Přednáška 5

20 $\frac{27}{x}$ 20

POZNÁMKA (representace řešení rovnic)

Poissonova rovnice $\quad -\Delta u = \mu \quad$ na $\mathbb{R}^n$

μ míra, nebo $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

u ... jediné řešení, $u(x) \to 0$ pro $|x| \to \infty$

Jak získat u pomocí μ?

$$G(x,y) = \begin{cases} |x-y|^{-n+2}, & \text{je-li } n \geq 3 \\ -\log|x-y|, & \text{je-li } n = 2 \end{cases}$$

pak $\quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x,y)\, d\mu(y)$.

DEFINICE. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\gamma \in (0,n)$. Pak

Rieszův potenciál I_γ je def. předpisem

$$I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\, dy,$$

možno definovat i pro míry (borel. na $\mathbb{R}^n$)

$$I_\gamma \mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}.$$

Potom: $|u(x)| \lesssim I_2(|\mu|)(x)$, $n \geq 3$

a $|Du(x)| \lesssim I_1(|\mu|)(x)$

Tedy: víme-li něco o chování I_γ na prostorech funkcí, zjistíme cosi o velikosti řešení PDR.

OTÁZKA: Pro jaká p, q platí $I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$?

POZNÁMKA: Někdy se definuje $I_\gamma f = \frac{1}{c_\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)\,dy}{|x-y|^{n-\gamma}}$,

kde $c_\gamma = \pi^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\gamma}{2}\right)}$.

První krok: Odvodíme nutnou balanční podmínku na p, q, γ, n, aby

$$I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n).$$

Jak? Použijeme techniku „komutace s dilatačním operátorem".

DEFINICE. Pro $\delta \in (0,\infty)$ definujeme dilatační operátor τ_δ předpisem

$$\tau_\delta f(x) = f(\delta x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Pozorování:

$$\|\tau_\delta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \delta^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

(věta o substituci: $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\delta x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \frac{dy}{\delta^n}\right)^{1/p}$)

Tedy, pro $\delta \in (0,\infty)$ platí

$$\tau_{\frac{1}{\delta}} I_\gamma \tau_\delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\delta y)}{\left|\frac{x}{\delta} - y\right|^{n-\gamma}} dy .$$

znovu věta o substituci: $z = \delta y$:

$$\tau_{\frac{1}{\delta}} I_\gamma \tau_\delta f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(z)}{\left|\frac{x}{\delta} - \frac{z}{\delta}\right|^{n-\gamma}} \frac{dz}{\delta^n}$$
$$= \delta^{-\gamma} I_\gamma f(x) .$$

Předp., že $I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$,

pak $\exists C \forall f: \|I_\gamma f\|_q \le C \|f\|_p$,

pak $\exists C \forall f \forall \delta: \|I_\gamma \tau_\delta f\|_q \le C \|\tau_\delta f\|_p$,

tedy $\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n}{q}} \|\tau_{\frac{1}{\delta}} I_\gamma \tau_\delta f\|_q \le C \delta^{-\frac{n}{p}} \|f\|_p$, tedy $\delta^{-\frac{n}{q}-\gamma} \| I_\gamma f \|_q \le C \delta^{-\frac{n}{p}} \| f \|_p$,

tj. $\delta^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\gamma} \cdot \| I_\gamma f \|_q \le C \| f \|_p$.

Tedy musí platit $\frac{n}{p} - \frac{n}{q} - \gamma = 0$.

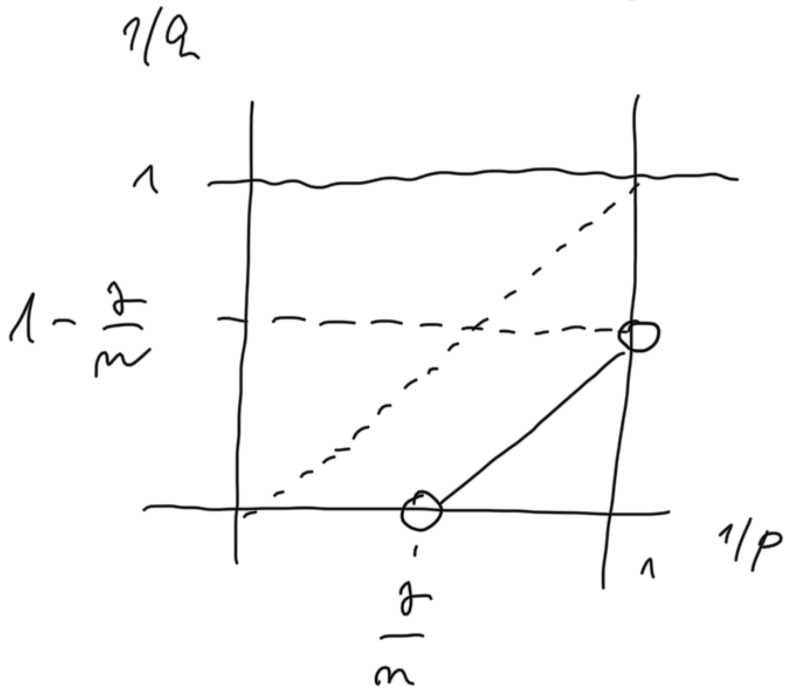
Tudíž nutná podmínka pro $I_\gamma : L^p \to L^q$ je

