MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 NMMA201 - ZIMNÍ SEMESTR 2019–2020
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

## 15. Metrické prostory II

### 15.1. Kompaktní metrické prostory.

**Definice.** Řekneme, že metrický prostor $(P, \varrho)$ je **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti prvků $P$ lze vybrat konvergentní podposloupnost. Řekneme, že množina $K \subset P$ je **kompaktní** v $P$, jestliže je metrický prostor $(K, \varrho)$ kompaktní, tedy jestliže z každé posloupnosti prvků $K$ lze vybrat podposloupnost, která konverguje v $P$ a jejíž limita je prvkem $K$.

**Věta 15.1** (konečnost a kompaktnost)**.** *Nechť $(P, \varrho)$ je metrický prostor a $A \subset P$ je konečná. Potom je $A$ kompaktní.*

*Důkaz.* Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $A$. Potom existuje alespoň jeden prvek $x \in A$, který se v posloupnosti $\{x_n\}$ vyskytuje nekonečněkrát. Posloupnost $\{x_n\}$ tudíž obsahuje konstantní, a tedy konvergentní podposloupnost. $\square$

**Věta 15.2** (kompaktnost intervalu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom je interval $[a, b]$ kompaktní v $\mathbb{R}$.*

*Důkaz.* Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $[a, b]$ Potom je $\{x_n\}$ omezená. Dle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x_{n_k} \to x$. Protože $[a, b]$ je uzavřená množina, platí $x \in [a, b]$. Odtud plyne, že $[a, b]$ je kompaktní množina v $\mathbb{R}$. $\square$

**Věta 15.3** (nutná podmínka kompaktnosti)**.** *Nechť $(P, \varrho)$ je metrický prostor. Jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků $P$ splňující*

$$\exists \delta > 0 \ \forall m, n \in \mathbb{N}, \ n \neq m \colon \varrho(x_n, x_m) \geq \delta,$$

*potom $P$ není kompaktní.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že $P$ je kompaktní. Potom existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \to x$. Nalezneme $k_0$ takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\delta}{2}$. Potom

$$\delta \leq \varrho(x_{k_0}, x_{k_0+1}) \leq \varrho(x_{k_0}, x) + \varrho(x, x_{k_0+1}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

což je spor. Prostor $P$ tedy není kompaktní. $\square$

**Věta 15.4** (kompaktnost v diskrétním prostoru)**.** *Metrický prostor $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ je kompaktní právě tehdy, když je množina $P$ konečná.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Předpokládejme, že množina $P$ je nekonečná. Potom $P$ obsahuje prostou posloupnost $\{x_n\}$. Pro každé $m, n \in P$, $m \neq n$, platí $\varrho(x_m, x_n) = 1$. Je tedy splněna podmínka z Věty 15.3 pro $\delta = 1$. Podle této věty tedy prostor $(P, \varrho_{\mathrm{diskr}})$ není kompaktní.
$\Leftarrow$ Tato implikace plyne z Věty 15.1. $\square$

**Věta 15.5** (kompaktnost a uzavřenost)**.** *Nechť $(P, \varrho)$ je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Potom je $K$ uzavřená.*

*Důkaz.* Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků množiny $K$ taková, že $\lim x_n = y$, kde $y \in P$. Protože $K$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in K$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Z věty o limitě vybrané posloupnosti plyne, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Z věty o jednoznačnosti limity pak plyne, že $x = y$. Tedy platí $y \in K$. To podle definice znamená, že množina $K$ je uzavřená. $\square$

**Poznámka.** Opačná implikace ve Větě 15.5 neplatí. Příkladem je nekonečná množina v diskrétním prostoru.

**Věta 15.6** (kompaktnost a omezenost). *Nechť $(P,\varrho)$ je kompaktní metrický prostor. Potom je $P$ omezený.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že prostor $P$ není omezený. Potom je $P$ neprázdný. Zvolme $x \in P$. Protože $\operatorname{diam} P = \infty$, existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in P$ takový, že $\varrho(x, x_n) \geq n$. Protože $P$ je kompaktní prostor, existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $y \in P$ takový, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = y$. Tedy existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\varrho(y, x_{n_k}) \leq 1$. Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, je takové, že $n_k > \varrho(x,y) + 1$. Potom

$$n_k \leq \varrho(x, x_{n_k}) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y, x_{n_k}) \leq \varrho(x,y) + 1 < n_k,$$

což je spor. Prostor $P$ je tedy omezený. $\square$

**Věta 15.7** (uzavřená podmnožina kompaktu). *Nechť $(P,\varrho)$ je kompaktní metrický prostor a $F \subset P$ je uzavřená. Potom je $F$ kompaktní.*

*Důkaz.* Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $F$. Potom je $\{x_n\}$ také posloupnost prvků kompaktního prostoru $P$, takže existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Protože $F$ je uzavřená, platí $x \in F$. Množina $F$ je tedy kompaktní v $P$. $\square$

**konec 1. přednášky (03.10.2019)**

**Příklad.** Dokažte, že množina

$$A = \{f \in C([0,1]);\ \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1\}$$

je v prostoru $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$ uzavřená a omezená, ale nikoli kompaktní.

**Řešení.** Nechť $f, g \in A$. Potom

$$\varrho_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |g(x)|) \leq 2.$$

Tedy $\operatorname{diam} A \leq 2$, takže množina $A$ je omezená.

Předpokládejme, že $\{f_n\}$ je posloupnost prvků $A$ splňující $\varrho_{\sup}(f_n, f) \to 0$, kde $f \in C([0,1])$. Zvolme $x \in [0,1]$. Potom $f_n(x) \to f(x)$ v $\mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(x) \in [-1,1]$. Množina $[-1,1]$ je uzavřená v $\mathbb{R}$, takže $f(x) \in [-1,1]$. Protože $x$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $f \in A$. Množina $A$ je tedy uzavřená.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme funkci $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n x, & x \in [0, \frac{1}{2^n}]; \\ 1, & x \in [\frac{1}{2^n}, 1]. \end{cases}$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n \in A$. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Potom $1 - 2^{m-n} \geq \frac{1}{2}$, a tedy

$$\varrho_{\sup}(f_n, f_m) \geq |f_n(\tfrac{1}{2^n}) - f_m(\tfrac{1}{2^n})| = 1 - 2^{m-n} \geq \frac{1}{2}.$$

Z Věty 15.3 tedy plyne, že $A$ není kompaktní.

**Příklad.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažte, že žádný z intervalů $[a,b)$, $(a,b]$, $(a,b)$, $[a,\infty)$, $(a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,\infty)$ není kompaktní v $\mathbb{R}$.

**Věta 15.8** (kompaktnost v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $K \subset \mathbb{R}^n$. Potom $K$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Tato implikace plyne z Vět 15.5 a 15.6.

$\Leftarrow$ Použijeme matematickou indukci podle $n$. Nechť $n = 1$ a $\{x_k\}$ je posloupnost prvků $K$. Množina $K$ je omezená v $\mathbb{R}$, a tedy existují $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, splňující $K \subset [a, b]$. Podle Věty 15.2 je $[a, b]$ kompaktní. Protože $K$ je podle předpokladu uzavřená, je podle Věty 15.7 kompaktní v $\mathbb{R}$.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nechť $K$ je omezená a uzavřená množina v $\mathbb{R}^{n+1}$ a $\{x^k\}$ je posloupnost prvků $K$. Označme $x^k = [a^k, b^k]$, kde $a^k \in \mathbb{R}^n$ a $b^k \in \mathbb{R}$. Definujme zobrazení $\pi_1 \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ a $\pi_2 \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ předpisy

$$\pi_1([x_1, \dots, x_{n+1}]) = [x_1, \dots, x_n], \quad \pi_2([x_1, \dots, x_{n+1}]) = x_{n+1}.$$

Pro každé $x, y \in K$ platí

$$\|\pi_1(x) - \pi_1(y)\| \le \varrho_2(x, y) \le \operatorname{diam} K$$

a

$$|\pi_2(x) - \pi_2(y)| \le \varrho_2(x, y) \le \operatorname{diam} K,$$

takže $\pi_1(K)$ je omezená v $\mathbb{R}^n$ a $\pi_2(K)$ je omezená v $\mathbb{R}$. Podle Věty 13.11(f) jsou omezené také množiny $\overline{\pi_1(K)}$ a $\overline{\pi_2(K)}$. Protože jsou navíc zřejmě uzavřené, jsou podle indukčního předpokladu kompaktní. Tedy existuje podposloupnost $\{a^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{a^k\}$ a prvek $a \in \overline{\pi_1(K)}$ takové, že $\lim_{j\to\infty} a^{k_j} = a$. Protože $\overline{\pi_2(K)}$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\{b^{k_{j_\ell}}\}_{\ell=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{b^{k_j}\}$ a prvek $b \in \overline{\pi_2(K)}$ takové, že $\lim_{\ell\to\infty} b^{k_{j_\ell}} = b$. Potom

$$\lim_{\ell\to\infty} x^{k_{j_\ell}} = \lim_{\ell\to\infty} [a^{k_{j_\ell}}, b^{k_{j_\ell}}] = [a, b].$$

