

Věta 12 Necht' $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, \mu)$ a $t \in (0, \infty)$.

Potom $(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t)$.

Důkaz. Stačí dokázat, že

$$f^{**}(t) = \sup_{\mathcal{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |fh| d\mu, \int_{\mathbb{R}} |h| d\mu = 1, |h| \leq \frac{1}{t} \right\}.$$

Jest pro $h \geq 0$ uvedením vlastností, pema' f, t :

$$\int_{\mathbb{R}} |fh| d\mu \stackrel{(H-L)}{\leq} \int_0^\infty f^*(s) h^*(s) ds$$

$$= \int_0^t f^*(s) h^*(s) ds + \int_t^\infty f^*(s) h^*(s) ds$$

$$\leq \int_0^t f^*(s) h^*(s) ds + f^*(t) \int_t^\infty h^*(s) ds$$

$$= \int_0^t f^*(s) h^*(s) ds + f^*(t) \left(1 - \int_0^t h^*(s) ds \right)$$

$$= \int_0^t f^*(s) h^*(s) ds + f^*(t) \underbrace{\int_0^t \left(\frac{1}{t} - h^*(s) \right) ds}_{\geq 0}$$

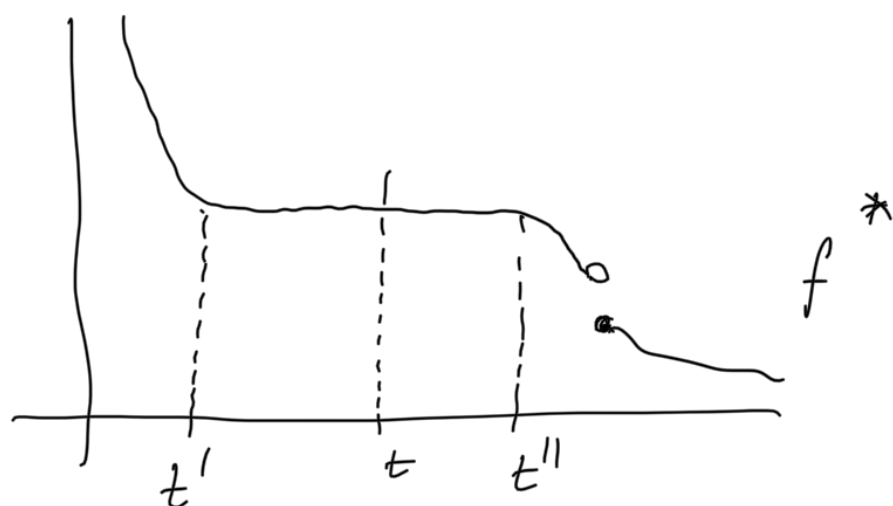
$$\leq \int_0^t f^*(s) h^*(s) ds + \int_0^t f^*(s) \left(\frac{1}{t} - h^*(s) \right) ds$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = f^{**}(t).$$

Tedy

$$\sup_{\mathcal{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |fh| d\mu, \int_{\mathbb{R}} |h| d\mu = 1, |h| \leq \frac{1}{t} \right\} \leq f^{**}(t).$$

Opačne (nasycení): fixujeme f, t a položíme



$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{na } (0, t') \\ \alpha_t & \text{na } [t', t''] \quad (\text{pokud } t' < t'') \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

kde $t' = f_*(t) = \mu(\{f^* > t\})$,

$$t'' = f_*(t) = \mu(\{f^* \geq t\})$$

a α_t volíme tak, aby $\int_{\mathcal{R}} \tilde{h} d\mu = 1$.

