ÚVOD DO TEORIE INTERPOLACÍ

přednáška ZS 2020–2021

Luboš Pick

LITERATURA:

- C. Bennett – R. Sharpley: Interpolation of Operators, Academic Press 1988
- Krejn – Petunin – Semënov: Interpolation of Linear Operators, Moscow 1971
- Bergh – Löfström: Interpolation Spaces. An Introduction, Springer 1976
- Y. Brudnyi – N. Krugljak: Interpolation Functors and Interpolation Spaces, Amsterdam 1991.
- zápisky z přednášek

Požadavky ke zkoušce:

- jedna z pěti definic
- jedna z pěti vět
- jeden z pěti důkazů (i s věty)

1. ÚVOD DO ÚVODU

Teorie interpolací je součástí FA (20. století).

Počátek ... kolem 1926

Předmětem studia jsou zejména

- (kvazi-) normované lineární prostory
- operátory ((kvazi-) lineární ~~zobrazení~~ mezi těmito prostory)
- prostory funkcí (a posloupností).

K čemu je to dobré?

- nový pohled na určité problémy
- jiné formulace
- účinné metody řešení.

základní úloha FA:

vyšetřit, zda je daný operátor omezený (kompaktní apod.) z jednoho prostoru do druhého.

DEFINICE. Nechť X, Y jsou kvazinormované lineární prostory a T je operátor definovaný na X s hodnotami v Y. Řekneme, že T je omezený z X do Y (značíme $T: X \to Y$), jestliže

$$\exists C > 0 \ \forall f \in X: \quad \|Tf\|_Y \le C \|f\|_X .$$

Je-li $T = Id$, pak říkáme, že X je vnořen do Y a značíme $X \hookrightarrow Y$. Normou operátoru rozumíme hodnotu

$$\|T\|_{X \to Y} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X} =$$

$$= \inf \{ C ; \|Tf\|_Y \le C \|f\|_X \ \forall f \}.$$

Motivace: moderní metody řešení DR

- pojem slabého řešení
- Sobolevovy prostory
- klasické Sob. prostory jsou vybudovány pomocí škály Lebesgueových prostorů.

Lebesgueovy prostory

(R,μ) ... prostor se σ-konečnou mírou

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n, \quad 0 < \mu(R_n) < \infty, \quad R_n \subset R_{n+1} \ \forall n$$

$$\mathcal{M}(R,\mu) = \{ f : R \to \mathbb{C};\ f \ \mu\text{-měř.} \}$$

$p \in (0,\infty]$,

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(R,\mu)} =$$

$$= \begin{cases} \left(\int_R |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \mu\text{-}\operatorname{esssup}_{x \in R} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Poznámka: Funkcionál

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{M}(R,\mu) \to [0,\infty]$$

je definován na celém $\mathcal{M}(R,\mu)$ (nikoli jen na L^p), ale

$$L^p = \{ f \in \mathcal{M}(R,\mu);\ \|f\|_p < \infty \}.$$

Co potřebujeme vědět o Lebesgueových prostorech:

- $\|\cdot\|_p$ je kvazinorma, pro $p \in [1,\infty]$ je norma,
- $(L^p, \|\cdot\|_p)$ je úplný pro každé $p \in (0,\infty]$,
- L^p je separabilní pro $p < \infty$, je-li separabilní μ,
- L^p je reflexivní pro $p \in (1,\infty)$, Hilbertův pro $p=2$,
- platí Hölderova nerovnost:

$$\left| \int_R fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'},$$

kde $p \in [1,\infty]$ a $p' = \begin{cases} 1, & \text{je-li } p = \infty, \\ \frac{p}{p-1}, & \text{je-li } p \in (1,\infty), \\ \infty, & \text{je-li } p = 1, \end{cases}$

- Hölderova nerovnost je nasycená ve smyslu

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'} \leq 1} \left| \int_R fg \, d\mu \right|, \quad p \in [1,\infty],$$

- $\|\chi_E\|_p = \mu(E)^{1/p}$, pokud $p<\infty$ nebo $\mu(E)>0$,

• *jednoduché funkce*

$$S = \left\{ f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i},\ 0<\mu(E_i)<\infty,\ a_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C},\right.$$
$$\left. E_i \text{ po dvou disjunktní} \right\},$$

pak $\overline{S}^{L^p} = L^p$, pokud $p<\infty$.

