Přednáška 6 $\qquad 20\frac{3}{\text{XI}}20$

2.3. INTERPOLACE SLABÝCH ODHADŮ

Připomeňme:

$$Af(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \quad x\in(0,\infty),\ f\in L^1_{loc}(0,\infty),$$

víme: $A: L^p(0,\infty)\to L^p(0,\infty)\ \ \forall p\in(1,\infty]$,

speciálně

$$A: L^\infty(0,\infty)\to L^\infty(0,\infty) \quad (\text{„pravý kraj"})$$
(s konstantou 1)

a navíc

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda\,|\{|Af|>\lambda\}| \le \|f\|_{L^1(0,\infty)}$$

(„levý kraj").

Dále víme, že $A: L^1(0,\infty)\not\to L^1(0,\infty)$.

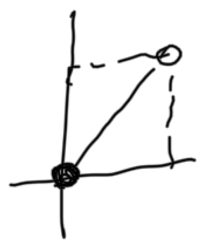
Cíl: - chceme odtud vyvodit, že

$$A: L^p(0,\infty)\to L^p(0,\infty)\quad \forall p\in(1,\infty)$$

- pokud možno s nějakým odhadem konstanty (normy $\|T\|_{L^p(0,\infty)\to L^p(0,\infty)}$)

Poznámka: Víme, že nemůžeme použít R-T.

Věta 10 (interpolace slabých odhadů v diagonálním případě).



Nechť (R,μ) a (S,ν) jsou prostory se σ-konečnými mírami. Nechť T je kvasilineární operátor ve smyslu, že $\exists K>0 \ \forall f,g \in \mathcal{D}(T)$:

$$|T(f+g)| \leq K\,(|Tf|+|Tg|).$$

Nechť $\|Tf\|_{L^\infty(S,\nu)} \leq C_\infty \|f\|_{L^\infty(R,\mu)}$

a

$$\sup_{\lambda\in(0,\infty)} \lambda\,\nu(\{y\in S;\ |Tf(y)|>\lambda\}) \leq C_1 \|f\|_{L^1(R,\mu)}.$$

Potom

$$\|Tf\|_{L^p(S,\nu)} \leq C_p \|f\|_{L^p(R,\mu)}$$

pro každé $p\in(1,\infty]$ a navíc

$$C_p \leq 2K\, C_1^{\frac{1}{p}} C_\infty^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

<u>Důkaz.</u> Nejprve si všimneme, že $(p\in(1,\infty))$

$$\|Tf\|^p_{L^p(S,\nu)} = \int_S |Tf(y)|^p\,d\nu(y)$$

$$= \int_S \int_0^{|Tf(y)|} p\lambda^{p-1}\,d\lambda\,d\nu(y)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \int_{\{y\in S;\ |Tf(y)|>\lambda\}} d\nu(y) \quad d\lambda$$

$$= \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\, \nu\left(\{y\in S;\ |Tf(y)|>\lambda\}\right) d\lambda .$$

Dále si povšimněme, že, je-li $f = g + h$, potom pro každé $\lambda \in (0,\infty)$

$$\{|Tf|>\lambda\} = \{|T(g+h)|>\lambda\}$$

$$\subseteq \{K(|Tg|+|Th|)>\lambda\}$$

$$= \{|Tg|+|Th| > \tfrac{\lambda}{K}\}$$

$$\subseteq \{|Tg|>\tfrac{\lambda}{2K}\} \cup \{|Th|>\tfrac{\lambda}{2K}\}.$$

Tedy

$$\nu(\{|Tf|>\lambda\}) \le \nu(\{|Tg|>\tfrac{\lambda}{2K}\}) + \nu(\{|Th|>\tfrac{\lambda}{2K}\}).$$

Položme $g = f\chi_{\{|f|>\frac{\lambda}{2KC_\infty}\}}$,

$$h = f\chi_{\{|f|\le\frac{\lambda}{2KC_\infty}\}}.$$

Potom $f = g + h$.

Pozor, g, h závisejí na λ!

Tedy
$$\{|Tf| > \lambda\} \subseteq \{|Tg| > \tfrac{\lambda}{2K}\} \cup \{|Th| > \tfrac{\lambda}{2K}\}.$$

Protože (z předpokladu)
$$\|Th\|_{L^\infty(S,\nu)} \leq C_\infty \|h\|_{L^\infty(S,\nu)}$$
$$\leq C_\infty \cdot \frac{\lambda}{2K \cdot C_\infty} = \frac{\lambda}{2K},$$

takže $\{|Th| > \frac{\lambda}{2K}\}$ je prázdná. (!)

