3. přednáška 20/X 2020

2. KLASICKÉ INTERPOLAČNÍ VĚTY

2.1. INTERPOLACE POSITIVNÍCH OPERÁTORŮ

DEFINICE. Nechť (R,μ) a (S,ν) jsou σ-konečné prostory s mírami. Nechť T je operátor definovaný (alespoň) na jednoduchých funkcích na (R,μ) s hodnotami v prostoru ν-měřitelných funkcí na S. Nechť $p,q \in (0,\infty]$. Řekneme, že T je silného typu (p,q), jestliže

$$\exists M>0\ \forall f\in \mathcal{S}(R,\mu): \|Tf\|_{L^q(S,\nu)} \le M\cdot \|f\|_{L^p(R,\mu)},$$

kde $\mathcal{S}(R,\mu)$ je třída všech μ-jednoduchých funkcí na R. Nejmenší konstanta M, pro kterou výrok platí, se nazývá normou zobrazení T, značení: $\|T\|_{L^p\to L^q}$.

Věta 4 (Rieszova pro positivní operátory).
Nechť $1\le p_0,p_1,q_0,q_1\le\infty$ a $\theta\in[0,1]$. Nechť

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1} \quad \& \quad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

Nechť T je „positivní lineární operátor" tvaru

$$Tf(y) = \int_R f(x)\, A(x,y)\, d\mu(x), \quad y \in S,$$

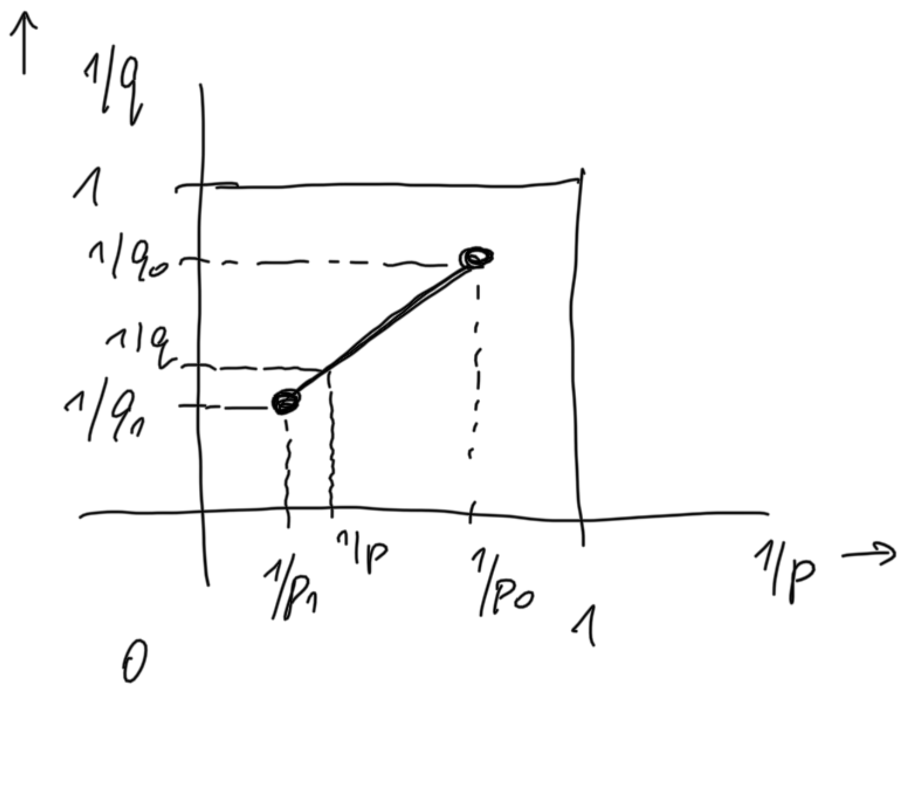
kde A je nezáporná měřitelná funkce na $R \times S$. Nechť T je silného typu (p_0, q_0) a zároveň silného typu (p_1, q_1) s normami po řadě M_0 a M_1. Potom T je silného typu (p, q) s normou M_θ splňující

$$M_\theta \le M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta}.$$

ILUSTRACE

$$\left.\begin{array}{l} T: L^{p_0} \longrightarrow L^{q_0} \\ \\ T: L^{p_1} \longrightarrow L^{q_1} \end{array}\right\} \quad T: L^{p} \longrightarrow L^{q}$$