PŘÍKLAD. *Laplaceova transformace* $\mathcal{L}$ je definována předpisem

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty e^{-ts} f(s)\,ds, \quad t\in(0,\infty),$$

f smysluplná.

Otázka: omezenost $\mathcal{L}$ na L^p-prostorech?

Pozorování: $\mathcal{L}: L^1(0,\infty) \to L^\infty(0,\infty)$.

„Důkaz":

$$\|\mathcal{L}f\|_{L^\infty(0,\infty)} = \operatorname*{esssup}_{t\in(0,\infty)} |\mathcal{L}f(t)|$$

$$= \operatorname*{esssup}_{t\in(0,\infty)} \left| \int_0^\infty e^{-ts} f(s)\,ds \right|$$

$$\le \operatorname*{esssup}_{t\in(0,\infty)} \int_0^\infty \underbrace{e^{-ts}}_{\le 1} |f(s)|\,ds$$

$$\le \operatorname*{esssup}_{t\in(0,\infty)} \int_0^\infty |f(s)|\,ds$$

$$= \|f\|_{L^1(0,\infty)}. \qquad \square$$

Tedy $\mathcal{L}: L^1(0,\infty) \to L^\infty(0,\infty)$ s normou 1.

OTÁZKA: Jiné L^p-prostory, např. $\mathcal{L}: L^2 \to ?$

Věta 1 (omezenost Laplaceovy transformace na L^2).

$\mathcal{L}: L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$ s normou $\sqrt{\pi}$.

Důkaz. $$\|\mathcal{L}f\|_2 \overset{\substack{\text{(nasycenost}\\ \text{Höldera)}}}{=} \sup_{\|g\|_2 \le 1} \int_0^\infty g(t)\mathcal{L}f(t)\,dt$$

(BÚNO $f,g \ge 0$)

$$\overset{df.\ \mathcal{L}}{=} \sup_{\|g\|_2 \le 1} \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty e^{-ts} f(s)\,ds\,dt$$

$$\boxed{\text{substituce: } y = ts,\ s = \frac{y}{t},\ ds = \frac{dy}{t},\ \begin{array}{c|c|c} s & 0 & \infty \\ \hline y & 0 & \infty \end{array}}$$

$$= \sup_{\|g\|_2 \le 1} \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty e^{-y} f\left(\frac{y}{t}\right) dy\, \frac{dt}{t}$$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} \sup_{\|g\|_2 \le 1} \int_0^\infty e^{-y} \int_0^\infty g(t)\, f\left(\frac{y}{t}\right) \frac{dt}{t}\, dy$$

$$\overset{\text{(Hölder)}}{\le} \int_0^\infty e^{-y} \left(\int_0^\infty f\left(\frac{y}{t}\right)^2 \frac{dt}{t^2} \right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$\boxed{\text{substituce: } z=\frac{y}{t},\ t=\frac{y}{z},\ dt=-\frac{y\,dz}{z^2},\quad \begin{array}{c||c|c} t & 0 & \infty \\ \hline z & \infty & 0 \end{array}}$$

$$= \int_0^\infty e^{-y}\left(\int_0^\infty - f(z)^2 \frac{z^2}{y^2}(-y)\frac{dz}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\,dy}_{=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}} \cdot \|f\|_2$$

$$\leq \sqrt{\pi}\cdot\|f\|_2. \qquad \square$$

Teď víme: $\mathcal{L}: L^1 \to L^\infty$ (konst. 1)

& $\mathcal{L}: L^2 \to L^2$ (konst. $\sqrt{\pi}$).

<u>Otázka</u>: $\mathcal{L}: L^p \to L^q$?