Množina $K$ je podle předpokladu uzavřená, a tedy $[a, b] \in K$. Odtud plyne, že $K$ je kompaktní v $\mathbb{R}^{n+1}$. □

15.2. **Spojitá zobrazení na kompaktních metrických prostorech.**

**Věta 15.9** (spojitý obraz kompaktu)**.** *Nechť $(P, \varrho)$ je kompaktní metrický prostor, $(Q, \sigma)$ je metrický prostor a $f \colon P \to Q$ je spojité. Potom je $f(P)$ kompaktní v $Q$.*

*Důkaz.* Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost prvků $f(P)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in P$ takové, že $f(x_n) = y_n$. Protože $P$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x \in P$ takové, že $x_{n_k} \to x$ v $P$. Protože $f$ je spojité, plyne z Heineovy věty (Věta 13.12), že $f(x_{n_k}) \to f(x)$ v $Q$. Označíme-li $y = f(x)$, pak $y \in f(P)$ a platí $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y$. Odtud plyne, že $f(P)$ je kompaktní v $Q$. □

**Definice.** Nechť $(P, \varrho)$ je neprázdný metrický prostor a $f \colon P \to \mathbb{R}$. Řekneme, že zobrazení $f$ **nabývá svého maxima** na $P$, jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \ge f(y)$ pro každé $y \in P$. Obdobně řekneme, že $f$ **nabývá svého minima** na $P$, jestliže existuje $x \in P$ takové, že $f(x) \le f(y)$ pro každé $y \in P$.

**Věta 15.10** (extrémy spojité funkce na kompaktu)**.** *Nechť $(P, \varrho)$ je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f \colon P \to \mathbb{R}$ je spojité. Potom $f$ nabývá na $P$ svého maxima i svého minima.*

*Důkaz.* Označme $y = \sup f(P)$. Podle Věty 15.9 je množina $f(P)$ kompaktní, a tedy podle Vět 15.5 a 15.6 omezená a uzavřená. Z omezenosti $f(P)$ plyne, že $y \in \mathbb{R}$ a z uzavřenosti $f(P)$ plyne, že $y \in f(P)$. Tedy $f$ nabývá na $P$ svého maxima. Obdobně lze dokázat, že $f$ nabývá na $P$ svého minima. □

**Definice.** Nechť $(P, \varrho)$ a $(Q, \sigma)$ jsou metrické prostory a $f \colon P \to Q$. Řekneme, že $f$ je **stejnoměrně spojité**, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P,\ \varrho(x, y) < \delta \colon \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**konec 2. přednášky (07.10.2019)**

**Věta 15.11** (spojitost a stejnoměrná spojitost na kompaktu). *Nechť $(P,\varrho)$ je kompaktní metrický prostor, $(Q,\sigma)$ je metrický prostor a $f\colon P\to Q$ je spojité. Potom $f$ je stejnoměrně spojité.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že $f$ není stejnoměrně spojité. Potom exituje $\varepsilon>0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ prvků $P$ splňující $\varrho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$ a $\sigma(f(x_n),f(y_n))\geq\varepsilon$. Z kompaktnosti $P$ plyne, že existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a $x\in P$ takové, že $x_{n_k}\to x$. Potom také $y_{n_k}\to x$, neboť

$$\varrho(x,y_{n_k})\leq\varrho(x,x_{n_k})+\varrho(x_{n_k},y_{n_k})\to 0.$$

Ze spojitosti $f$ a Heineovy věty tudíž plyne, že $f(x_{n_k})\to f(x)$ a $f(y_{n_k})\to f(x)$. Nalezneme $k\in\mathbb{N}$ takové, že $\sigma(f(x_{n_k}),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}$ a $\sigma(f(y_{n_k}),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}$. Potom

$$\varepsilon\leq\sigma(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))\leq\sigma(f(x_{n_k}),f(x))+\sigma(f(y_{n_k}),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

což je spor. Zobrazení $f$ je tedy stejnoměrně spojité. □

**Definice.** Řekneme, že posloupnost množin $\{A_n\}$ je **teleskopická**, jestliže pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $A_{n+1}\subset A_n$.

**Věta 15.12** (charakterisace kompaktních prostorů). *Metrický prostor $(P,\varrho)$ je kompaktní právě tehdy, když pro každou teleskopickou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených podmnožin $P$ platí $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Nechť $\{F_n\}$ je teleskopická posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin $P$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ zvolíme $x_n\in F_n$. Protože $P$ je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a prvek $x\in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x$. Zvolme $n\in\mathbb{N}$. Potom pro všechna $k\in\mathbb{N}$ splňující $n_k>n$ platí $x_{n_k}\in F_n$, neboť

$$x_{n_k}\in F_{n_k}\subset F_n.$$

Protože $F_n$ je uzavřená, vyplývá odtud, že také $x\in F_n$. Protože $n$ bylo zvoleno libovolně, platí $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$. Množina $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ je tedy neprázdná.

$\Leftarrow$ Jestliže $P=\emptyset$, potom je $P$ kompaktní. Předpokládejme, že $P\neq\emptyset$ a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $P$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ položme

$$F_n=\overline{\{x_j\,;\ j\in\mathbb{N},\ j\geq n\}}.$$

Potom je $\{F_n\}$ teleskopická posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin $P$. Podle předpokladu věty tedy existuje $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$. Protože $x\in F_1$, plyne z definice množiny $F_1$, že existuje index $n_1\in\mathbb{N}$ takový, že $\varrho(x_{n_1},x)<1$. Předpokládejme, že pro nějaké $k\in\mathbb{N}$ máme zvoleny indexy $n_1,\dots,n_k$. Protože $x\in F_{n_k+1}$, plyne z definice této množiny, že existuje index $n_{k+1}\in\mathbb{N}$ splňující $n_{k+1}>n_k$ a $\varrho(x_{n_{k+1}},x)<\frac{1}{k+1}$. Takto získáme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, takovou, že pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí $\varrho(x_{n_k},x)<\frac{1}{k}$. Tedy $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x$. Z libovolné posloupnosti jsme tedy vybrali konvergentní podposloupnost. To znamená, že prostor $P$ je kompaktní. □

## 15.3. **Úplné metrické prostory.**

**Definice.** Nechť $(P,\varrho)$ je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $P$. Řekneme, že $\{x_n\}$ je **cauchyovská**, jestliže platí

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq n_0:\ \varrho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

**Poznámka.** Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Obrácená implikace neplatí. Příkladem je posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$, která je cauchyovská, ale nikoli konvergentní v $(0,1)$.

**Definice.** Řekneme, že metrický prostor je **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost prvků $P$ je konvergentní.

**Příklady.** Dokažte následující tvrzení.

(a) $\mathbb{R}$ je úplný,
(b) $(0,1)$ není úplný,
(c) diskrétní metrický prostor je úplný,
(d) $(\mathcal{C}([a,b]),\varrho_{\sup})$ je úplný,

(e) $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{int}})$ není úplný.

**Věta 15.13** (kompaktnost a úplnost)**.** *Nechť $(P, \varrho)$ je kompaktní metrický prostor. Potom je $P$ úplný.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $P$. Potom z kompaktnosti plyne, že existují podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a bod $x \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom z Bolzanovy–Cauchyovy podmínky plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n_0$ a $n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Díky konvergenci posloupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dále existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Protože $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, existuje $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, takové, že $n_k \geq n_0$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\varrho(x_n, x) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\lim x_n = x$, takže $\{x_n\}$ je konvergentní. Prostor $P$ je tedy úplný. □

**Poznámka.** Opačná implikace ve Větě 15.13 neplatí. Příkladem je $\mathbb{R}$ nebo nekonečný diskrétní prostor.

**Věta 15.14** (úplnosti a uzavřenost)**.** *Nechť $(P, \varrho)$ je úplný metrický prostor a $M \subset P$. Potom je $(M, \varrho)$ úplný právě tehdy, když $M$ je uzavřená.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $M$, $x \in P$ a $\lim x_n = x$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy konvergentní, a tudíž cauchyovská, v $P$. Tím pádem je cauchyovská také v $M$, což je úplný metrický prostor, takže existuje $y \in M$ takové, že $\lim x_n = y$. Z jednoznačnosti limity vyplývá $x = y$, a tedy $x \in M$. Množina $M$ je tedy uzavřená.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost prvků $M$. Potom je $\{x_n\}$ cauchyovská také v $P$, což je úplný metrický prostor, a tedy existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$. Protože $M$ je uzavřená, platí $x \in M$. Tedy $\lim x_n = x$ také v $M$, takže $(M, \varrho)$ je úplný. □

**konec 3. přednášky (10.10.2019)**

**Věta 15.15** (Cantor)**.** *Nechť $(P, \varrho)$ je metrický prostor. Potom $P$ je úplný právě tehdy, když pro každou teleskopickou posloupnost $\{F_n\}$ neprázdných uzavřených podmnožin $P$ splňující*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$$