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{n}.$$

Speciálně, nutně musí platit

$$1 \le p \le \frac{n}{\gamma} \quad \text{a} \quad \frac{n}{n-\gamma} \le q \le \infty.$$

<u>OTÁZKA</u>: Platí $I_\gamma : L^p \to L^q$ pro $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\gamma}{n}$?



Lze to dokázat interpolací?

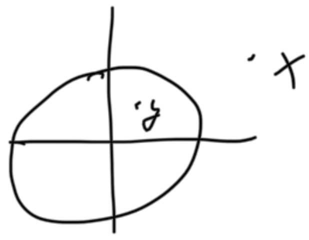
Lze to dokázat pomocí R-T věty?

Pro R-T větu bychom potřebovali, aby I_γ byl silných typů $\left(1, \frac{n}{n-\gamma}\right)$ a $\left(\frac{n}{\gamma}, \infty\right)$.

Avšak ani jeden z typů není splněn.

Položme $f = \chi_{B(0,1)}$, potom $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

pro $|x| \ge 1$ a $|y| \le 1$ platí



$|x-y| \le |x| + |y| \le 2|x|$, a tedy

$$I_\gamma f(x) = \int_{B(0,1)} \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}} \ge \frac{|B(0,1)|}{2|x|^{n-\gamma}},$$

a tedy $\quad I_\gamma f \notin L^{\frac{n}{n-\gamma}}(\mathbb{R}^n)$.

Tedy $\quad I_\gamma : L^1 \not\to L^{\frac{n}{n-\gamma}}$.

Položme $\quad f(x) = |x|^{-\gamma}\left(\log \frac{1}{|x|}\right)^{-1} \chi_{B(0,\frac{1}{2})}$,

pak $f \in L^{\frac{n}{\gamma}}(\mathbb{R}^n)$, ale $\lim\limits_{x\to 0} I_\gamma f(x) = \infty$,

takže $I_\gamma f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, a tedy

$$I_\gamma : L^{\frac{n}{\gamma}} \not\to L^\infty.$$

Tudíž R-T větu nelze použít.

<u>Poznámka:</u> Platí ale slabší odhad (slabší než $\quad I_\gamma : L^1 \to L^{\frac{n}{n-\gamma}}$).

Věta 9 (slabý odhad pro Rieszův potenciál).

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\gamma \in (0,n)$. Potom existuje $C>0$ taková, že $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ platí

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \left| \{ |I_\gamma f| > \lambda \} \right|^{1-\frac{\gamma}{n}} \le C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

POZNÁMKA. Nerovnost ve Větě 9 je slabší než $I_\gamma : L^1 \to L^{\frac{n}{n-\gamma}}$, neboť $\forall \lambda \in (0,\infty)$ platí

$$\|I_\gamma f\|_{\frac{n}{n-\gamma}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\gamma f|^{\frac{n}{n-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$\ge \left(\int_{\{|I_\gamma f| > \lambda\}} |I_\gamma f|^{\frac{n}{n-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$\ge \left(\int_{\{|I_\gamma f| > \lambda\}} \lambda^{\frac{n}{n-\gamma}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

$$= \lambda \left| \{ |I_\gamma f| > \lambda \} \right|^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

(Čebyševova nerovnost).

Důkaz (Věty 9). Díky homogenitě stačí dokázat

$$\left| \{ |I_\gamma f| > 1 \} \right|^{1-\frac{\gamma}{n}} \le C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

(jinak přejdu od f k $\frac{f}{\lambda}$).

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ a platí: $|E| = |B(x,R)|$, $R>0$.