$\mathcal{L}: L^{\frac{3}{2}} \to$?

$\mathcal{L}: L^{\frac{4}{3}} \to$?

Otázka z pohledu teorie interpolací:

- zapomeneme, že jde o Laplaceovu transformaci
- víme pouze, že

$$\mathcal{L}: L^1 \to L^\infty$$

$$\& \quad \mathcal{L}: L^2 \to L^2$$

– co jsme schopni odtud vyvodit ?

$$\mathcal{L} : L^{\frac{3}{2}} \to ?$$

<u>Ještě jeden příklad</u>

<u>Sobolevův prostor 1. řádu</u>

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$u \text{ je slabě diferencovatelná},$$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty \},$$

kde $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \| |\nabla u| \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

<u>Otázka</u>: „Sobolevovo vnoření"

$$W^{1,p} \hookrightarrow L^q \ ?$$

triviální pozorování: $W^{1,p} \hookrightarrow L^p$ (s konst. 1)

Podle <u>Sobolevovy věty o vnoření</u> platí

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p < n.$$

Tedy $\quad W^{1,p} \hookrightarrow L^p$

& $\quad W^{1,p} \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}} \quad \left(\frac{np}{n-p} > p \right).$

Důležité poznámky:

- rozdíl oproti předchozímu příkladu: zdrojové prostory jsou stejné.

Otázka: $W^{1,p} \to L^q$ např. pro $q \in [p, \frac{np}{n-p}]$.

- prostory $L^p(\mathbb{R}^n)$ a $L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)$ jsou neporovnatelné (!).

Věta 2 (vnoření Lebesgueových prostorů).

Nechť $p, q \in (0, \infty]$. Potom

$$L^q(R, \mu) \hookrightarrow L^p(R, \mu)$$

právě tehdy, když

- buď $p = q$,
- nebo $p < q$ a $\mu(R) < \infty$,
- nebo $p > q$ a $\exists \varepsilon > 0 \ \forall E \subset R, \mu(E) > 0$: $\mu(E) \geq \varepsilon$.

KONEC 1. PŘEDNÁŠKY

(20 $\frac{29}{IX}$ 20)

Důkaz. „$\Rightarrow$" $p < q$:

Položme pro $n \in \mathbb{N}$: $f_n = \chi_{R_n}$ $\left(R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right)$.

Potom $\exists C > 0$ nezávislá na n taková, že

$\|f_n\|_p \le C\|f_n\|_q \quad \forall n \in \mathbb{N}$, tedy

$\mu(R_n)^{\frac{1}{p}} \le C\,\mu(R_n)^{\frac{1}{q}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, takže

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mu(R_n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le C.$

Tedy $(n \to \infty)$ $\quad \mu(R) \le C^{\frac{pq}{q-p}} < \infty.$

<u>$p>q$</u> : Zvolme $E \subset R$, E měř., $\mu(E)>0$,

a položme $f = \chi_E$. Potom

$\|f\|_p \le C\|f\|_q \iff \mu(E)^{\frac{1}{p}} \le C\mu(E)^{\frac{1}{q}}$

$\Rightarrow \mu(E)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \ge \frac{1}{C}$, polož $\varepsilon = C^{-\frac{pq}{p-q}}$.

„$\Leftarrow$" <u>$p \le q$</u> : pro každou f platí

$$\|f\|_p^p = \int_R |f|^p d\mu \underset{\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right)}{\overset{\text{(Hölder)}}{\le}} \left(\int_R |f|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_R 1^{\frac{q}{q-p}} d\mu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$

$$= \mu(R)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_R |f|^q d\mu\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Provedeme $\uparrow \frac{1}{p}$ a položíme $C = \mu(R)^{\frac{q-p}{pq}} < \infty$.

Dostaneme $\quad \|f\|_p \le C\,\|f\|_q$.

<u>$\infty > p > q$</u> . Nechť $E \subset R$, $\mu(E)>0$. Potom

$\mu(E) \ge \varepsilon$, tedy $\mu(E)^{1-\frac{q}{p}} \ge \varepsilon^{1-\frac{q}{p}}$, tedy

(*) $\mu(E)^{\frac{q}{p}} \leq C\mu(E)$, kde $C = \varepsilon^{\frac{q}{p}-1}$.