*je $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodová množina.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolíme libovolně prvek $x_n \in F_n$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$, platí $x_m, x_n \in F_{n_0}$, a tedy $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Posloupnost $\{x_n\}$ je tedy cauchyovská. Z úplnosti $P$ plyne, že existuje $x \in P$ takové, že $\lim x_n = x$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\{x_j\}_{j=n}^{\infty}$ posloupnost prvků $F_n$, která podle věty o limitě vybrané posloupnosti konverguje k $x$. Protože $F_n$ je uzavřená, platí $x \in F_n$. Protože $n \in \mathbb{N}$ bylo zvoleno libovolně, dostáváme $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{diam}\bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\bigr) \leq \operatorname{diam} F_m$, a tedy $\operatorname{diam}\bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\bigr) = 0$. Odtud plyne, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \overline{\{x_j\,;\ j \geq n\}}.$$

Potom je $\{F_n\}$ teleskopická posloupnost neprázdných uzavřených množin. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\varrho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $\operatorname{diam} F_n \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\lim \operatorname{diam} F_n = 0$. Podle předpokladu platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ pro nějaké $x \in P$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\varrho(x, x_n) \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\lim x_n = x$. □

**Poznámka.** Bez předpokladu $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ Cantorova věta neplatí. Příkladem je posloupnost $F_n = [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$.

## 16. Funkce více proměnných II

### 16.1. **Parciální derivace a diferenciály vyšších řádů.**

**Definice.** Nechť $f$ je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a $a \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle $j$-té proměnné v bodě $a$ značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$, pokud $i = j$. Obdobně značíme parciální derivace vyšších řádů.

**Definice.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : G \to \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $f$ je **třídy** $\mathcal{C}^k(G)$, jestliže jsou všechny parciální derivace funkce $f$ až do řádu $k$ včetně spojité na $G$. Množinu všech funkcí $f\colon G \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^k$ označujeme $\mathcal{C}^k(G)$ a klademe $\mathcal{C}^\infty(G) = \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{C}^k(G)$. O funkci $g$ řekneme, že je třídy $\mathcal{C}^k$ na $G$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), jestliže $g|G \in \mathcal{C}^k(G)$. Množinu všech spojitých funkcí na $G$ značíme $\mathcal{C}^0(G)$. Funkce třídy $\mathcal{C}^1(G)$ nazýváme **hladkými** funkcemi na $G$.

**Příklad.** Dokažte, že projekce, tedy zobrazení $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definovaná předpisem $\pi_i(x) = x_i$, $i = 1, \dots, n$, jsou třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

**Poznámky.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená.
(a) Jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$, potom $f$ má totální diferenciál v každém bodě množiny $G$.
(b) Platí

$$\mathcal{C}^0(G) \supset \mathcal{C}^1(G) \supset \mathcal{C}^2(G) \supset \dots$$

(c) Jestliže $f, g \in \mathcal{C}^k(G)$, potom také $f + g$ a $fg$ patří do $\mathcal{C}^k(G)$. Pokud navíc $g$ je nenulová na $G$, tak i $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^k(G)$.

**Definice.** Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \cup \{0\}$. Řekneme, že $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **třídy** $\mathcal{C}^k(G)$, jestliže jeho složky $f_1, \dots, f_m$ jsou třídy $\mathcal{C}^k(G)$.

**Poznámka.** Zobrazení $f : G \to \mathbb{R}^m$ třídy $\mathcal{C}^1(G)$ má derivaci v každém bodě množiny $G$.

**Věta 16.1** (skládání zobrazení třídy $\mathcal{C}^k$). *Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $m, n, s \in \mathbb{N}$ a $G \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Nechť $f : G \to \mathbb{R}^m$, $g : H \to \mathbb{R}^s$ jsou po řadě tříd $\mathcal{C}^k(G)$ a $\mathcal{C}^k(H)$ a platí $f(G) \subset H$. Pak zobrazení $g \circ f$ je třídy $\mathcal{C}^k(G)$.*

*Důkaz.* Označme $h = (h_1, \dots, h_s) = g \circ f$. Protože $f\colon G \to \mathbb{R}^m$, $g\colon H \to \mathbb{R}^s$ a $f(G) \subset H$, je zobrazení $h$ definované na $G$. Dále budeme postupovat pomocí matematické indukce podle $k$. Předpokládejme nejprve, že $k = 1$. Pro každé $x \in G$ existují podle Věty 14.4 derivace $f'(x)$ a $g'\big(f(x)\big)$. Podle Věty 14.11 pak platí pro každé $x \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah

$$\frac{\partial h_l}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial y_j}\big(f(x)\big)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x). \tag{1}$$

Funkce $x \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}\big(f(x)\big)$, $x \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité, a proto je funkce $\frac{\partial h_l}{\partial x_i}$ podle (1) spojitá. Odtud vyplývá, že zobrazení $g \circ f$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na $G$.

Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Stejně jako v předchozím případě platí pro každé $x \in G$, $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ vztah (1).

Nechť $l \in \{1, \dots, s\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$. Funkce $x \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ je třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na $G$. Funkce $x \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}\big(f(x)\big)$ je dle indukčního předpokladu třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na $G$, neboť funkce $y \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(y)$ je třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na $H$ a $f \in \mathcal{C}^k(G) \subset \mathcal{C}^{k-1}(G)$. Podle výše uvedené poznámky (c) je funkce $x \mapsto \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(x)$ též třídy $\mathcal{C}^{k-1}$ na $G$. Tedy je funkce $h$ třídy $\mathcal{C}^k(G)$.

Je-li $k = \infty$, tvrzení plyne přímo z definice podle předchozího. □

**Věta 16.2** (záměnnost parciálních derivací). *Nechť $f$ je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže obě funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v $a$, potom*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

**konec 4. přednášky (14.10.2019)**

*Důkaz.* Předpokládejme nejprve, že $n = 2$. Nechť $a = [a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2$ a $\delta > 0$, je takové, že

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \subset D\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) \cap D\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big).$$

Položme

$$W(t) = \frac{f(a_1 + t, a_2 + t) - f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2 + t) + f(a_1, a_2)}{t^2} \quad \text{pro } t \in (0, \delta).$$

Zvolme $t \in P_+(0, \delta)$. Položme

$$\varphi(x) = f(x, a_2 + t) - f(x, a_2) \quad \text{pro } x \in [a_1, a_1 + \delta).$$

Potom

$$W(t) = \frac{1}{t^2}\big(\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1)\big)$$

a

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, a_2) \quad \text{pro každé } x \in [a_1, a_1 + \delta).$$

Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi(t) \in (a_1, a_1 + t)$ takové, že

$$\varphi(a_1 + t) - \varphi(a_1) = \varphi'(\xi(t)) \cdot t.$$

Pak

$$W(t) = \frac{\varphi'(\xi(t))}{t} = \frac{1}{t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2 + t) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2)\Big). \tag{2}$$

Protože $\frac{\partial f}{\partial x}$ má v bodě $a$ totální diferenciál, existuje funkce $z_1 \colon (-\delta, \delta)^2 \to \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \alpha, a_2 + \beta) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)\beta + z_1(\alpha, \beta) \quad \text{pro každé } [\alpha, \beta] \in (-\delta, \delta)^2 \tag{3}$$

a

$$\lim_{[\alpha,\beta] \to o} \frac{z_1(\alpha, \beta)}{\|[\alpha, \beta]\|} = 0. \tag{4}$$

Dosaďme do (3) postupně $[\alpha, \beta] = [\xi(t) - a_1, t]$ a $[\alpha, \beta] = [\xi(t) - a_1, 0]$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2 + t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)(\xi(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)t + z_1(\xi(t) - a_1, t),\\
\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), a_2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)(\xi(t) - a_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \cdot 0 + z_1(\xi(t) - a_1, 0).
\end{aligned}$$

Díky tomu, že $t$ bylo zvoleno libovolně, obdržíme kombinací posledních dvou rovností s (2) vztah

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) + \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t) - z_1(\xi(t) - a_1, 0)}{t} \quad \text{pro každé } t \in (0, \delta).$$

Pro každé $t \in (0, \delta)$ platí

$$\frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{t} = \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{\|[\xi(t) - a_1, t]\|} \cdot \frac{\|[\xi(t) - a_1, t]\|}{t}$$

a

$$\frac{\|[\xi(t) - a_1, t]\|}{t} \leq \frac{\sqrt{(\xi(t) - a_1)^2 + t^2}}{t} \leq \frac{\sqrt{t^2 + t^2}}{t} = \sqrt{2}.$$

Z (4) plyne, že

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{\|[\xi(t) - a_1, t]\|} = 0,$$

a tedy celkem

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{z_1(\xi(t) - a_1, t)}{t} = 0.$$

Podobně odvodíme

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{z_1(\xi(t)-a_1,0)}{t} = 0.$$