INTERPOLAČNÍ ČTVEREC



<u>Důkaz.</u> BÚNO $\theta \in (0,1)$ & $p \neq \infty$ & $q \neq 1$

Potom stačí dokázat

$$\left| \int_S (Tf) g \, d\nu \right| \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta} \quad \text{pro všechny}$$

f, g jednoduché a splňující $\|f\|_{L^p(R,\mu)} \leq 1$

a $\|g\|_{L^{q'}(S,\nu)} \leq 1$. To vyplývá z toho, že

$$\sup \left\{ \left| \int_S (Tf) g \, d\nu \right| ; \; g \text{ jednoduchá}, \; \|g\|_{L^{q'}(\nu)} \leq 1 \right\} =$$

$$= \|Tf\|_{L^q(\nu)}$$

a

$$\sup \left\{ \|Tf\|_{L^q(\nu)}, \; f \text{ jednoduchá}, \; \|f\|_{L^p(\mu)} \leq 1 \right\}$$

$$= \|T\|_{L^p \to L^q} = M_\theta .$$

Z positivity T plyne:

$$\left| \int_S (Tf) \cdot g \, d\nu \right| = \left| \int_S \int_R f(x) \, A(x,y) \, g(y) \, d\nu(y) \right|$$

$$\leq \int_S \int_R |f(x)| \, A(x,y) \, d\mu(x) \; |g(y)| \, d\nu(y)$$

$$= \int_S T(|f|) \cdot |g| \cdot d\nu ,$$

takže stačí dokázat

$$\int_S Tf \cdot g \, d\nu \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta} \quad \forall f, g \geq 0, \text{ jednoduché},$$
$$\|f\|_p \leq 1, \quad \|g\|_{q'} \leq 1$$

Položme pro $i = 0, 1$:

$$f_i = f^{\frac{p}{p_i}}, \qquad g_i = g^{\frac{q'}{q_i'}}.$$

Potom

$$\|f_i\|_{p_i} = \|f^{\frac{p}{p_i}}\|_{p_i} = \|f\|_p^{\frac{p}{p_i}} \leq 1$$

a podobně $\quad \|g_i\|_{q_i'} = \|g\|_{q'}^{q'/q_i'} \leq 1.$

Dále platí

$$f_0^{1-\theta} \cdot f_1^{\theta} = f \quad \text{a} \quad g_0^{1-\theta} g_1^{\theta} = g,$$

neboť

$$f_0^{1-\theta} \cdot f_1^{\theta} = f^{\frac{p}{p_0}(1-\theta)} \cdot f^{\frac{p}{p_1}\theta}$$
$$= f^{p\left(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right)} = f^{p \cdot \frac{1}{p}} = f$$

a podobně pro g. Tedy

$$\int_S Tf\cdot g\,d\nu = \int_S\int_R Afg\;d\mu\,d\nu$$

$$= \int_S\int_R \left(Af_0 g_0\right)^{1-\theta}\cdot\left(Af_1 g_1\right)^{\theta}\,d\mu\,d\nu$$

Hölder pro $\frac{1}{\theta}$ a $\frac{1}{1-\theta}$

$$\le \left(\int_S\int_R Af_0 g_0\,d\mu\,d\nu\right)^{1-\theta}\cdot\left(\int_S\int_R Af_1 g_1\,d\mu\,d\nu\right)^{\theta}$$

$$= \left(\int_S (Tf_0)\,g_0\,d\nu\right)^{1-\theta}\left(\int_S (Tf_1)\,g_1\,d\nu\right)^{\theta}.$$

Hölder

$$\le \Big(\|Tf_0\|_{q_0}\cdot\underbrace{\|g_0\|_{q_0'}}_{\le 1}\Big)^{1-\theta}\Big(\|Tf_1\|_{q_1}\cdot\underbrace{\|g_1\|_{q_1'}}_{\le 1}\Big)^{\theta}$$

silné typy

$$\le \Big(M_0\cdot\underbrace{\|f_0\|_{p_0}}_{\le 1}\Big)^{1-\theta}\Big(M_1\,\underbrace{\|f_1\|_{p_1}}_{\le 1}\Big)^{\theta}$$

$$\le M_0^{1-\theta}\cdot M_1^{\theta}.$$

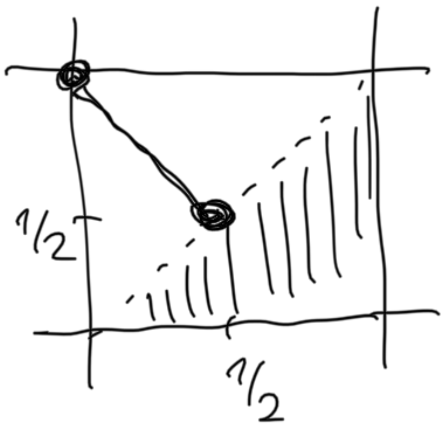
$\square$

<u>POZNÁMKA</u>. Bez předpokladu positivity T Věta 4 neplatí. Příklad:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\qquad T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,$$

$$Tx = Ax,\quad \text{tj.}\quad T(x_1,x_2) = (x_1+x_2,\ x_1-x_2).$$

Položme $p_0 = \infty$, $q_0 = 1$, $p_1 = q_1 = 2$. Potom (cvičení):



$M_0 = 2$ & $M_1 = \sqrt{2}$.