Dopodítkáme α_t : jest

$$1 = \int_{\mathcal{R}} \tilde{h} d\mu = \int_0^{\infty} (\tilde{h})^*(s) ds = \int_0^{t'} \frac{1}{t} ds + \int_{t'}^{t''} \alpha_t ds$$

$$= \frac{t'}{t} + \alpha_t (t'' - t')$$

$$\text{takže} \quad \alpha_t = \frac{1 - \frac{t'}{t}}{t'' - t'} = \frac{t - t'}{t(t'' - t')}.$$

Potom $|\tilde{h}| \leq t$, $\int \tilde{h} = 1$ a navíc

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty f(s) (\tilde{h})^*(s) ds &= \int_0^{t'} f(s) \frac{1}{t} ds + \int_{t'}^{t''} f(s) \frac{t-t'}{t(t''-t')} ds \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^{t'} f(s) ds + \frac{t-t'}{t(t''-t')} \cdot \int_{t'}^{t''} f(s) ds \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^{t'} f(s) ds + \frac{t-t'}{t(t''-t')} (t''-t') \cdot f(t) \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^{t'} f(s) ds + \frac{1}{t} \int_{t'}^t f(s) ds \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = f^{**}(t).
 \end{aligned}$$

Odtud a ze subaditivní suprema plyne tvrzení! $\square$

Věta 13 (Hardyova lemma). Necht f, g jsou nezáporné měřitelné funkce na $(0, \infty)$ a necht pro každé $t \in (0, \infty)$ platí

$$\int_0^t f(s) ds \leq \int_0^t g(s) ds.$$

Potom pro každou nerostoucí nezápornou funkci ξ na $(0, \infty)$ platí

$$\int_0^\infty f(s) \xi(s) ds \leq \int_0^\infty g(s) \xi(s) ds.$$

Důkaz. Stačí dokázat pro ξ jednoduchou, tedy
 tvaru $\xi = \sum_{j=1}^3 a_j \chi_{[0, \alpha_j]}$ pro $a_j > 0, \alpha_j > 0$.

Potom

$$\int_0^\infty f(s) \xi(s) ds = \sum_{j=1}^3 a_j \int_0^{\alpha_j} f(s) ds$$

$$\leq \sum_{j=1}^3 a_j \int_0^{\alpha_j} g(s) ds = \int_0^\infty g(s) \xi(s) ds. \quad \square$$

Zpět k Lorentzovým prostorům. Připomenutí:

$$p, q \in [0, \infty], \quad \|f\|_{p, q} = \|t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} f^*(t)\|_{L^q(0, \infty)},$$

Lorentzův prostor:

$$L^{p, q}(\mathbb{R}, \mu) = \{f \in M_0(\mathbb{R}, \mu); \|f\|_{p, q} < \infty\}.$$

Poznámky.

$$(a) \quad \|f\|_{p, q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty f^*(t)^q t^{\frac{q}{p} - 1} dt \right)^{\frac{1}{q}}, & q < \infty, \\ \sup_{t \in (0, \infty)} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & q = \infty. \end{cases}$$

(b) alternativní vzorec pro $\|\cdot\|_{p, q}$:

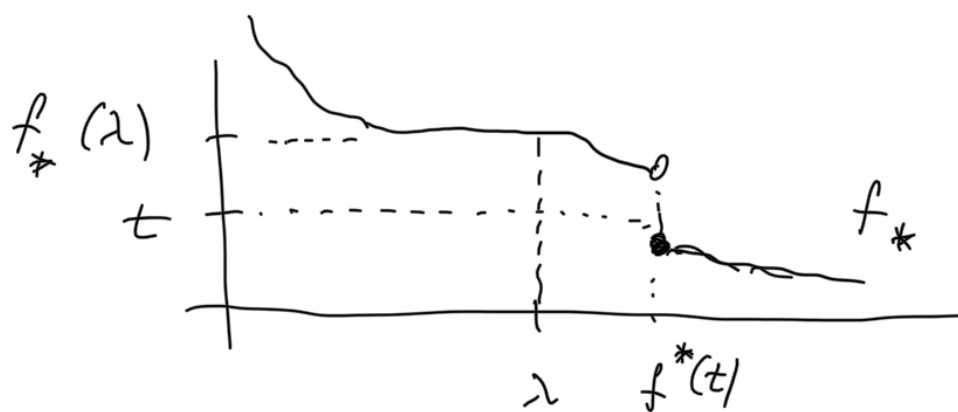
$$\|f\|_{p, q} = \begin{cases} \|p \lambda^{q-1} f_*^*(\lambda)^{\frac{q}{p}}\|_{L^q(0, \infty)}, & \begin{matrix} p < \infty \\ q < \infty \end{matrix} \\ \sup_{t \in (0, \infty)} \lambda f_*^*(\lambda)^{1/p}, & \begin{matrix} q = \infty, \\ p < \infty \end{matrix} \end{cases}$$

$$a \quad \|f\|_{\infty, \infty} = \sup_{\lambda \in (0, \infty)} f_*(\lambda).$$