Odtud vyplývá

$$\lim_{t\to 0_+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

Nyní vyjádříme funkci $W$ jiným způsobem. Zvolme $t \in (0,\delta)$ a definujme

$$\psi(y) = f(a_1+t,y) - f(a_1,y) \quad \text{pro } y \in [a_2, a_2+\delta).$$

Potom

$$W(t) = \frac{\psi(a_2+t)-\psi(a_2)}{t^2} \quad \text{pro } t \in (0,\delta).$$

Obdobně jako v první části důkazu odvodíme

$$W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + \frac{z_2(t,\eta(t)-a_2) - z_2(0,\eta(t)-a_2)}{t}$$

pro nějaké $\eta(t) \in (a_2, a_2+t)$, kde $z_2$ je funkce splňující

$$\lim_{[\alpha,\beta]\to o} \frac{z_2(\alpha,\beta)}{\|[\alpha,\beta]\|} = 0.$$

Odtud plyne podobně jako v předchozím případě

$$\lim_{t\to 0_+} W(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a).$$

Platí tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a).$$

Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i<j$. Definujme funkci $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$g(x,y) = f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_{j-1},y,a_{j+1},\dots,a_n).$$

Položme dále

$$\gamma(x,y) = (a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_{j-1},y,a_{j+1},\dots,a_n).$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(x,y)), &\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\gamma(x,y)) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(x,y)), &\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(x,y)). \end{aligned}$$

Zobrazení $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ má derivaci v každém bodě $\mathbb{R}^2$, a tedy $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ mají totální diferenciál v $(a_i,a_j)$. Odtud plyne tvrzení. $\square$

**Poznámka.** Parciální derivace obecně nejsou záměnné.

**Důsledek.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f$ je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Potom*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

**Důsledek.** *Nechť $k,n \in \mathbb{N}$, $f$ je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^k(G)$, $a \in G$, $\pi : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$ je permutace a $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}$. Potom*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(k)}} \dots \partial x_{i_{\pi(1)}}}(a).$$

*Důkaz.* Je-li $k = 1$, tvrzení zřejmě platí. Pro $k > 1$ stačí tvrzení dokázat pro permutaci ve formě „sousední transpozice", neboť každá permutace je konečnou kombinací sousedních transpozic. Nechť $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Položme

$$\pi(\ell) = \begin{cases} j+1, & \text{jestliže } \ell = j, \\ j, & \text{jestliže } \ell = j+1, \\ \ell, & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{pro } \ell \in \{1, \dots, k\}.$$

Označme

$$g = \frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_{j-1}} \cdots \partial x_{i_1}}.$$

Potom $g \in \mathcal{C}^2(G)$, a tedy podle předcházejícího důsledku Věty 16.2 platí

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{j+1} \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_{j+1}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{\pi(j+1)} \partial x_{\pi(j)}}(a).$$

Odtud plyne tvrzení. □

**Poznámka.** Zavedení vyšších derivací:

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \\ &f' : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m); \\ &f'' : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)); \\ &f''' : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))) \\ &\dots \end{aligned}$$

Pro $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, $u, u_1, u_2, v, w \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} &L(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m); \\ &L(u)(v) \in \mathbb{R}^m; \\ &L(u)(v+w) = L(u)(v) + L(u)(w); \\ &L(u)(\alpha v) = \alpha L(u)(v); \\ &L(u_1 + u_2)(v) = (L(u_1)(v) + L(u_2)(v)); \\ &L(\alpha u)(v) = \alpha L(u)(v). \end{aligned}$$

Tedy třídu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ lze ztotožnit s třídou všech bilineárních zobrazení z $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

**Definice.** Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $L : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^m$ se nazývá ***k*-lineární**, jestliže

$$u \mapsto L(v^1, \dots, v^{i-1}, u, v^{i+1}, \dots, v^k)$$

je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$, $v^1, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^k \in \mathbb{R}^n$. Množinu všech $k$-lineárních zobrazení z $(\mathbb{R}^n)^k$ do $\mathbb{R}^m$ značíme $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

**konec 5. přednášky (17.10.2019)**

**Poznámka.** Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$. Pro $B \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ platí

$$B(u, v) = B(\sum_{i=1}^n u_i e^i, \sum_{j=1}^n v_j e^j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j B(e^i, e^j).$$

Obdobně pro $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ dostaneme

$$L(u^1, \dots, u^k) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n u^1_{i_1} \dots u^k_{i_k} L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k}). \tag{5}$$

Je-li $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $h \in \mathbb{R}^n$, potom zobrazení $(u^2, u^3, \dots, u^k) \mapsto L(h, u^2, \dots, u^k)$ patří do $\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

**Lemma** (norma obrazu při $k$-lineárním zobrazení)**.** *Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Potom existuje $C \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\|L(u^1, \dots, u^k)\|_{\mathbb{R}^m} \le C\|u^1\|_{\mathbb{R}^n} \dots \|u^k\|_{\mathbb{R}^n}.$$

*Důkaz.* Položme

$$K = \max\left\{\left\|L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k})\right\| \,;\, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}\right\}.$$

Pak dle (5) pro každá $u^1, \dots, u^k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\begin{aligned}\left\|L(u^1, \dots, u^k)\right\| &\le \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} |u^1_{i_1} \dots u^k_{i_k}| \left\|L(e^{i_1}, \dots, e^{i_k})\right\| \le K \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left\|u^1\right\| \cdots \left\|u^k\right\| \\ &\le Kn^k \left\|u^1\right\| \cdots \left\|u^k\right\|.\end{aligned}$$

Tedy stačí položit $C = Kn^k$. □

**Definice.** Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Pak **normou** zobrazení $L$ rozumíme číslo

$$\|L\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} = \sup\left\{\|L(u^1, \dots, u^k)\|_{\mathbb{R}^m},\ \|u^1\|_{\mathbb{R}^n} \le 1, \dots, \|u^k\|_{\mathbb{R}^n} \le 1\right\}.$$

**Poznámka.** Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$. Potom $\left(\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}\right)$ tvoří normovaný lineární prostor.

**Definice.** Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $f$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací $k$-tého řádu zobrazení $f$ v bodě** $a$ nazýváme $k$-lineární zobrazení $L$ z $(\mathbb{R}^n)^k$ do $\mathbb{R}^m$ splňující

$$\lim_{h \to o} \frac{\|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

značíme $L = f^{(k)}(a)$.

**Věta 16.3** (derivace vyššího řádu a totální diferenciál)**.** *Nechť $n, k \in \mathbb{N}$, $f$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je $k$-tá derivace $f$ v $a$. Potom mají všechny parciální derivace $f$ řádu $(k-1)$ totální diferenciál v $a$ a pro každé $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$L(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_k}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(a).$$

*Důkaz.* Budeme postupovat matematickou indukcí dle $k$. Pro $k = 1$ tvrzení plyne z definice.

Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a tvrzení platí pro $k-1$. Zvolme $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Předpokládejme, že $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ je $k$-tá derivace $f$ v $a$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že všechny parciální derivace $f$ řádu $(k-1)$ existují na $B(a, \delta)$. Podle indukčního předpokladu pro $x \in B(a, \delta)$ a $[u^2, \dots, u^k] \in (\mathbb{R}^n)^{k-1}$ platí

$$f^{(k-1)}(x)(u^2, \dots, u^k) = \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(x) u^2_{j_2} \dots u^k_{j_k},$$

a tedy zobrazení $g\colon B(a, \delta) \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$g(x) = f^{(k-1)}(x)(e^{i_2}, \dots, e^{i_k})$$

splňuje

$$g(x) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(x) \quad \text{pro } x \in B(a, \delta).$$

Označme

$$w = (e^{i_2}, \dots, e^{i_k}).$$

Pak pro $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$, $\|h\| < \delta$, platí

$$\begin{aligned}&\frac{\left|f^{(k-1)}(a+h)(w) - f^{(k-1)}(a)(w) - L(h, w)\right|}{\|h\|} \\ &\le \frac{\left\|f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, ., \dots, .)\right\|}{\|h\|},\end{aligned}$$

a tedy

$$\lim_{h\to o} \frac{\left|f^{(k-1)}(a+h)(w) - f^{(k-1)}(a)(w) - L(h,w)\right|}{\|h\|} = 0.$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{h\to o} \frac{|g(a+h) - g(a) - L(h,w)|}{\|h\|} = 0.$$

Tudíž pro $i_1 \in \{1,\dots,n\}$ platí

$$\lim_{t\to 0} \left| \frac{g(a+te^{i_1}) - g(a)}{t} - L(e^{i_1}, w)\right| = 0,$$

a tedy

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_{i_1}}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{g(a+te^{i_1}) - g(a)}{t} = L(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_k}).$$

□

**Poznámky.** (a) Z předchozí věty plyne jednoznačnost $f^k(a)$, a tedy zpětně i korektnost tohoto značení.

(b) Je-li $f$ funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ a $a \in \mathbb{R}^n$, pak $f^k(a)$ existuje právě tehdy, když existují $f_j^k(a)$ pro každé $j \in \{1,\dots,m\}$.