Tedy
$$\{|Tf| > \lambda\} \subseteq \{|Tg| > \tfrac{\lambda}{2K}\}. \qquad (*)$$

Zpět k odhadu normy. Máme
$$\|Tf\|^p_{L^p(S,\nu)} = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \nu(\{|Tf| > \lambda\})\, d\lambda$$
$$\overset{(*)}{\leq} p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu(\{|Tg| > \tfrac{\lambda}{2K}\})\, d\lambda$$
$$\overset{\text{(slabý odhad)}}{\leq} p \cdot \int_0^\infty \lambda^{p-1} C_1 \frac{2K}{\lambda} \int_R |g(x)|\, d\mu(x)\, d\lambda$$

$$= C_1 p\, 2K \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\{x\in R;\ |f(x)|>\frac{\lambda}{2KC_\infty}\}} |f(x)|\, d\mu(x)\, d\lambda$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} 2KC_1 p \int_R |f(x)| \int_0^{2KC_\infty |f(x)|} \lambda^{p-2}\, d\lambda\, d\mu(x)$$

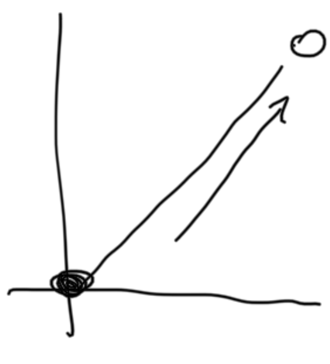
$$= 2KC_1 p \int_R |f(x)| \cdot \frac{1}{p-1} \left(2KC_\infty |f(x)|\right)^{p-1} d\mu(x)$$

$$= (2K)^p \frac{p}{p-1} C_1\, C_\infty^{p-1} \int_R |f(x)|^p\, d\mu(x),$$

a tvrzení plyne povýšením na $\frac{1}{p}$. $\square$

<u>POZNÁMKA</u>. Povšimněme si výrazu $\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p}$ v odhadu $\|T\|_{L^p(0,\infty)\to L^p(0,\infty)}$.

Tento výraz ilustruje, že (a jak rychle) se omezenost T „kazí" při $p \to 1_+$.



Důsledek: $A: L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)$, $p \in (1,\infty]$,

přičemž $\|A\|_{L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty)} \leq 2 \frac{p}{p-1}$

(neboť $K = 1$, $C_1 = 1$, $C_\infty = 1$).

Pozn. Pro tento operátor víme, že konstantu 2 lze zahodit.

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definujeme

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

kde sup bereme přes všechny krychle s hranami rovnoběžnými se souřadnými osami obsahující x. Operátor $M: f \mapsto Mf$ nazýváme Hardyův-Littlewoodův maximální operátor.

Poznámky. Platí $M: L^\infty \to L^\infty$

a $\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda |\{Mf > \lambda\}| \leq C \|f\|_1$

(první je triviální, druhý je důsledkem Vitaliovy věty o pokrytí). Podle Věty 10 tedy $M: L^p \to L^p$ $\forall p \in (1,\infty]$.

Lze to dokázat i bez interpolace, například tzv. metodou rotací. K tomu literatura:

Miguel de Guzmán:

Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$,

LN 481, Springer 1975.

Poznámka. Větu 10 nelze použít pro Rieszův potenciál, protože jednak není diagonální, ale hlavně pro něj nemáme odhad na „pravém kraji".

Hledáme tedy silnější metodu.

Budeme potřebovat nové pojmy a techniky, zejména

– symetrisaci

– nové prostory funkcí.

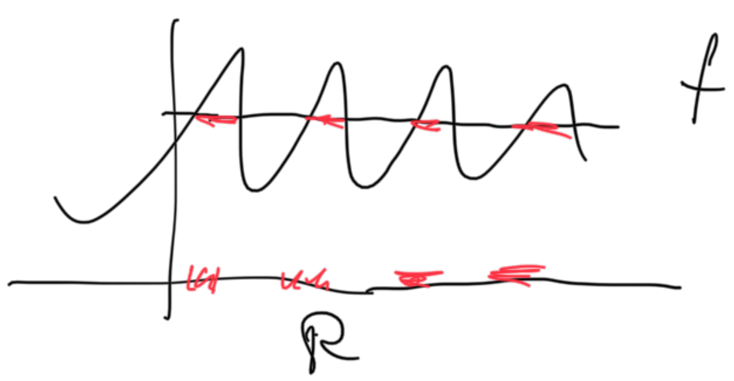
2.4. LORENTZOVY PROSTORY

DEFINICE. Nechť (R,μ) je prostor se σ-konečnou mírou, $\mathcal{M}(R,\mu)$ je množina všech μ-měřitelných skalárních funkcí na R, $\mathcal{M}_0(R,\mu)$ je množina všech $f \in \mathcal{M}(R,\mu)$, které jsou s.v. konečné.

Pro $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ definujeme distribuční funkci $f_* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ předpisem

$$f_*(\lambda) = \mu\left(\{x \in R,\ |f(x)| > \lambda\}\right), \quad \lambda \in [0,\infty).$$

Tvrzení. Pro $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ je f_* nezáporná, nerostoucí a zprava spojitá.



