Přednáška 7 20 $\frac{11}{XI}$ 20

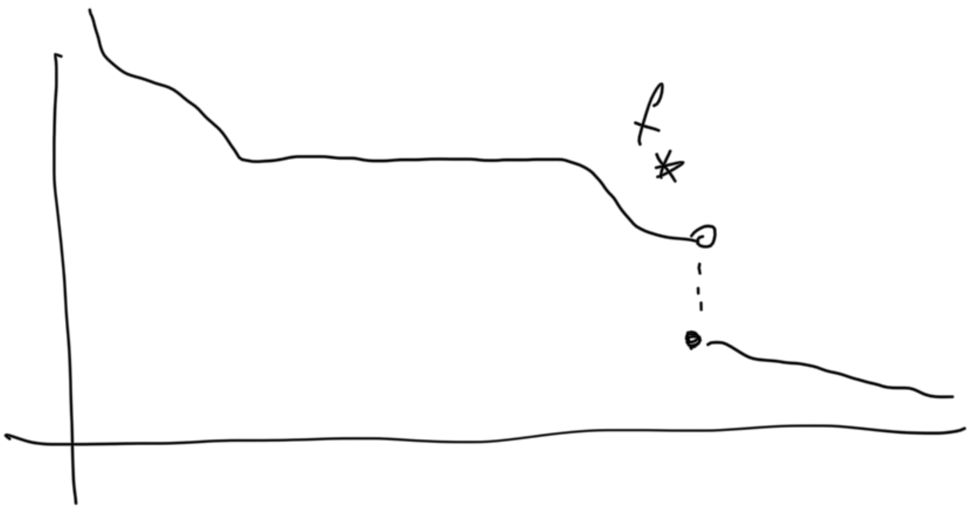
Poznámky

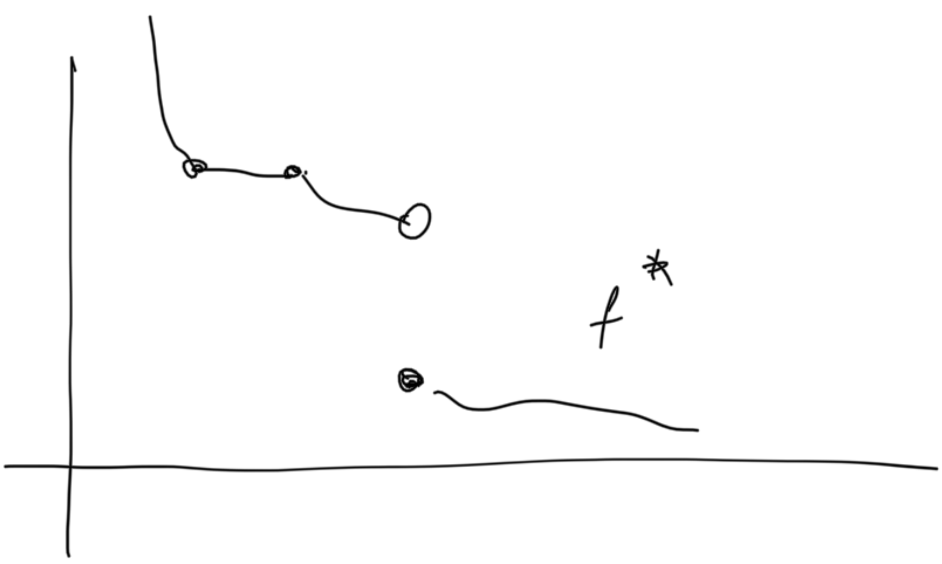
(a) f^* je nezáporná nerostoucí a zprava spojitá (bez důkazu)

(b) $(af)^* = |a| \cdot f^*$

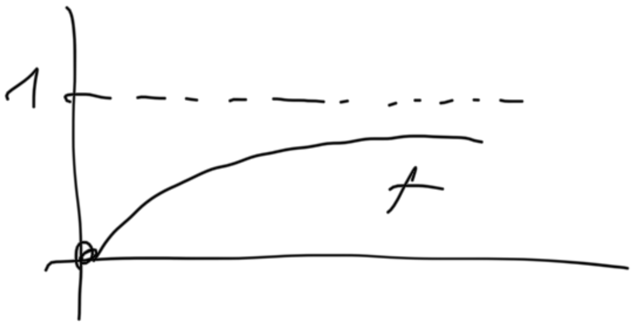
(c) $|f_n| \uparrow |f|$ a.e. $\Rightarrow f_n^* \uparrow f^*$