**Věta 16.4** (symetrie derivace)**.** *Nechť $m,n,k \in \mathbb{N}$, $f$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f^{(k)}(a)$ existuje. Potom je $f^{(k)}(a)$ symetrické zobrazení, tj. je-li $\pi : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$ permutace, pak*

$$f^{(k)}(a)(u^1,\dots,u^k) = f^{(k)}(a)(u^{\pi(1)},\dots,u^{\pi(k)})$$

*pro každá $u^1,\dots,u^k \in \mathbb{R}^n$.*

*Důkaz.* Nechť $f = (f_1,\dots,f_m)$ a $j \in \{1,\dots,m\}$. Stačí dokázat tvrzení pro $f_j$.

Díky Větě 16.3 stačí dokázat, že pro $i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}$ a permutaci $\pi : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$ platí

$$\frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_1}}(a) = \frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_{\pi(k)}}\dots\partial x_{i_{\pi(1)}}}(a). \tag{6}$$

Uvedený vztah stačí dokázat pouze pro sousední transpozice. Nechť tedy $\ell \in \{1,\dots,k-1\}$ a

$$\pi(s) = \begin{cases} \ell+1, & s=\ell, \\ \ell, & s = \ell+1, \quad s\in\{1,\dots,k\}. \\ s & \text{jinak,} \end{cases}$$

Potom funkce

$$g(x) = \frac{\partial^{\ell-1} f_j}{\partial x_{i_{\ell-1}}\dots\partial x_{i_1}}(x)$$

splňuje

$$g(x) = \frac{\partial^{\ell-1} f_j}{\partial x_{i_{\pi(\ell-1)}}\dots\partial x_{i_{\pi(1)}}}(x)$$

na okolí bodu $a$. Funkce $f$ má derivaci $(\ell+1)$-ního řádu v $a$. Z Věty 16.3 tedy plyne, že funkce

$$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_{i_\ell}}(x), \quad x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x_{i_{\ell+1}}}(x)$$

mají derivaci v $a$. Podle Věty 16.2 tedy platí

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{\ell+1}}\partial x_{i_\ell}}(a) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_\ell}\partial x_{i_{\ell+1}}}(a).$$

Odtud plyne (6). □

**konec 6. přednášky (21.10.2019)**

**Věta 16.5** (postačující podmínka pro existenci derivace vyššího řádu)**.** *Nechť $m, n, k \in \mathbb{N}$, $f$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^k(G)$ a $a \in G$. Potom $f^{(k)}(a)$ existuje.*

*Důkaz.* Předpokládejme nejprve, že $m = 1$. Použijeme matematickou indukci podle $k$. Pro $k = 1$ tvrzení platí díky Větě 14.4.

Předpokládejme, že $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a že tvrzení platí pro $k - 1$. Označme $A = \{1, \dots, n\}^{k-1}$. Potom $A$ je konečná množina, označme $\#A$ počet jejích prvků. Položme

$$g_\alpha = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \quad \text{pro } \alpha = (i_1, \dots, i_{k-1}) \in A.$$

Potom pro každé $\alpha \in A$ je $g_\alpha$ třídy $\mathcal{C}^1(G)$, a tedy $g_\alpha$ má na $G$ totální diferenciál. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky tomu, že $A$ je konečná, nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall \alpha \in A \ \forall h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta : |g_\alpha(a + h) - g_\alpha(a) - g'_\alpha(a)(h)| < \varepsilon \|h\|.$$

Položme

$$L(h, v^1, \dots, v^{k-1}) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i}(a) h_i v^1_{\alpha_1} \cdots v^{k-1}_{\alpha_{k-1}} \quad \text{pro } h \in \mathbb{R}^n \text{ a } (v^1, \dots, v^{k-1}) \in (\mathbb{R}^n)^{k-1}.$$

Potom $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a

$$L(h, v^1, \dots, v^{k-1}) = \sum_{\alpha \in A} g'_\alpha(a)(h) v^1_{\alpha_1} \cdots v^{k-1}_{\alpha_{k-1}}.$$

Zvolme $u^1, \dots, u^{k-1} \in \mathbb{R}^n$ splňující $\left\|u^j\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1$ pro každé $j \in \{1, \dots, k - 1\}$. Označme $w = (u^1, \dots, u^{k-1})$. Potom pro každé $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| < \delta$, platí podle indukčního předpokladu a Věty 16.3

$$\begin{aligned} &f^{(k-1)}(a + h)(w) - f^{(k-1)}(a)(w) - L(h, w) \\ &\quad = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(a + h) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{k-1}_{\alpha_{k-1}} - \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(a) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{k-1}_{\alpha_{k-1}} - \sum_{\alpha \in A} g'_\alpha(a)(h) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{k-1}_{\alpha_{k-1}} \\ &\quad = \sum_{\alpha \in A} \left(g_\alpha(a + h) - g_\alpha(a) - g'_\alpha(a)(h)\right) u^1_{\alpha_1} \cdots u^{k-1}_{\alpha_{k-1}}. \end{aligned}$$

Odtud a z definice normy $(k - 1)$-lineárního zobrazení vyplývá, že

$$\begin{aligned} \|f^{(k-1)}(a + h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} &\leq \sum_{\alpha \in A} |g_\alpha(a + h) - g_\alpha(a) - g'_\alpha(a)(h)| \\ &< (\#A) \varepsilon \|h\|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\lim_{h \to o} \frac{\|f^{(k-1)}(a + h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

a tudíž $L = f^{(k)}(a)$.

Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ nalezneme podle z již dokázaného zobrazení $L_j \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ splňující

$$\lim_{h \to o} \frac{\|f_j^{(k-1)}(a + h) - f_j^{(k-1)}(a) - L_j(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Položme $L = (L_1, \dots, L_m)$. Potom $L \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a platí

$$\lim_{h \to o} \frac{\|f^{(k-1)}(a + h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \cdot, \dots, \cdot)\|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

takže $L = f^{(k)}(a)$. $\square$

**Poznámka.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f$ je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom je $f''(a)$ bilineární zobrazení reprezentované maticí

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ & \dots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

ve smyslu

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \quad f''(a)(u, v) = u^T \mathbb{H} v.$$

Matice $\mathbb{H}$ je symetrická.

**Definice.** Nechť $f$ je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom matici $\mathbb{H}$ nazýváme **Hessovou maticí**.

**Definice.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f$ je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom **druhým diferenciálem** funkce $f$ v bodě $a$ nazýváme kvadratickou formu $h \mapsto f''(a)(h, h)$. Podobně pro $k \in \mathbb{N}$ rozumíme **diferenciálem $k$-tého řádu** funkce $f$ v bodě $a$ zobrazení $h \mapsto f^{(k)}(a)(h, \dots, h)$.

16.2. **Taylorův polynom více proměnných.**

**Definice.** Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $f$ je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f^{(k)}(a)$ existuje. Potom **Taylorovým polynomem $k$-tého řádu** funkce $f$ v bodě $a$ rozumíme polynom $n$ proměnných

$$T_k^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(x - a, \dots, x - a),$$

přičemž vektor $(x - a, \dots, x - a)$ má $j$ složek.

**Věta 16.6** (Lagrangeův tvar zbytku)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(G)$ a $a, x \in G$. Potom existuje $\xi$ ležící na úsečce spojující body $a$ a $x$ takové, že*

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)(x - a, \dots, x - a)$$

*(přičemž vektor $(x - a, \dots, x - a)$ má $k + 1$ složek).*

*Důkaz.* Díky konvexitě a otevřenosti $G$ nalezneme interval $(\alpha, \beta)$ splňující $[0, 1] \subset (\alpha, \beta)$ a takový, že

$$a + t(x - a) \in G \quad \text{pro každé } t \in (\alpha, \beta).$$

Položme

$$\varphi(t) = f(a + t(x - a)) \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Zobrazení $t \mapsto a + t(x - a)$ je třídy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, a tedy podle Věty 16.1 je $\varphi$ třídy $\mathcal{C}^k(\alpha, \beta)$. Podle Lagrangeova tvaru zbytku pro funkci jedné proměnné (Věta 6.4) existuje $\eta \in (0, 1)$ takové, že

$$\varphi(1) - T_k^{\varphi,0}(1) = \frac{\varphi^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!},$$

tedy

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + \frac{\varphi^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}. \tag{7}$$

Použitím řetízkového pravidla dostaneme pro každé $t \in (\alpha, \beta)$

$$\varphi'(t) = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(a + t(x - a))(x_{i_1} - a_{i_1}) = f'(a + t(x - a))(x - a),$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(a + t(x - a))(x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2} = f''(a + t(x - a))(x - a, x - a)),$$

$$\vdots$$

Pro každé $j \in \{1, \dots, k+1\}$ a $t \in (\alpha, \beta)$ platí

$$\begin{aligned}\varphi^{(j)}(t) &= \sum_{i_j=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_j} \dots \partial x_{i_1}}(a + t(x-a))(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_j} - a_{i_j}) \\ &= f^{(j)}(a + t(x-a))(x-a, \dots, x-a).\end{aligned}$$