Nechť f je jednoduchá, to znamená

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \chi_{E_i}$$

pro nějaká $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, E_i disj., $0 < \mu(E_i) < \infty$.

Potom

$$\|f\|_p^q = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p \mu(E_i)\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\overset{(\frac{q}{p}<1)}{\leq} \sum_{i=1}^{m} |a_i|^q \mu(E_i)^{\frac{q}{p}}$$

$$\overset{(*)}{\leq} C \sum_{i=1}^{m} |a_i|^q \mu(E_i) = C\|f\|_q^q.$$

Z hustoty jednoduchých funkcí v L^p $(p<\infty)$ plyne tvrzení.

$\infty = p > q$: Pro každou jednoduchou f platí

$$\|f\|_q = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^q \mu(E_i)\right)^{1/q}$$

$$\geq \max |a_i| \mu(E_i)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq \varepsilon^{\frac{1}{q}} \max |a_i| = \varepsilon^{\frac{1}{q}} \|f\|_\infty.$$

Výsledek plyne z hustoty jedn. funkcí v L^q. $\square$

Budeme studovat následující otázky.

OTÁZKA 1. Je-li $0 < p < q \leq \infty$,

$$f \in L^p(R, \mu) \cap L^q(R, \mu)$$

a je-li navíc $r \in [p, q]$,

platí potom, že $f \in L^r(R, \mu)$?

POZNÁMKA. Z Věty 2 odpověď neplyne, neboť nevíme nic o (R, μ).

OTÁZKA 2. Jestliže je odpověď na Otázku 1 kladná, je možné tento fakt kvantifikovat (něco jako $\|f\|_r \leq F(\|f\|_p, \|f\|_q)$) ?

Věta 3 (interpolace Lebesgueových prostorů).

Nechť $0 < p < r < q \leq \infty$ a $f \in L^p \cap L^q$.

Nechť $\theta \in (0, 1)$ je takové, že

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}.$$

Potom $f \in L^r$ a platí

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \cdot \|f\|_q^{\theta}$$

(„logaritmicky konvexní závislost).

<u>Důkaz.</u> Nechť nejprve $q = \infty$. Potom $\forall f$ platí

$$\|f\|_r^r = \int_R |f|^r \, d\mu = \int_R |f|^p \cdot |f|^{r-p} \, d\mu$$

$$\leq \operatorname*{esssup}_{x \in R} |f|^{r-p} \cdot \int_R |f|^p \, d\mu$$

$$= \|f\|_\infty^{r-p} \cdot \|f\|_p^p ,$$

tedy
$$\|f\|_r \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{r}} \cdot \|f\|_p^{\frac{p}{r}}$$

$$= \|f\|_\infty^{1-\theta} \cdot \|f\|^{\theta} ,$$

neboť
$$\frac{1}{r} = \frac{p}{r} \cdot \frac{1}{p} + \left(1 - \frac{p}{r}\right) \cdot \frac{1}{\infty} .$$

Nyní nechť $0 < p < r < q < \infty$. Potom pro každá $\alpha \in (0, r)$ a $s \in (1, \infty)$ platí

$$\|f\|_r^r = \int_R |f|^r \, d\mu = \int_R |f|^\alpha \cdot |f|^{r-\alpha} \, d\mu$$

$$\overset{(\text{Hölder})}{\leq} \| \, |f|^\alpha \|_s \cdot \| \, |f|^{r-\alpha} \|_{s'}$$

$$= \|f\|_{\alpha s}^\alpha \cdot \|f\|_{(r-\alpha)s'}^{r-\alpha} .$$

Položme
$$s\alpha = p ,$$
$$s'(r-\alpha) = q .$$

Dostaneme
$$\alpha = p\,\frac{q-r}{q-p}, \quad s = \frac{q-p}{q-r}.$$
Pak lze ověřit, že $\alpha < r$ a $s > 1$. Tedy
$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{\frac{p}{r}\cdot\frac{q-r}{q-p}} \cdot \|f\|_q^{\frac{q}{r}\,\frac{r-p}{q-p}}.$$
Označíme-li $\theta = \frac{p}{r}\cdot\frac{r-p}{q-p}$, dostaneme
$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{1-\theta}\cdot\|f\|_q^{\theta}, \text{ kde } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}. \quad \square$$