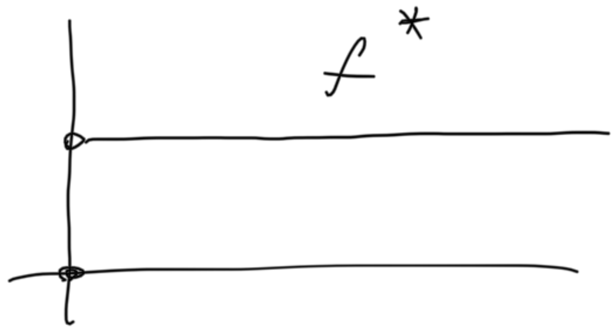
(d) je-li f_* klesající (ostře) a spojitá, pak $f^* = (f_*)^{-1}$





(e) při operaci $f \mapsto f^*$ se může část informace o f ztratit: např. pro $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ na $(0,\infty)$, pak





(takové funkce nás ale zajímají málokdy).

(f) $f \mapsto f^*$ se nehodí pro individuální funkce, je to teoretický nástroj pro výzkum prostorů funkcí a operátorů na nich.

(g) $f \sim f^*$ $\quad (f_* = (f^*)_*)$

(h) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$, $\quad p \in (0,\infty)$.

<u>Značení</u>: $\mathcal{M}(R,\mu) = \{ f : R \to \mathbb{R}^*, \text{ měř.} \}$,

$\mathcal{M}_+(R,\mu) = \{ f \in \mathcal{M}(R,\mu) ; f \geq 0 \}$,

$\mathcal{M}_0(R,\mu) = \{ f \in \mathcal{M}(R,\mu), f \text{ konečná a.e.} \}$.

<u>Tvrzení</u>. Nechť $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$. Potom

(a) $f^*(f_*(\lambda)) \leq \lambda \quad \forall \lambda \in (0,\infty)$,

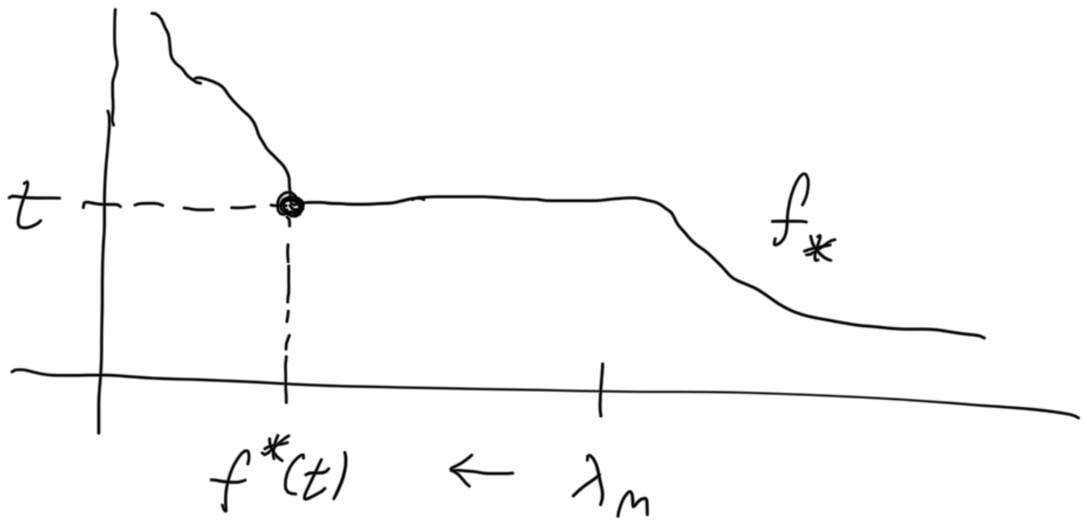
(b) $f_*(f^*(t)) \leq t \quad \forall t \in (0,\infty)$.