Dosazením do (7) dostaneme podle definice Taylorova polynomu

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a + \eta(x-a))(x-a, \dots, x-a).$$

Položme $\xi = a + \eta(x-a)$. Potom $\xi$ leží na úsečce spojující body $a$ a $x$ a splňuje požadované tvrzení. $\square$

**konec 7. přednášky (24.10.2019)**

**Věta 16.7** (Peanův tvar zbytku)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f$ je třídy $\mathcal{C}^k$ na jistém okolí $a$. Potom*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_k^{f,a}(x)}{\|x-a\|^k} = 0.$$

*Důkaz.* Pro $k = 0$ tvrzení triviálně platí. Předpokládejme, že $k \geq 1$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $f \in \mathcal{C}^k(B(a,\delta))$. Zvolme $x \in B(a,\delta)$. Protože množina $B(a,\delta)$ je otevřená a konvexní, můžeme podle Věty 16.6 nalézt $\xi(x)$ ležící na úsečce spojující $a$ a $x$ takové, že

$$f(x) = T_{k-1}^{f,a}(x) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi(x))(x-a, \dots, x-a).$$

Potom platí

$$\begin{aligned}f(x) - T_k^{f,a}(x) &= \frac{1}{k!}\left(f^{(k)}(\xi(x)) - f^{(k)}(a)\right)(x-a, \dots, x-a) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\right)(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k}).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}&\left|f(x) - T_k^{f,a}(x)\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\right)(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k})\right| \\ &\leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\right| \|x-a\|^k.\end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro každé $x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$ platí

$$0 \leq \frac{\left|f(x) - T_k^{f,a}(x)\right|}{\|x-a\|^k} \leq \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\right|.$$

Všechny parciální derivace až do řádu $k$ včetně jsou spojité v $a$, a tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \left|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi(x)) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\right| = 0,$$

neboť $\|\xi(x) - a\| \leq \|x-a\|$. Odtud plyne tvrzení. $\square$

**Poznámka.** Symbol $o$ můžeme zřejmým způsobem definovat i pro funkce více proměnných. Pak lze tvrzení předcházející věty psát ve tvaru

$$f(x) = T_k^{f,a}(x) + o(\|x-a\|^k), \quad x \to a.$$

16.3. **Věty o implicitně zadaných funkcích.**

**Věta 16.8** (o implicitně zadané funkci)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*
(a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
(b) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,
(c) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

*Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto $y$ symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ a*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad \text{kde } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ a } x \in U.$$

*Důkaz. Existence $\varphi$.* Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$. Díky spojitosti funkce $\frac{\partial F}{\partial y}$ v bodě $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ nalezneme $\delta_1 > 0$ a $\xi_1 > 0$ taková, že

$$\forall [x, y] \in B(\tilde{x}, \delta_1) \times [\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1] : \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0.$$

Funkce $t \mapsto F(\tilde{x}, t)$ je rostoucí na $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$. Máme proto

$$F(\tilde{x}, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \quad \text{a} \quad F(\tilde{x}, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Díky spojitosti $F$ nalezneme $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ takové, že

$$\forall x \in B(\tilde{x}, \delta_2) \colon \quad F(x, \tilde{y} - \xi_1) < 0 \quad \& \quad F(\tilde{x}, \tilde{y} + \xi_1) > 0.$$

Položme $U = B(\tilde{x}, \delta_2)$ a $V = (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$. Zvolme $x \in U$. Funkce $t \mapsto F(x, t)$ je na $[\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1]$ rostoucí, spojitá a splňuje $F(x, \tilde{y} - \xi_1) < 0$ a $F(\tilde{x}, \tilde{y} + \xi_1) > 0$. To znamená, že existuje právě jedno $y \in (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$ takové, že $F(x, y) = 0$.

*Spojitost $\varphi$.* Zvolme $x^* \in U$. Budeme dokazovat, že $\varphi$ je spojitá v $x^*$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Položme

$$G^* = U \times ((\varphi(x^*) - \varepsilon, \varphi(x^*) + \varepsilon) \cap V)$$

a $F^* = F|_{G^*}$. Potom je $G^*$ otevřená a platí

$$F^* \in \mathcal{C}^k(G^*), \quad F^*(x^*, \varphi(x^*)) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F^*}{\partial y}(x^*, \varphi(x^*)) > 0.$$

Podle již dokázaného existují okolí $U^* \subset \mathbb{R}^n$ bodu $x^*$ a okolí $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $\varphi(x^*)$ taková, že $U^* \times V^* \subset G^*$ a

$$\forall x \in U^* \; \exists! y \in V^* : F^*(x, y) = 0.$$

Odtud plyne

$$\varphi(U^*) \subset V^* \subset (\varphi(x^*) - \varepsilon, \varphi(x^*) + \varepsilon).$$

Tím je dokázána spojitost $\varphi$ v bodě $x^*$.

**konec 8. přednášky (31.10.2019)**

*Platí $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$.* Zvolme $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $x^* \in U$. Nalezneme $\delta > 0$ a $\eta > 0$ taková, že $B(x^*, \delta) \subset U$, $\varphi(B(x^*, \delta)) \subset V$ a

$$B(x^*, \delta) \times \varphi(B(x^*, \delta)) \subset B([x^*, \varphi(x^*)], \eta) \subset G.$$

Zvolme $t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. K němu nalezneme $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ležící na úsečce spojující body $[x^*, \varphi(x^*)]$ a $[x^* + te^i, \varphi(x^* + te^i)]$ takové, že

$$0 = F(x^* + te^i, \varphi(x^* + te^i)) - F(x^*, \varphi(x^*)) = F'(\xi(t))(te^i, \varphi(x^* + te^i) - \varphi(x^*)).$$

Tedy platí

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t)) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))(\varphi(x^* + te^i) - \varphi(x^*)).$$

Odtud vyplývá, že

$$\frac{\varphi(x^* + te^i) - \varphi(x^*)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))}.$$

Platí $\lim_{t\to 0} \xi(t) = [x^*, \varphi(x^*)]$, neboť

$$\|\xi(t) - [x^*, \varphi(x^*)]\| \leq |t| + \left|\varphi(x^* + te^i) - \varphi(x^*)\right| \to 0, \quad t \to 0.$$

Tedy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*, \varphi(x^*))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, \varphi(x^*))}. \tag{8}$$

*Platí* $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$. Pro $k = 1$ jsme tvrzení již dokázali. Předpokládejme, že platí pro nějaké $k-1$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Zobrazení $x \mapsto [x, \varphi(x)]$ je tedy třídy $\mathcal{C}^{k-1}(U)$. Funkce $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y}$ jsou třídy $\mathcal{C}^{k-1}(G)$, a tedy podle Věty 16.1 a (8) jsou také funkce $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ třídy $\mathcal{C}^{k-1}(U)$. Proto je $\varphi$ třídy $\mathcal{C}^k(U)$. □

**Věta 16.9** (o implicitně zadaných funkcích)**.** *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*
(a) *$F \in \mathcal{C}^k(G)$,*
(b) *$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = o$,*
(c)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ & \dots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

*Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = o$. Označíme-li toto $y$ symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$.*

*Důkaz.* Použijeme matematickou indukci podle $m$. Je-li $m = 1$, platí tvrzení podle Věty 16.8.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Dokažme ho pro $m + 1$. Nechť $F$ a $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ splňují předpokladech věty, kde $m$ je nahrazeno $(m + 1)$. Matice

$$\mathbb{A}_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix}$$

je regulární dle předpokladu.

Ukážeme, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\mathbb{A}_F = \mathbb{I}$, kde $\mathbb{I}$ označuje jednotkovou matici typu $M((m + 1) \times (m + 1))$. Uvažujme zobrazení $L\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $L(y) = (\mathbb{A}_F)^{-1} y$. Toto zobrazení je lineární bijekce $\mathbb{R}^{m+1}$ na $\mathbb{R}^{m+1}$ a je třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}^{m+1}$. Dále uvažujme zobrazení $T\colon G \to \mathbb{R}^{m+1}$ definované předpisem $T = L \circ F$. Zobrazení $T$ má následující vlastnosti:

- $T \in \mathcal{C}^k(G)$,
- $\forall [x, y] \in G\colon T(x, y) = o \Leftrightarrow F(x, y) = o$,
- $\mathbb{A}_T = \mathbb{A}_F^{-1} \circ \mathbb{A}_F = \mathbb{I}$.

