Přednáška 4 $\qquad$ 20. 10. 2020

Důkaz Věty 6. (a) pro komplexní prostory

Pro každé $z\in\mathbb{C}$ položme

$$\alpha(z)=\frac{1-z}{p_0}+\frac{z}{p_1} \quad \text{a} \quad \beta(z)=\frac{1-z}{q_0}+\frac{z}{q_1}.$$

Potom $\alpha(\theta)=\frac{1}{p}$, $\beta(\theta)=\frac{1}{q}$. Věta bude dokázána, pokud ověříme, že

$$\left|\int_S (Tf)\cdot g\,d\nu\right| \leq M_0^{1-\theta}\cdot M_1^{\theta}$$

pro všechny jednoduché funkce f,g splňující $\|f\|_{L^p(\mu)}=\|g\|_{L^{q'}(\nu)}=1$.

Předpokládejme nejprve, že $p<\infty$ a $q'<\infty$. Potom lze f,g zapsat ve tvaru

$$f=\sum_{j=1}^{J} a_j\chi_{A_j}, \qquad g=\sum_{k=1}^{K} b_k\chi_{B_k},$$

kde $J,K\in\mathbb{N}$, A_j jsou disjunktní podmnožiny R splňující $\mu(A_j)<\infty$, B_k jsou disjunktní podmnožiny S splňující $\nu(B_k)<\infty$, a koeficienty $a_j, b_k\in\mathbb{C}$ splňující

$$\sum_{j=1}^{J}|a_j|^p\mu(A_j)=\sum_{k=1}^{K}|b_k|^{q'}\mu(B_k)=1.$$

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme funkce f_z a g_z předpisy

$$f_z = |f|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} e^{i \arg f},$$

$$g_z = |g|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} e^{i \arg g}.$$

Bude užitečné si uvědomit, že $f_\theta = f$ a $g_\theta = g$.

Definujme dále

$$F(z) = \int_S (Tf_z) g_z \, d\nu, \quad z \in \mathbb{C},$$

takže speciálně $F(\theta) = \int_S (Tf) g \, d\nu$.

Tedy chceme dokázat, že

$$|F(\theta)| \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta}.$$

To vyplyne z Hadamardovy věty (Věta 5) jakmile ověříme, že F je omezená analytická funkce na $\overline{\Omega}$ a platí

(*) $|F(iy)| \leq M_0$ a $|F(1+iy)| \leq M_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

<u>F je analytická</u>: z linearity T plyne, že $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$F(z) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} |a_j|^{\frac{\alpha(z)}{\alpha(\theta)}} |b_k|^{\frac{1-\beta(z)}{1-\beta(\theta)}} \int_S (T\chi_{A_j}) \chi_{B_k} e^{i(\arg a_j + \arg b_k)} \, d\nu,$$

tedy F je konečná lineární kombinace exponenciál, takže je dokonce celá.

<u>F je omezená</u>: reálné části $\alpha(z)$ a $\beta(z)$ jsou zřejmě omezené na $\overline{\Omega}$, takže F je omezená na $\overline{\Omega}$.

<u>Důkaz (*)</u>: Pro každé $y \in \mathbb{R}$ platí

$$|F(iy)| = \left| \int_S (Tf_{iy}) g_{iy} \, d\nu \right| \qquad (\text{def. } F)$$

$$\leq \| Tf_{iy} \|_{L^{q_0}(\nu)} \cdot \| g_{iy} \|_{L^{q_0'}(\nu)} \qquad (\text{Hölder})$$

$$\leq M_0 \cdot \| f_{iy} \|_{L^{p_0}(\mu)} \cdot \| g_{iy} \|_{L^{q_0'}(\nu)} . \qquad \left(\begin{array}{c}\text{silný typ} \\ (p_0, q_0)\end{array}\right)$$

Z definice $\alpha(z)$ a $\beta(z)$ plyne, že
$\operatorname{Re} \alpha(iy) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-iy}{p_0} + \frac{iy}{p_1} \right) = \frac{1}{p_0}$ a $\alpha(\theta) = \frac{1}{p}$.

Tedy

$$\| f_{iy} \|_{L^{p_0}(\mu)}^{p_0} = \sum_{j=1}^{J} \left| |a_j|^{\frac{\alpha(iy)}{\alpha(\theta)}} \right|^{p_0} \mu(A_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} |a_j|^p \mu(A_j)$$

$$= \|f\|_{L^p(\mu)}^p = 1.$$

Obdobně

$\operatorname{Re} \beta(iy) = \frac{1}{q_0}$, $\beta(\theta) = \frac{1}{q}$, takže

$$\|g_{iy}\|_{L^{q_0'}(\nu)}^{q_0'} = \sum_{k=1}^{K} \left| |b_k|^{\frac{1-\beta(iy)}{1-\beta(\theta)}} \right|^{q_0'} \nu(B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} |b_k|^{\frac{1-\frac{1}{q_0}}{1-\frac{1}{q}} \cdot q_0'} \nu(B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} |b_k|^{q'} \nu(B_k)$$

$$= \|g\|_{L^{q'}(\nu)}^{q'} = 1.$$

Odtud plyne $|F(iy)| \leq M_0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.