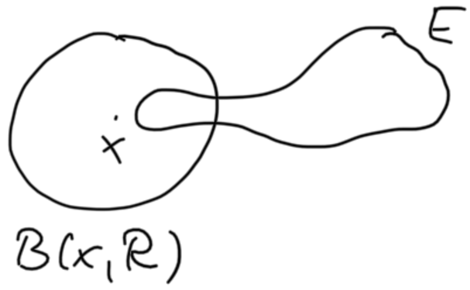
Potom tvrdíme, že

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}} \le \int_{B(x,R)} \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}} = C_\gamma R^\gamma = C_\gamma |E|^{\frac{\gamma}{n}}.$$

dokážeme

cvičení

z předpokladu



Jest $E = (E \cap B) \cup (E \setminus B)$

a $B = (E \cap B) \cup (B \setminus E)$. Tedy

$$\left.\begin{aligned} |E| &= |E \cap B| + |E \setminus B| \\ \| \\ |B| &= |E \cap B| + |B \setminus E| \end{aligned}\right\} \Rightarrow |E \setminus B| = |B \setminus E|.$$

Tudíž

$$\int_{E \setminus B} \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}} \le R^{\gamma-n} |E \setminus B|$$

$$= R^{\gamma-n} |B \setminus E| \le \int_{B \setminus E} \frac{dy}{|x-y|^{n-\gamma}},$$

takže celkem

$$\int_E = \int_{E \cap B} + \int_{E \setminus B} \le \int_{E \cap B} + \int_{B \setminus E} = \int_B .$$

Tím je dokázáno tvrzení.

Speciálně pro $E = \{ |I_\gamma f| > 1 \}$

dostaneme $\displaystyle\int_{\{|I_\gamma f|>1\}} \frac{dx}{|x-y|^{n-\gamma}} \leq C_\gamma \left|\{|I_\gamma f|>1\}\right|^{\frac{\gamma}{n}}.$

Celkem

$$\left|\{|I_\gamma f|>1\}\right| = \int_{\{|I_\gamma f|>1\}} dx$$

$$\leq \int_{\{|I_\gamma f|>1\}} |I_\gamma f(x)|\, dx$$

$$= \int_{\{|I_\gamma f|>1\}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\, dy \right| dx$$

$$\overset{\text{Fubini}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\{|I_\gamma f|>1\}} \frac{dx}{|x-y|^{n-\gamma}}\, dy$$

$$\overset{\text{(tvrzení)}}{\leq} C_\gamma \left|\{|I_\gamma f|>1\}\right|^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy$$

Tedy

$$(*) \quad \left|\{|I_\gamma f|>1\}\right|^{1-\frac{\gamma}{n}} \leq C_\gamma \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

$\square$

ZÁVĚR. Nemáme $I_\gamma : L^1 \to L^{\frac{3}{3-\gamma}}$, máme pouze (*). Umíme to interpolovat? A co platí na opačném kraji?

Poznámka. Uvedené chování I_γ na „kraji" je typické i pro další důležité operátory.

Příklad. Definujme Hardyův průměrovací operátor A předpisem

$$Af(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,$$

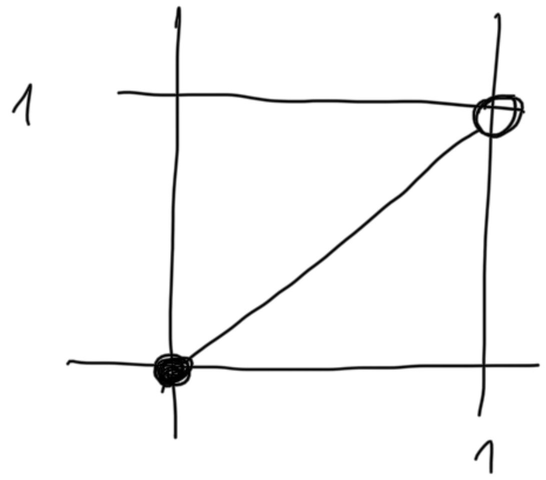
kde $f \in L^1_{loc}(0,\infty)$.

OTÁZKA. Pro která $p \in [1,\infty]$ platí

$$A : L^p(0,\infty) \to L^p(0,\infty) \,?$$

ODPOVĚĎ: Platí $\forall p \in (1,\infty]$

a neplatí pro $p = 1$.



Důkaz pro $p \in (1,\infty)$ (pro $p=\infty$ triviální)

$$\|Af\|_p^p = \int_0^\infty x^{-p} \left(\int_0^x f(t)\, t^{\frac{1}{pp'}} t^{-\frac{1}{pp'}}\, dt \right)^p dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int_0^\infty x^{-p} \int_0^x f(t)^p t^{\frac{1}{p'}} dt \left(\int_0^x t^{-\frac{1}{p}} dt \right)^{p-1} dx$$