Důkaz. Nejprve si povíme, že platí:

$\forall t, \lambda \in (0, \infty)$:

$$(*) \quad t < f_*(\lambda) \Leftrightarrow \lambda < f^*(t)$$



Důkaz (*): označme $M_t = \{\sigma > 0; f_*(\sigma) \leq t\}$.

Potom:

- $f^*(t) = \inf M_t$,
- M_t je buď $[f^*(t), \infty)$ (díky spg: +),
nebo $(0, \infty)$.

Tedy platí-li $f^*(t) \neq 0$, pak

$$t < f_*(\lambda) \Leftrightarrow \lambda \notin M_t \Leftrightarrow \lambda < \inf M_t = f^*(t) \neq 0. \quad \square$$

Důkaz (b): Necht' nejprve $q < \infty$. Potom

$$\|f\|_{p, q}^q \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} f^*(t)^q dt$$

$$= p \int_0^\infty s^{q-1} f^*(s^p)^q ds$$

$$= p \int_0^\infty s^{q-1} \int_0^{f^*(s^p)} q \lambda^{q-1} d\lambda ds$$

subst. $t = s^p$

$$dt = p s^{p-1} ds$$

$$t^{-1} dt = p s^{-1} ds$$

t	0	∞
s	0	∞

$$\stackrel{(*)}{=} \stackrel{(\text{Fubini})}{=} \int_0^\infty \lambda^{q-1} \int_0^{f_*(\lambda)^{1/p}} q s^{q-1} ds d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{q-1} f_*^q(\lambda) d\lambda.$$

$$\begin{aligned} 0 < \lambda < f_*^p(s) &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 0 < s^p < f_*^p(\lambda) \\ &\Leftrightarrow 0 < s < (f_*(\lambda))^{1/p} \end{aligned}$$

Nyní předpokládáme, že $q = \infty$. Položíme, pro $\lambda > 0$, $t = f_*(\lambda)$. Potom

$$\|f\|_{p,\infty} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{t \in (0,\infty)} t^{1/p} f^*(t)$$

$$= \sup_{\lambda \in (0,\infty)} f_*(\lambda)^{1/p} f^*(f_*(\lambda)) \leq \sup_{\lambda \in (0,\infty)} f_*(\lambda)^{1/p} \lambda,$$

a dle čene' položíme $\lambda = f^*(t)$ pro t první, pak

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda f_*(\lambda)^{1/p} \leq \sup_{t \in (0,\infty)} f^*(t) f_*(f^*(t))^{1/p} \leq$$

$$\leq \sup_{t \in (0,\infty)} f^*(t) t^{1/p} = \|f\|_{p,\infty}.$$

Případ $p = q = \infty$ je triviální. □

(c) $L^{p,p} = L^p$, neboť

$$\|f\|_{p,p} = \|t^{1/p - 1/p} f^*(t)\|_p = \|f^*\|_p = \|f\|_p.$$

(d) pro $p = \infty$ a $q < \infty$ je $L^{p,q}$ triviální

ve smyslu $L^{p,q} = \{0\}$, neboť pro $q < \infty$ jest

$$\|f\|_{\infty, q} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_0^\infty f^*(t)^q t^{\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{q}\right)q} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_0^\infty f^*(t)^q t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{pro každou } f \neq 0 \\ 0 & \text{pro } f \equiv 0. \end{cases}$$