Položme $\theta = \frac{1}{2}$, pak $p = 4$, $q = \frac{4}{3}$.

Pokud by platilo $M_{\frac{1}{2}} \leq M_0^{1-\frac{1}{2}} \cdot M_1^{\frac{1}{2}}$, pak bychom měli

$$\|(x_1+x_2, x_1-x_2)\|_{\frac{4}{3}} \leq 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} \|[x_1, x_2]\|_4 \quad \forall [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2.$$

To ale neplatí, neboť pro $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ jest

$$\|[3,-1]\|_{\frac{4}{3}} = \left(3^{\frac{4}{3}} + 1\right)^{\frac{3}{4}} \approx 5{,}33,$$

ale $\|[1,2]\|_4 = (1+2^4)^{\frac{1}{4}} = 2{,}03$,

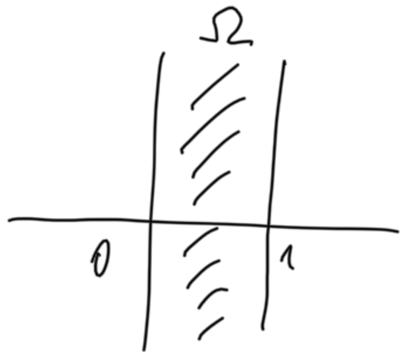
přičemž neplatí $\left(3^{\frac{4}{3}}+1\right)^{\frac{3}{4}} \leq 2^{\frac{3}{4}} \cdot 17^{\frac{1}{4}} \approx 3{,}41$.

2.2 RIESZOVA - THORINOVA VĚTA

<u>Věta 5</u> (Hadamardova věta o třech přímkách).

Nechť F je omezená a spojitá (komplexní) funkce na $\bar{\Omega}$, kde

$$\Omega = \{ z = x+iy,\ x \in (0,1) \},$$

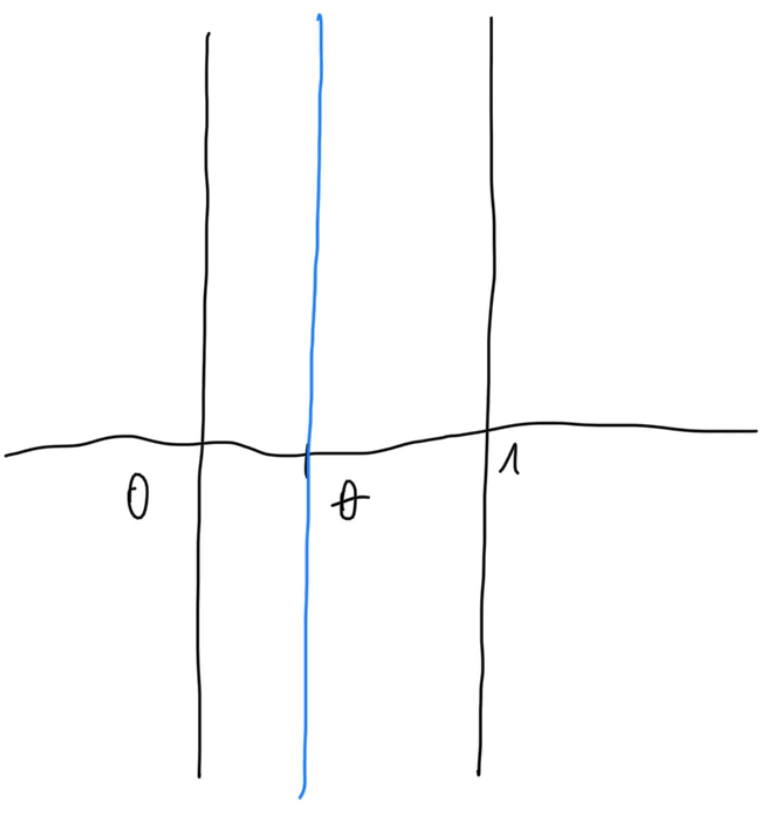


a nechť dále F je analytická v Ω. Potom pro M_θ definovanou předpisem

$$M_\theta = \sup \{ |F(\theta+iy)| ;\ -\infty < y < \infty \}$$

platí

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta} \quad \forall \theta \in [0,1].$$



Důkaz. Stačí dokázat, že

$$|F(\theta+iy)| \leq M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Navíc to stačí dokázat pro všechny konstanty větší než M_0, M_1. Tedy BÚNO předp. $M_0, M_1 > 0$.
Tedy lze uvažovat funkci

$$\frac{F(z)}{M_0^{1-z} \cdot M_1^{z}},$$

odtud plyne, že můžeme předp. $M_0 = M_1 = 1$.
Za těchto předpokladů je F omezená konstantou 1 na $\partial\Omega$. Dále víme, že F je omezená na Ω, označme K konstantu její omezenosti.