Obdobně (s využitím silného typu (p_1, q_1) pro T s normou M_1) lze dokázat, že

$$|F(1+iy)| \leq M_1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Odtud plyne (*).

Tím je věta dokázána pro $p<\infty$, $q'<\infty$.

Je-li $\theta=0$, nebo $\theta=1$, pak je tvrzení triviální!
Předpokládejme, že $\theta\in(0,1)$. Je-li $p=\infty$ a $q'=\infty$, pak nutně $p_0=p_1=\infty$ a $q_0=q_1=1$, a tedy není co dokazovat.
Je-li $p<\infty$ a $q'=\infty$, pak definujeme f_z stejně, a $g_z=g$ $\forall z\in\mathbb{C}$, důkaz proběhne stejně.
Je-li $p=\infty$ a $q'<\infty$, def g_z stejně a $f_z=f$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

Tím je dokázána R-T věta pro komplexní prostory.

(b) pro reálné prostory
Je-li T lineární operátor silného typu (r,s) s normou N, pak jej lze rozšířit na (komplexní) lineární operátor $\tilde{T}(f+ig)=Tf+iTg$ silného typu (r,s) (vzhledem ke komplexním prostorům), jelikož norma $\tilde{N}$ splňuje
$N\leq\tilde{N}\leq 2N$. Tvrzení plyne z (a).
Je-li navíc $p_i\leq q_i$, $i=0,1$, konstantu 2 lze vynechat (Rieszova věta o konvexitě).

$\square$

Důkaz Věty 7. Víme, že

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad \text{(triviální)}$$

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \qquad \text{(Plancherel)}.$$

Položme $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = \infty$, $q_1 = 2$.

Zvolme $p \in [1,2]$. K němu dopočteme nejprve θ:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = 1-\theta + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2},$$

a posléze q:

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} = \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}.$$

Tedy z R-T věty plyne, že

$$\mathcal{F}: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1,2]. \qquad \square$$

Důkaz Věty 8. Vyjdeme z triviálních nerovností (pišme $\|\cdot\|_q$ místo $\|\cdot\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$)

(1) $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$,

(2) $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.

Tyto vztahy lze interpretovat jako omezenost konvolutoru, tj. operátoru T_f, kde $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a

$$T_f(g) = f * g.$$

Potom z (1): $T_f : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$, $M_0 = \|f\|_1$,

a z (2): $T_f : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $M_1 = \|f\|_1$.

Podle R-T věty tedy $\forall q \in [1,\infty]$

$$T_f : L^q(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n), \quad M_\theta = \|f\|_1,$$

to jest

(3) $\|f*g\|_q \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_q$.

K tomu přidejme

(4) $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_{q'} \cdot \|g\|_q$. (Hölder & transl. invariance Leb. míry)

Tyto vztahy lze interpretovat jako omezenost duálního konvolutoru T_g, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ při pevně zvoleném $q \in [1,\infty]$, kde

$$T_g(f) = f * g.$$

Tedy

z (3): $T_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ s konst. $M_0 = \|g\|_q$,

z (4): $T_g : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ s konst. $M_1 = \|g\|_q$.

R-T podruhé: položme

$p_0 = 1$, $p_1 = q'$, $r_0 = q$, $r_1 = \infty$.

Zvolme $p \in [1, q']$. K němu dopočteme θ:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = 1-\theta + \frac{\theta}{q'} = 1 - \frac{\theta}{q}$$

a posléze r:

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1} = \frac{1-\theta}{q} = \frac{1}{q} - \frac{\theta}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1.$$

Dle R-T věty: $T_g : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$

s konstantou $\|g\|_q$, kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$,

tedy

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q . \qquad \square$$

<u>Poznámka</u>. Konvoluční nerovnosti lze využít například při reprezentaci funkcí založené na potenciální nerovnosti pro $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$|u(x)| \leq C_n \cdot I_1(|\nabla u|)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde I_1 je potenciální operátor definovaný předpisem

$$(I_1 f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1}}\, dy \quad (n \geq 2)$$

(operátor se „slabou singularitou")

Odtud ihned plyne implikace:

$$I_1 : X \to Y \implies W^1 X \hookrightarrow Y.$$

Otázky: • pro jaká X, Y platí $I_1 : X \to Y$?

• lze implikaci obrátit?

• co to má společného s interpolacemi?

Odpovědi dáme časem. Prozatím si uvědomme, že

$$I_1 f = f * g,$$

kde $g(x) = |x|^{1-n}$.