(e) $L^{p,q}$ je lineární množina, neboť

$$\|f+g\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f+g)^*(t) \right\|_{L^q(0,\infty)}$$

$$\leq \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right) \right) \right\|_{L^q(0,\infty)}$$

$$\left(\|\cdot\|_q \text{ je kvasinorma} \right) \leq C \left(\left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*\left(\frac{t}{2}\right) \right\|_{L^q(0,\infty)} + \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} g^*\left(\frac{t}{2}\right) \right\|_{L^q(0,\infty)} \right)$$

(subst. $s = \frac{t}{2}$ atd.)

$$\leq C' (\|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}),$$

a pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{p,q} = |\alpha| \cdot \|f\|_{p,q}.$$

(f) nejdůležitější případy Lorentzových prostorů

$$\bullet \quad q=p \quad \dots \quad L^{p,q} = L^p \quad (\text{Lorentz} = \text{Lebesgue}),$$

• $q = \infty \dots L^{p,q} = L^{p,\infty}$ (Lorentz = slabý Lebesgue)

• $q = 1 \dots L^{p,q} = L^{p,1}$ (Lorentz = „průslavý Lebesgue“)

Poznámka: viděti, že

$A: L^1 \rightarrow L^1$, ale $A: L^1 \rightarrow L^{1,\infty}$ (na $(0,\infty)$),

$I_f: L^1 \rightarrow L^{\frac{n}{n-1}}$, ale $I_f: L^1 \rightarrow L^{\frac{n}{n-1},\infty}$ (na $\mathbb{R}^n$),

a dle Čebyševovy nerovnosti $L^p \subset L^{p,\infty}$.

Cíl: otázka: kdy je $\|\cdot\|_{p,q}$ norma?

(připomeňme: $\|\cdot\|_p$ je norma $\Leftrightarrow p \in [1,\infty]$)

Věta 14 (Lorentzovy normy).

Nechť $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Potom je $\|\cdot\|_{p,q}$ je norma.

Důkaz. Je-li $p=q=1$, nebo $p=q=\infty$, pak

nemůžeme dokazovat. Předpokládejme, že

$1 < p < \infty$ a $1 \leq q \leq p$. Stačí dokázat

Δ -nerovnost (ostatní vlastnosti normy jsou triviálně splněny). Platí pro $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, \mu)$

$$\|f+g\|_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f+g)^*(t) \right\|_{L^q(0,\infty)}$$

$$= \sup_{\|h\|_{L^{q'}(0,\infty)} \leq 1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f+g)^*(t) h(t) dt$$

$$(\dagger) = \sup_{\|h\|_{L^{q'}(0,\infty)} \leq 1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f+g)^*(t) h^*(t) dt$$

$$\|h\|_{L^{q'}(0,\infty)} \leq 1$$

$\geq \dots$ tříg'ln' (restíke sup na $\downarrow$ funkce)
 $\leq \dots$ H-L nerovnost, neboť
 $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} (f+g)^*(t)$ j' nerostoucí,
 a to díky tomu, že $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q}$

Víme, že $(f+g)^{**} \leq f^{**} + g^{**}$, to znamená, že

$$\int_0^t (f+g)^*(s) ds \leq \int_0^t (f^*(s) + g^*(s)) ds,$$

a tedy podle Hardyova lemmatu je

$$\int_0^\infty (f+g)^*(t) \xi(t) dt \leq \int_0^\infty (f^*(t) + g^*(t)) \xi(t) dt$$

pro každou $\xi \geq 0$, $\xi \downarrow$. Použijeme to pro speciální volbu

$$\xi(t) = t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} h^*(t),$$

ktehá je nezáporná a nerostoucí. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{p, \mathbb{R}} &\leq \dots \leq \sup_{\|h\|_{L^{\mathbb{R}}} \leq 1} \left(\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} (f^*(t)+g^*(t)) h^*(t) dt \right) \\
&\quad \text{(subadd sup line)} \\
&\leq \sup_{\|h\|_{L^{\mathbb{R}}} \leq 1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} f^*(t) h^*(t) dt \\
&\quad + \sup_{\|h\|_{L^{\mathbb{R}}} \leq 1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} g^*(t) h^*(t) dt \\
&= \|f\|_{p, \mathbb{R}} + \|g\|_{p, \mathbb{R}}. \quad \square
\end{aligned}$$