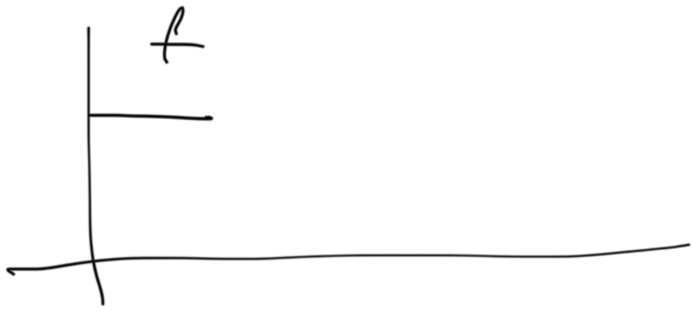
$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty f(t)^p t^{\frac{1}{p'}} \int_t^\infty x^{-p} (p')^{p-1} x^{\frac{1}{p'}(p-1)} dx$$

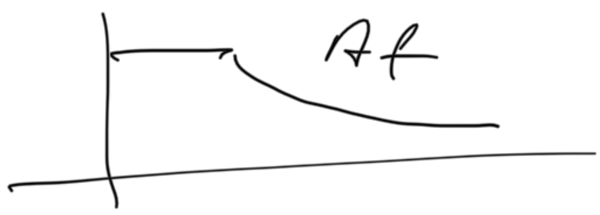
$$= (p')^p \int_0^\infty f(t)^p dt,$$

takže $\quad \|Af\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p, \quad p>1.$

Důkaz pro $p=1$:

$f = \chi_{(0,1)}$, pak $Af(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$





$f \in L^1$, $Af \notin L^1$

nebo: $f(x) = \dfrac{\chi_{(0,1)}}{x \log^2 \frac{e}{x}}$,

pak $Af(x) \geq \dfrac{\chi_{(0,1)}}{x \log \frac{e}{x}}$,

a tedy $f \in L^1$, ale $Af \notin L^1$. $\square$

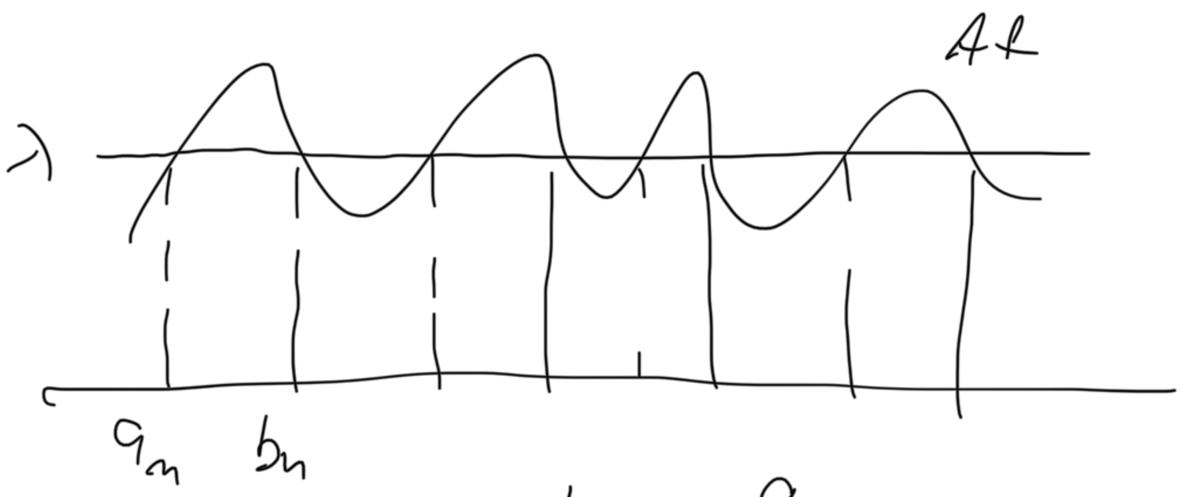
Ale platí slabý odhad:

$$\sup_{\lambda \in (0,\infty)} \lambda \left| \{ |Af| > \lambda \} \right| \leq c \, \|f\|_{L^1(0,\infty)} \qquad (*)$$

<u>Důkaz (*)</u> Nechť $\lambda > 0$, pak Af je spojitá,

a tedy $\{Af > \lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$,

(a_n, b_n) disjunktní a $Af(a_n) = Af(b_n) = \lambda$.



Tedy
$$\int_{a_n}^{b_n} f = \int_0^{b_n} f - \int_0^{a_n} f = \lambda b_n - \lambda a_n$$
$$= \lambda (b_n - a_n),$$

takže
$$|\{|Af| > \lambda\}| = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} |f|$$
$$\leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 . \qquad \square$$

Pozn. K této nerovnosti máme „na druhém konci" $A: L^\infty \to L^\infty$.

Cíl: využít těchto informací k interpolačnímu důkazu $A: L^p \to L^p$.