<u>Důkaz</u>. (a) Nechť $\lambda \in (0,\infty)$. Potom

$$f^*(f_*(\lambda)) = \inf \{ \lambda' ; f_*(\lambda') \leq f_*(\lambda) \}$$

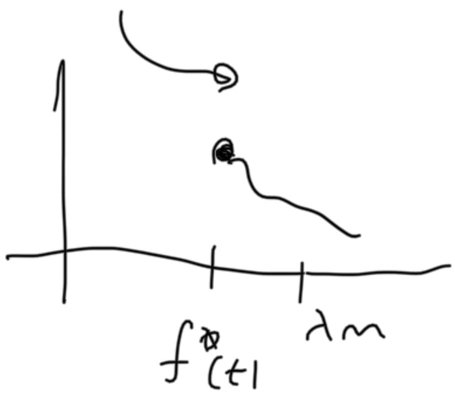
$\leq \lambda.$

(b) Nechť $t \in (0,\infty)$.



Potom $\exists\, \lambda_n \downarrow f^*(t)$ taková, že

$f_*(\lambda_n) \leq t$. Díky spojitosti



zprava funkce f_*

máme

$$f_*(f^*(t)) = \lim_{n\to\infty} f_*(\lambda_n) \leq t. \qquad \square$$

<u>Tvrzení</u>: $\forall p \in (0,\infty)\ \forall f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$

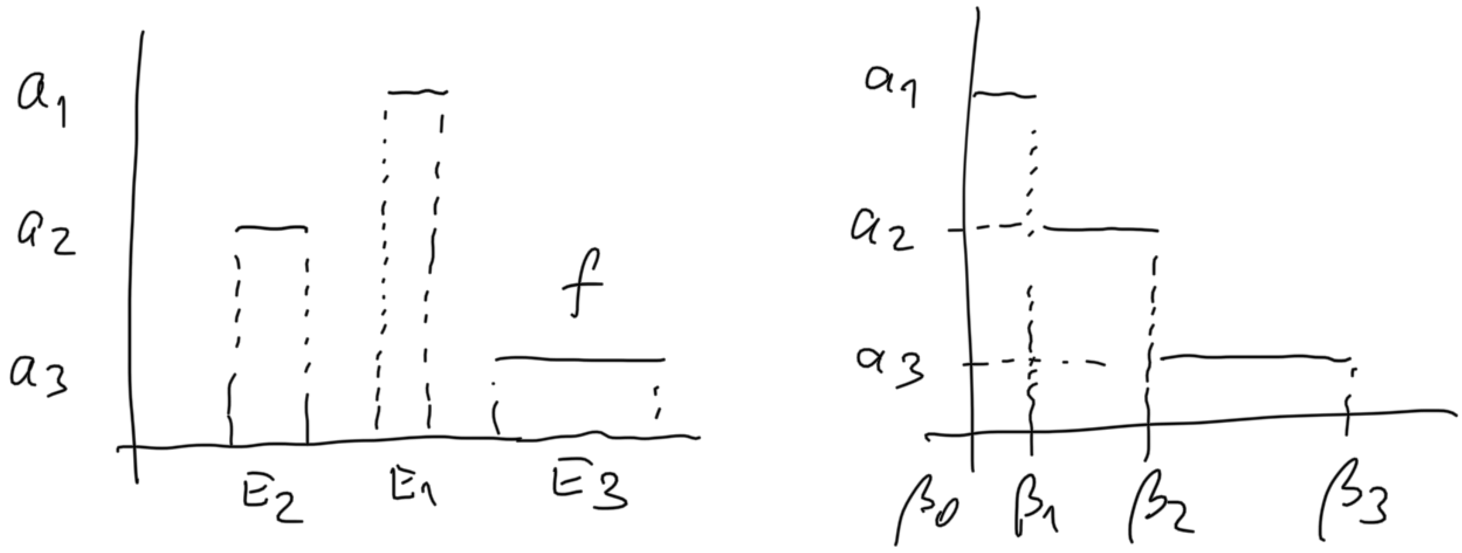
$$\int_R |f(x)|^p \, d\mu(x) = \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt.$$

<u>Důkaz.</u> Nechť $f \geq 0$ a f je jednoduchá,

tedy $\quad f = \sum_{j=1}^{J} a_j \chi_{E_j},$

$E_j \subset \mathbb{R}$ měřitelné, $0 < \mu(E_j) < \infty$.

Označme $\beta_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$.



