = L^p$, $L^q = L^{q,q} \hookrightarrow L^{q,\infty}$).

<u>Příklady</u> (a) I_γ je slabého typu

$\left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right)$ a $\left(\frac{n}{\gamma}, \infty\right)$



,

(b) M, A jsou slabého typu $(1,1)$ a silného typu (∞,∞)

(pro (∞,∞) splývá silný typ se slabým)

- pro A víme,
- pro M je to snadný důsledek Vitaliovy věty o pokrytí, načrtneme:

$E_\lambda = \{Mf(x) > \lambda\}$, $\lambda \in (0,\infty)$,

$x \in E_\lambda \Rightarrow \exists B(x,r): \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f| > \lambda$, Vitali: $\exists$ disj. podsyst. konečný

$$E_\lambda \subset \bigcup_{\text{fin}} B(x_j, 5r_j),$$

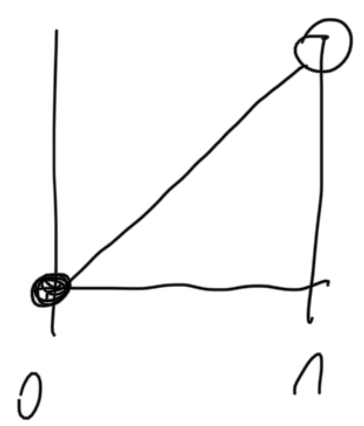
tedy

$$|E_\lambda| \le \sum |B(x_j, 5r_j)| \le \frac{C_n}{\lambda} \sum \int_{B(x_j, r_j)} |f|$$

$$\overset{\text{disj.}}{\le} \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

a tedy

$$\sup_\lambda \lambda \cdot |\{Mf > \lambda\}| \le C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$



(c) Hilbertova transformace

$$Hf(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} \, dy$$

je sl. typu $(1,1)$ (těžké – uvidíme),

ale nemáme druhý krajní odhad.

<u>Věta 17</u> (Marcinkiewicz). Nechť

$1 \le p_0 < p_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $q_0 \ne q_1$,

$\theta \in (0,1)$, $r \in [1,\infty]$. Definujeme

p, q předpisem

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Nechť T je kvasilineární operátor slabých typů (p_i, q_i), $i = 0,1$. Potom

$$T : L^{p,r} \longrightarrow L^{q,r}.$$

IDEA DŮKAZU: nalezneme operátor S splňující

$$(Tf)^* \leq S(f^*)$$

a dokážeme příslušné odhady pro S.

Operátory typu S nazýváme

Calderónovými operátory.

Důkaz příště, přednáška

v úterý $20\frac{1}{XII}20$

v 17^{20}.