Stačí dokázat: $\forall z \in \Omega : |F(z)| \leq 1$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Označme

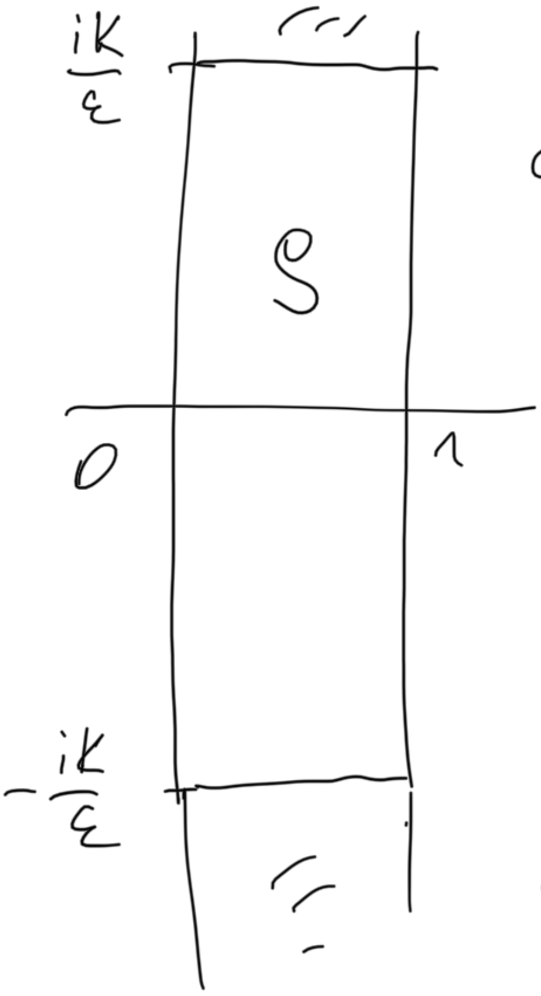
$$F_\varepsilon(z) = \frac{F(z)}{1+\varepsilon z}$$

(ta je analytická). Potom

$$|F_\varepsilon(z)| \leq \frac{|F(z)|}{1+\varepsilon x} \leq 1 \text{ pro } z = x+iy \in \partial\Omega,$$

a $$|F_\varepsilon(z)| \le \frac{|F(z)|}{\varepsilon|y|} \le \frac{K}{\varepsilon|y|} \text{ pro } z=x+iy\in\Omega.$$

Vezměme obdélník s vrcholy $\pm\frac{iK}{\varepsilon}$, $1\pm\frac{iK}{\varepsilon}$



a označme jej ϱ. Potom

$$|F_\varepsilon(z)|\le 1 \text{ pro } z\in\partial\varrho.$$

Podle věty o maximu modulu platí stejný odhad na celém ϱ. Dále na $\Omega\setminus\varrho$ platí $$|F_\varepsilon(z)| \le \frac{K}{\varepsilon|y|}\le 1,$$

takže celkem $|F_\varepsilon(z)|\le 1+\varepsilon|z|$ na Ω.

Pošleme $\varepsilon\to 0_+$ a máme tvrzení. $\square$

<u>Věta 6</u> (Rieszova – Thorinova). Nechť $1\le p_0,p_1,q_0,q_1\le\infty$, $\theta\in[0,1]$ a

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

Nechť T je lineární operátor silných typů (p_0,q_0) a (p_1,q_1) s normami po řadě M_0, M_1. Potom T je silného typu (p,q) s normou

$$M_\theta \leq 2\, M_0^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta},$$

(přičemž konstantu 2 lze vynechat pokud buď jsou uvedené prostory komplexní nebo $p_0 \leq q_0$, $p_1 \leq q_1$.)

DŮKAZ věty 6 příště

Věta má zajímavé důsledky, např.:

Věta 7 (Hausdorffova – Youngova).

Nechť $p \in [1,2]$. Potom $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

a nebo:

Věta 8 (Youngova konvoluční)

Nechť $p, q, r \in [1, \infty]$ a nechť

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Potom

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Důkazy příště.