Důkaz. Pouze spojitost zprava vyžaduje důkaz. Položme $E_\lambda = \{|f| > \lambda\}$, potom $E_{\lambda_2} \subset E_{\lambda_1}$ kdykoli $\lambda_1 < \lambda_2$ a

$$E_{\lambda_0} = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E_\lambda = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\lambda_0 + \frac{1}{n}}, \quad \text{a tedy}$$

$$f_*(\lambda_0) = \mu(E_{\lambda_0}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\lambda_0+\frac{1}{n}}\right),$$

$$f_*\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu\left(E_{\lambda+\frac{1}{n}}\right) \xrightarrow{\text{Lev}} \mu(E_{\lambda_0}) = f_*(\lambda_0).$$

$\square$

Poznámky. $\forall f, g, f_n \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ platí

(a) $|g| \leq |f|$ μ-s.v. $\Longrightarrow g_* \leq f_*$,

(b) $(af)_*(\lambda) = f_*\left(\frac{\lambda}{|a|}\right)$, $\lambda \in [0, \infty)$,

(c) $(f+g)_*(\lambda_1 + \lambda_2) \leq f_*(\lambda_1) + g_*(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty)$,

(d) $|f| \le \liminf |f_n|$ μ - s.v., pak

$f_* \le \liminf (f_n)_*$, speciálně

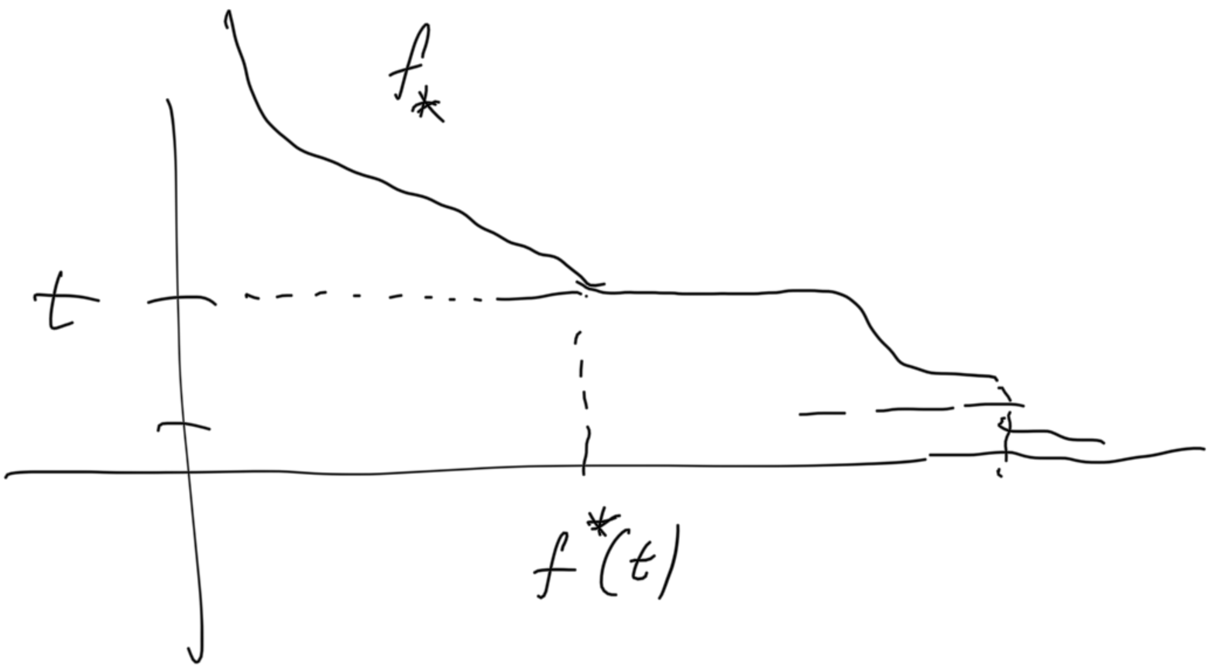
$|f_n| \nearrow |f|$ s.v. $\Rightarrow (f_n)_* \nearrow f_*$.

DEFINICE. Řekneme, že $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ a $g \in \mathcal{M}_0(S,\nu)$ jsou souměřitelné, jestliže $f_* = g_*$ (značíme $f \sim g$).

DEFINICE. Nechť $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$.

Nerostoucím přerovnáním f nazýváme funkci $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ definovanou předpisem

$$f^*(t) = \inf \{\lambda ; \mu(\{x \in R ; |f(x)| > \lambda\}) \le t\}.$$



<u>DEFINICE.</u> Nechť $p,q \in (0,\infty]$.

Definujeme funkcionál $\|\cdot\|_{p,q}$

na $\mathcal{M}_0(R,\mu)$ s hodnotami v $[0,\infty]$

předpisem

$$\|f\|_{p,q} = \| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t) \|_{L^q(0,\infty)} .$$

Dále definujeme prostor

$$L^{p,q}(R,\mu) = \{ f \in \mathcal{M}_0(R,\mu), \ \|f\|_{p,q} < \infty \}.$$

Množinu $L^{p,q} = L^{p,q}(R,\mu)$ nazýváme

Lorentzovým prostorem.