Potom

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\mu = \sum_{j=1}^{J} a_j^p \mu(E_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} a_j^p (\beta_j - \beta_{j-1}) \qquad (\beta_0 = 0)$$

$$= \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt.$$

Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}, \mu)$ obecná, pak existuje posloupnost $\{s_n\}$ jednoduchých funkcí splňující $0 \le s_n \nearrow f$. Výsledek potom plyne z Fatouovy vlastnosti nerostoucího přerovnání. $\square$

<u>OTÁZKA</u>: Je $f \mapsto f^*$ subaditivní?

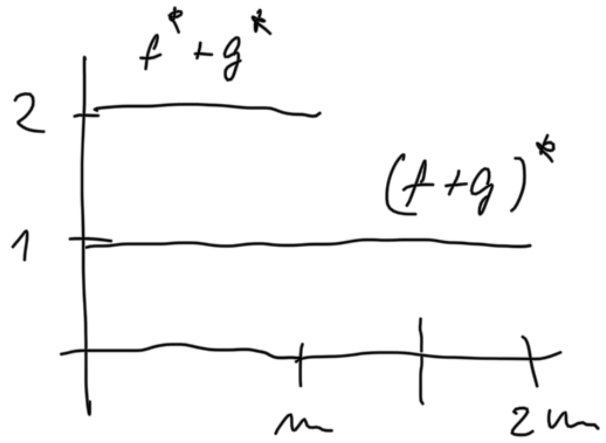
Odpověď: Není, neplatí pro

$E, F \subset \mathbb{R}$ měř., $\mu(E) = \mu(F) = m$,

$f = \chi_E$, $g = \chi_F$, $E \cap F = \emptyset$, platí

$$f^* = g^* = \chi_{[0,m)}, \quad (f+g)^* = \chi_{[0,2m)}.$$

Tedy např. $(f+g)^*(\frac{3}{2}m) = 1$, $f^*(\frac{3}{2}) + g^*(\frac{3}{2}) = 0$.



Místo toho platí pouze následující tvrzení!

Tvrzení. Nechť $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mu)$, $s, t \in (0, \infty)$.

Potom $(f+g)^*(s+t) \le f^*(s) + g^*(t)$.

POZNÁMKA. Nejčastěji se používá ve tvaru

$$(f+g)^*(t) \le f^*\left(\tfrac{t}{2}\right) + g^*\left(\tfrac{t}{2}\right),$$

případně $\le f^*(\lambda t) + g^*((1-\lambda)t)$, $\lambda \in [0,1]$.

Důkaz. Položme $x = f^*(s) + g^*(t)$

a $y = (f+g)_*(x)$.

Potom

$$y = \mu(\{|f+g| > f^*(s) + g^*(t)\}) \quad \left(\begin{smallmatrix}\text{def. } (f+g)_* \\ \text{a def. } \lambda\end{smallmatrix}\right)$$

$$\le \mu(\{|f| > f^*(s)\}) + \mu(\{|g| > g^*(t)\}) \quad (\text{inkluze})$$

$$= f_*(f^*(s)) + g_*(g^*(t)) \quad (\text{def } f_*, g_*)$$

$$\le s + t \quad (\text{Tvrzení (b)}).$$

Tedy

$$(f+g)^*(s+t) \le (f+g)^*(y) \quad ((f+g)^* \downarrow)$$

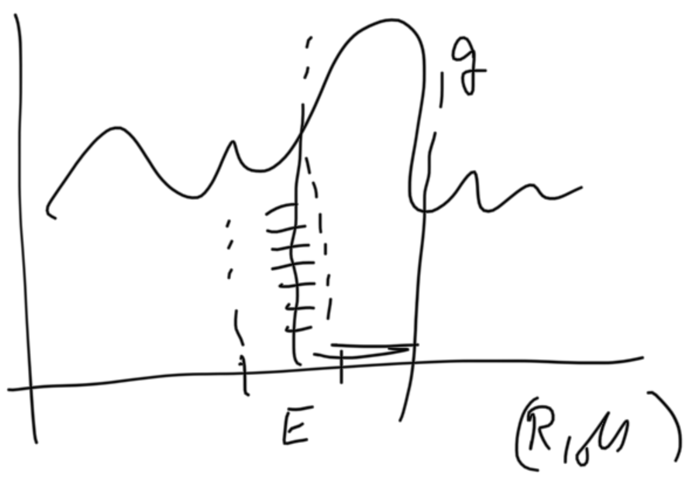
$$= (f+g)^*((f+g)_*(\lambda)) \quad (\text{def. } y)$$