První dvě vlastnosti jsou zřejmě splněny. Ověřme třetí vlastnost. Zobrazení $y \mapsto F(\tilde{x}, y)$ má derivaci v bodě $\tilde{y}$ reprezentovanou maticí $\mathbb{A}_F$. Zobrazení $y \mapsto T(\tilde{x}, y) = L \circ F(\tilde{x}, y)$ má podle věty o derivaci složeného zobrazení (Věta 14.10) v bodě $\tilde{y}$ derivaci reprezentovanou maticí $(\mathbb{A}_F)^{-1} \mathbb{A}_F = \mathbb{I}$. Protože

$$F_{m+1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 \neq 0,$$

existuje dle Věty 16.8 okolí $U^* \subset \mathbb{R}^{n+m}$ bodu $[\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ a okolí $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}_{m+1}$ takové, že

$$\forall [x, y_1, \dots, y_m] \in U^* \ \exists! y_{m+1} \in V^* : F_{m+1}(x, y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) = 0.$$

Označme tento bod symbolem $\psi(x, y_1, \dots, y_m)$. Pak $\psi \in \mathcal{C}^k(U^*)$. Definujme $H : U^* \to \mathbb{R}^m$ předpisem

$$H_i(x, y_1, \dots, y_m) = F_i(x, y_1, \dots, y_m, \psi(x, y_1, \dots, y_m)), \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Pak $H \in \mathcal{C}^k(U^*)$ podle Věty 16.1 a platí $H(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = o$. Dále platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) &= \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) + \frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)\frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)\\ &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j \in \{1, \dots, m\},\end{aligned}$$

neboť

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m) = 0, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Můžeme tedy aplikovat indukční předpoklad na $H$ v bodě $[\tilde{x}, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$. Nalezneme okolí $S \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $T \subset \mathbb{R}^m$ bodu $[\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m]$ taková, že $S \times T \subset U^*$ a

$$\forall x \in S \ \exists! [y_1, \dots, y_m] \in T \colon H(x, y_1, \dots, y_m) = o$$

**konec 9. přednášky (4.11.2019)**

Označme $\varphi_i(x) = y_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, a $\varphi_{m+1}(x) = \psi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$. Potom $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1})$ je třídy $\mathcal{C}^k$ na $S$ a pro každé $x \in S$ platí

$$\begin{aligned}F_i(x, \varphi(x)) &= F_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x))\\ &= F_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \psi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)))\\ &= \begin{cases} H_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) = 0, & i \in \{1, \dots, m\}, \\ 0, & i = m + 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Nalezneme okolí $V \subset T \times V^* \subset \mathbb{R}^{m+1}$ bodu $\tilde{y}$ a okolí $U \subset \varphi^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$. Jestliže $[x, y] \in U \times V$ splňuje $F(x, y) = o$, pak $x \in S$ a $y \in T \times V^*$, a tedy $[x, y_1, \dots, y_m] \in S \times T \subset U^*$. Potom $y_{m+1} = \psi(x, y_1, \dots, y_m)$, neboť $y_{m+1} \in V^*$. Dále $y_i = \varphi_i(x)$, $i \in \{1, \dots, m\}$, takže $y_{m+1} = \varphi_{m+1}(x)$. Odtud plyne tvrzení. □

**Definice.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a $f \colon G \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že v bodě $a$ má funkce $f$ totální diferenciál. **Tečnou nadrovinou** ke grafu $f$ v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \ x_{n+1} - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j)\}.$$

Jestliže $n = 2$, pak hovoříme o **tečné rovině**. Je-li $n = 1$, pak hovoříme o **tečné přímce (tečně)**.

16.4. **Lokální extrémy funkcí více proměnných.**

**Definice.** Nechť $(P, \varrho)$ je metrický prostor, $M \subset P$, $a \in M$ a $f$ je funkce z $P$ do $\mathbb{R}$ splňující $M \subset D(f)$. Řekneme, že $f$ nabývá v bodě $a$ svého **maxima** (**minima**) **na** $M$, jestliže platí

$$\forall x \in M : \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že $f$ nabývá v bodě $a$ svého **lokálního maxima** (**lokálního minima**) **na** $M$, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in B(a, \delta) \cap M : \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že $f$ nabývá v bodě $a$ svého **ostrého lokálního maxima** (**ostrého lokálního minima**) **na** $M$, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (B(a, \delta) \cap M) \setminus \{a\} : \ f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)).$$

**Poznámka.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $h \in \mathbb{R}^n$, $f\colon G \to \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a + th \in G$ pro $|t| < \delta$ a definujeme funkci $g\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a + th)$. Potom $g'(0) = f'(a)(h)$ a $g''(0) = f''(a)(h, h)$.

**Věta 16.10** (nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě $a$ lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a+te^i \in G$ pro $t \in (-\delta, \delta)$ a definujeme funkci $g\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a+te^i)$. Potom má $g$ v bodě 0 lokální extrém, a tedy $g'(0)$ buď neexistuje nebo je rovna 0. Podle věty o geometrickém významu gradientu (Věta 14.5) platí

$$g'(0) = f'(a)(e^i) = \langle \nabla f(a), e^i \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

takže $g'(0)$ existuje. Tedy $g'(0) = 0$, a tudíž také $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. □

**konec 10. přednášky (7.11.2019)**

**Věta 16.11** (elipticita positivně definitiní kvadratické formy)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je positivně definitní kvadratická forma. Potom*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n\colon \ Q(h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

*Důkaz.* Jest

$$Q(h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \quad h \in \mathbb{R}^n,$$

pro vhodná $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy je zobrazení $Q$ spojité na $\mathbb{R}^n$. Označme

$$S = \{h \in \mathbb{R}^n ; \ \|h\| = 1\}$$

a

$$\varepsilon = \inf\{Q(h) ; \ h \in S\}.$$

Množina $S$ je omezená a uzavřená, a tedy je podle Věty 15.8 kompaktní. Podle Věty 15.10 tedy existuje $h_0 \in S$ takové, že $Q(h_0) = \varepsilon$. Odtud a z positivní definitnosti $Q$ vyplývá, že $\varepsilon > 0$. Tvrzení věty zřejmě platí pro $h = o$. Zvolme $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$. Potom

$$Q(h) = Q\left(\|h\| \frac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2 Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

□

**Věta 16.12** (podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $\nabla f(a) = 0$. Potom platí:*

(a) *je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h, h)$ positivně definitní, pak funkce $f$ nabývá v bodě $a$ svého ostrého lokálního minima;*

(b) *je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h, h)$ negativně definitní, pak funkce $f$ nabývá v bodě $a$ svého ostrého lokálního maxima;*

(c) *je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h, h)$ indefinitní, pak funkce $f$ nenabývá v bodě $a$ lokálního extrému.*

*Důkaz.* (a) Předpokládejme, že $h \mapsto f''(a)(h, h)$ je positivně definitní. Podle Věty 16.11 nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall h \in \mathbb{R}^n\colon f''(a)(h, h) \geq \varepsilon \|h\|^2 .$$

Označme

$$\omega(x) = \frac{f(x) - T_2^{f,a}(x)}{\|x - a\|^2}, \quad x \in G \setminus \{a\}.$$

Podle Věty 16.7 platí $\lim_{x\to a}\omega(x) = 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a,\delta)\colon \omega(x) > -\frac{\varepsilon}{4}.$$

Potom pro každé $x \in P(a,\delta)$ platí

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2} f''(a)(x-a,x-a) &= f(x) - f(a) - \frac{1}{2} f''(a)(x-a,x-a) \\ &> -\frac{\varepsilon}{4}\left\|x-a\right\|^2. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že pro každé $x \in P(a,\delta)$ platí

$$f(x) - f(a) > \frac{1}{2} f''(a)(x-a,x-a) - \frac{1}{4}\varepsilon \left\|x-a\right\|^2 \geq \frac{1}{4}\varepsilon\left\|x-a\right\|^2 > 0.$$

Tedy $f$ nabývá v bodě $a$ svého ostrého lokálního minima.

Obdobně lze dokázat tvrzení (b).

(c) Díky tomu, že kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ je indefinitní, nalezneme $h^1, h^2 \in \mathbb{R}^n$ taková, že

$$f''(a)(h^1,h^1) > 0 \quad \text{a} \quad f''(a)(h^2,h^2) < 0.$$

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $t \in (-\delta,\delta)$ platí $a + th^1 \in G$ a $a + th^2 \in G$. Pro $t \in (-\delta,\delta)$ položme $g_1(t) = f(a+th^1)$ a $g_2(t) = f(a+th^2)$. Potom

$$g_1'(0) = f'(a)(h^1) = 0, \quad g_1''(0) = f''(a)(h^1,h^1) > 0.$$

Tedy $g_1$ má v 0 ostré lokální minimum. Obdobně lze dokázat, že $g_2$ má v 0 ostré lokální maximum. Odtud plyne, že $f$ nemá v $a$ lokální extrém. $\square$

**Poznámka.** Je-li kvadratická forma $h \mapsto f''(a)(h,h)$ semidefinitní, pak pouze na základě této informace nelze rozhodnout, zda má $f$ v $a$ extrém, případně jakého typu, jak ilustrují příklady $f(x,y) = \pm x^4 \pm y^4$.