<u>Důsledek</u>. Nechť $0<p<r<q\le\infty$, X je (kvazi-) NLP a T je operátor splňující
$$T: X \to L^p \ \& \ T: X \to L^q,$$
potom
$$T: X \to L^r$$
a
$$\|T\|_{X\to L^r} \le \|T\|_{X\to L^p}^{1-\theta}\cdot\|T\|_{X\to L^q}^{\theta},$$
kde θ je jako výše.

<u>Příklad</u>. $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, $1\le p<n$. Potom
$$\left.\begin{aligned} &W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \\ \& \ &W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n),$$
kde $r \in \left[p, \frac{np}{n-p}\right]$.

Otázka. Co když ale máme

$$T : X \to L^p$$
$$T : Y \to L^q \ ?$$

Pak se podobná úvaha nedá provést.

Např. $T : L^p \to L^p$ & $T : L^q \to L^q$, $r \in (p,q)$, pak

$$\|Tf\|_r \le \|Tf\|_p^{1-\theta} \cdot \|Tf\|_q^{\theta}$$
$$\le C\,\|f\|_p \cdot \|f\|_q \quad \left(\begin{matrix}\text{ALE TEĎ}\\ \text{NEPLATÍ}\end{matrix} \ \le C'\,\|f\|_r\right).$$

$\Rightarrow$ musíme na to jinak.

Příklady (další).

(1) Fourierova transformace:

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x,y)} f(y)\,dy, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Potom (triv.) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Prostor $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ je hustý v $L^2(\mathbb{R}^n)$

a $\forall f \in L^1 \cap L^2$ platí $\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

pro vhodnou $C > 0$ nezávislou na f, a tedy to lze rozšířit na $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$

(Plancherelova věta). Tedy

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}: L^1 \to L^\infty \\ \mathcal{F}: L^2 \to L^2 \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} \mathcal{F}: L^p \to ? \\ \mathcal{F}: ? \to L^q. \end{array}$$

(2) Rieszův potenciál:

Laplacián: $\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$, pak

$$\mathcal{F}(-\Delta f)(x) = 4\pi^2 |x|^2 \mathcal{F}f(x),$$

tento vztah lze rozšířit (formálně) pro

$\beta \in (-n, 0)$ na

$$\mathcal{F}\left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} f\right) = (2\pi|x|)^\beta \mathcal{F}f(x),$$

reprezentace

$$-\Delta^{\frac{\gamma}{2}} f = c_\gamma I_\gamma f, \quad \gamma \in (0, n),$$

kde $I_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$

Význam operátoru I_γ vyplývá z nerovnosti (Stein)

$|u(x)| \leq c\, I_m (|D^m u|)$ kde

$$D^m u = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha}.$$

Tedy $\left(I_m : X \to Y \Rightarrow W^m X \hookrightarrow Y \right)$.

Chceme zjistit, kdy $I_\gamma : X \to Y$,

například

$$I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$$

(hledáme podmínky na γ, p, q, n).

(3) komvoluční operátory

$$T(f,g) = f * g$$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

Potom (snadné):

$$\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|f*g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|f*g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{(Hölder)}$$

atd.

<u>Otázka</u>: nalézt podmínku na p, q, r, n, aby

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

<u>Pozn.</u> $I_\gamma f = f * g_\gamma$, kde

$$g_\gamma(x) = |x|^{\gamma - n}.$$

Na všechny otázky dáme odpověď (optimální) metodami teorie interpolací. (konec úvodu)

KONEC 2. PŘEDNÁŠKY