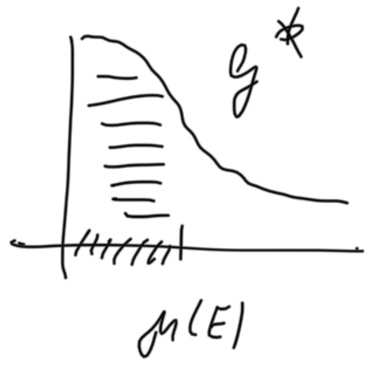
$$\le \lambda \quad (\text{Tvrzení (a)})$$

$$= f^*(s) + g^*(t). \quad (\text{def. } \lambda) \quad \square$$

<u>Tvrzení</u>. Nechť $g \in \mathcal{M}_+(R, \mu)$, $E \subset R$ měř.

Potom $\displaystyle\int_E g \, d\mu \le \int_0^{\mu(E)} g^*(t) \, dt.$

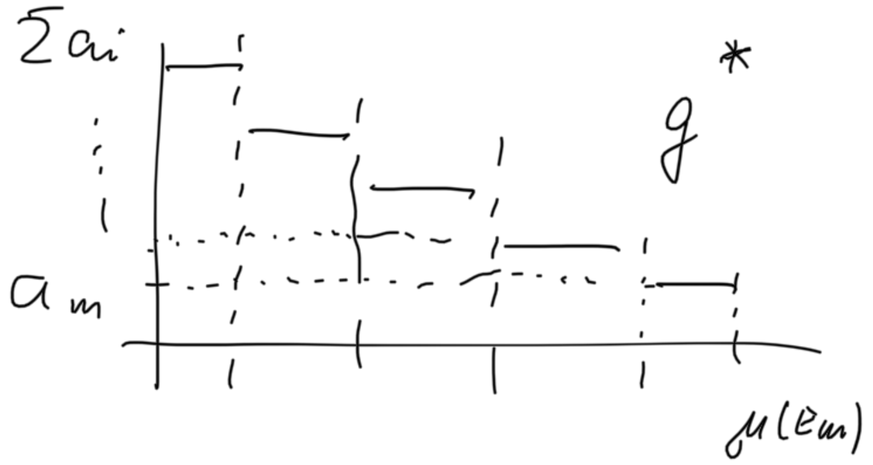




<u>Důkaz</u>. Předpokládejme, že

$$g = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}, \quad a_j > 0, \quad E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m,$$

$$0 < \mu(E_j) < \infty.$$



Potom $g^* = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}$. Tedy

$$\int_E g \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(E_j \cap E)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} a_j \min\{\mu(E_j), \mu(E)\}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E)} \chi_{(0,\mu(E_j))}(t) \, dt$$

$$= \int_0^{\mu(E)} g^*(t) \, dt.$$

Pro obecnou g z hustoty jednod. fn! $\square$

Věta 11 (Hardyova-Littlewoodova nerovnost).

Nechť $f, g \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$. Potom

$$\int_R |fg| \, d\mu < \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) \, dt.$$

Důkaz. Stačí pro $f, g \geq 0$ a jednoduché!

Nechť $f = \sum_{j=1}^m a_j \cdot \chi_{E_j}$, $E_1 \subset \dots \subset E_m$, $a_j > 0$.

Potom $f^* = \sum_{j=1}^m a_j \, \chi_{[0, \mu(E_j))}$

Tedy

$$\int_R fg \, d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \int_{E_j} g \, d\mu \quad (\text{def. } f)$$

$$\leq \sum_{j=1}^m a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(t) \, dt \quad (\text{Tvrzení})$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_j \, \chi_{[0,\mu(E_j))}(t)}_{f^*(t)} g^*(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty f^*(t)\, g^*(t)\,dt. \qquad \square$$

<u>DEFINICE.</u> Pro $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ a $t>0$ definujeme funkci $f^{**}: (0,\infty) \to [0,\infty]$ předpisem

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds.$$

<u>Poznámka.</u> $f^{**} = A(f^*) = M(f^*)$.

<u>Cíl</u>: dokázat, že $f \mapsto f^{**}$ subaditivní je.