**Věta 16.13** (Lagrangeova věta o multiplikátorech)**.** *Nechť $m,n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f, g_1, \dots, g_m : G \to \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$,*

$$M = \{z \in G;\ g_1(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$$

*a bod $\tilde{z}$ je bodem lokálního extrému funkce $f$ vzhledem k množině $M$. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(a) *vektory $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ jsou lineárně závislé;*

(b) *existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ splňující*

$$\nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{z}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{z}) = o.$$

*Důkaz.* Předpokládejme, že výrok (a) neplatí. Označme $s = n - m$ a $g = (g_1, \dots, g_m)$. Pišme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m$, přičemž proměnné prostoru $\mathbb{R}^s$ značíme $x$ a proměnné prostoru $\mathbb{R}^m$ značíme $y$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\tilde{z}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\tilde{z}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\tilde{z}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\tilde{z}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

a tedy dle Věty 16.9 existují okolí $U \subset \mathbb{R}^s$ bodu $\tilde{x} = [\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_s]$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y} = [\tilde{z}_{s+1}, \dots, \tilde{z}_n]$ taková, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ (označme jej $\varphi(x)$) splňující

$$g(x, \varphi(x)) = o.$$

**konec 11. přednášky (11.11.2019)**

Definujme funkci $\psi : U \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\psi(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Protože $\varphi \in C^1(U)$, platí $\psi \in C^1(U)$. Funkce $\psi$ má v bodě $\tilde{x}$ zřejmě lokální extrém. Podle Věty 16.10 tedy platí $\nabla\psi(\tilde{x}) = o$. Zvolme $j \in \{1, \dots, s\}$. Potom

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\tilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{z}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\tilde{z}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}). \tag{9}$$

Funkce $x \mapsto g(x, \varphi(x))$ je konstantní na $U$, a tedy

$$\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(\tilde{z}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_i}(\tilde{z}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) = 0, \quad l \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, s\}. \tag{10}$$

Označme

$$u^j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \dots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(\tilde{x})) \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1, \dots, s\},$$

a

$$H = \operatorname{Lin}[u^1, \dots, u^s].$$

Zřejmě platí $\dim H = s$. Tedy $\dim H^\perp = m$. Podle (10) máme

$$\nabla g_l(\tilde{z}) \in H^\perp, \quad l \in \{1, \dots, m\},$$

takže vektory $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$ tvoří bázi $H^\perp$. Z (9) vyplývá, že $\nabla f(\tilde{z}) \in H^\perp$. Odtud plyne, že $\nabla f(\tilde{z})$ je lineární kombinací vektorů $\nabla g_1(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$, takže platí výrok (b). □

16.5. **Regulární zobrazení.**

**Definice.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ a $f$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že $f$ je **difeomorfismus** na $G$, jestliže je prosté na $G$, $f(G)$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(G))$.

**Věta 16.14** (o lokálním difeomorfismu)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na jistém okolí $V$ bodu $a$. Jestliže $J_f(a) \neq 0$, pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $a$ takové, že $f|_U$ je difeomorfismus na $U$.*

*Důkaz.* Položme $G = \mathbb{R}^n \times V$, $b = f(a)$ a definujme funkci $F\colon G \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$F(y, x) = f(x) - y.$$

Potom $F \in \mathcal{C}^1(G)$, $F(b, a) = o$ a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(b,a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(b,a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podle Věty 16.9 existují okolí $U_1 \subset V$ bodu $a$ a okolí $W \subset \mathbb{R}^n$ bodu $b$ taková, že pro každé $y \in W$ existuje právě jedno $x \in U_1$ (označme $x = \varphi(y)$) takové, že $F(y, x) = o$. Navíc platí $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$ a

$$o = F(y, \varphi(y)) = f(\varphi(y)) - y, \quad y \in W.$$

Tedy

$$f(\varphi(y)) = y \quad \text{pro každé } y \in W.$$

Zobrazení $f$ je tudíž prosté na množině $U_1 \cap f^{-1}(W)$. Položme $U = U_1 \cap f^{-1}(W)$. Pak $U$ je otevřená množina, $a \in U \subset V$ a $(f|_U)^{-1} = \varphi \in \mathcal{C}^1(W)$. □

**Definice.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, a $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ je **regulární**, jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a pro každé $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$.

**Věta 16.15** (vztah difeomorfismu a regulárního zobrazení)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon G \to \mathbb{R}^n$. Pak $f$ je difeomorfismus na $G$ právě když je regulární a prosté.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $f$ je na $G$ difeomorfismus. Potom $f$ je zřejmě prosté a třídy $\mathcal{C}^1(G)$. Zvolme $a \in G$. Potom

$$\mathrm{Id}(a) = \mathrm{Id}'(a) = (f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(f(a)) \circ f'(a).$$

Odtud plyne, že $f'(a)$ regulární, a tedy $J_f(a) \neq 0$.

$\Leftarrow$ Nyní předpokládejme, že $f$ regulární a prosté na $G$. Potom $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Zvolme $y \in f(G)$. K němu nalezneme $x \in G$ splňující $f(x) = y$. Podle Věty 16.14 existuje otevřená množina $U \subset G$ obsahující $x$ taková, že $f|_U$ je difeomorfismus. Tedy $f(U)$ je otevřená a $y \in f(U) \subset f(G)$. Tudíž je $f(G)$ otevřená. Navíc je $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(U))$. Protože $y$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(f(G))$. □

**konec 12. přednášky (14.11.2019)**

## 17. Stejnoměrná konvergence

### 17.1. **Úvod a základní pojmy.**

**Definice.** Nechť $M$ je množina, $(Q, \sigma)$ je metrický prostor, $f \colon M \to Q$ a $f_n \colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje bodově** k $f$ na $M$ a značíme $f_n \to f$, jestliže pro každé $x \in M$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje stejnoměrně** k $f$ na $M$ a značíme $f_n \rightrightarrows f$, jestliže

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

**Poznámka.** Nechť $M$ je množina, $(Q, \sigma)$ je metrický prostor a $f, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na $M$ s hodnotami v $Q$. Potom posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně k $f$ na $M$ právě tehdy, když existují $\varepsilon > 0$, rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ a posloupnost $\{x_k\}$ prvků $M$ splňující

$$\forall k \in \mathbb{N} \colon \sigma(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) \geq \varepsilon.$$

**Definice.** Nechť $(P, \varrho)$ a $(Q, \sigma)$ jsou metrické prostory. Nechť $f \colon P \to Q$ a $f_n \colon P \to Q$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje lokálně stejnoměrně** k $f$ na $P$ a značíme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$, jestliže pro každé $x \in P$ existuje $r > 0$ takové, že $f_n|_{B(x,r)} \rightrightarrows f|_{B(x,r)}$ na $B(x, r)$.

**Příklad.** Nechť $f_n(x) = \frac{1}{2^n} \sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na $\mathbb{R}$.

**Příklad.** Nechť $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na $[0, 1]$.

**Věta 17.1** (charakterisace stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí)**.** *Nechť $M$ je neprázdná množina, $(Q, \sigma)$ je metrický prostor, $f_n \colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$, a $f \colon M \to Q$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $M$ právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{\sigma(f_n(x), f(x));\ x \in M\} = 0.$$

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Pak tedy pro každé $n \geq n_0$, platí

$$0 \leq \sup\{\sigma(f_n(x), f(x))\,;\ x \in M\} \leq \varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení.

$\Leftarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$, platí

$$\sup\{\sigma(f_n(x), f(x))\,;\ x \in M\} < \varepsilon.$$

Potom zřejmě pro každá $n \geq n_0$ a $x \in M$ platí
$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$
a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $M$. $\square$

**Příklad.** Nechť $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$, $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, a $a \in [0, \infty)$. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na na $[a, \infty)$.

**Poznámka.** Rovnost
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
obecně neplatí. Například pro $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, máme $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-} x^n = 1$, ale $\lim_{x\to 1-} \lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

**Věta 17.2** (Mooreova–Osgoodova). *Nechť $(P, \varrho)$ je metrický prostor, $x_0 \in P$ a nechť funkce $f_n, f$, $n \in \mathbb{N}$, z $P$ do $\mathbb{R}$ splňují*

(a) *$f_n \rightrightarrows f$ na $(B(x_0, r) \setminus \{x_0\})$ pro nějaké $r > 0$,*

(b) *$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$, přičemž $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

*Potom existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny.*

**konec 13. přednášky (18.11.2019)**

*Důkaz.* Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Potom platí
$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}\ \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 \colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$
Odtud vyplývá, že platí
$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 \colon |a_n - a_m| \leq \varepsilon,$$
a tedy posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku. Podle Věty 2.23 je tato posloupnost konvergentní, tedy existuje $a \in \mathbb{R}$ splňující $\lim a_n = a$.

Dokážeme, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$ a zároveň
$$\forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \colon |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
K tomuto $n_0$ nyní nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že
$$\forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \colon |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon.$$
Potom pro každé $x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ platí
$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < 3\varepsilon.$$
Odtud již plyne tvrzení. $\square$

**Věta 17.3** (vztah stejnoměrné konvergence a spojitosti). *Nechť $(P, \varrho)$ a $(Q, \sigma)$ jsou metrické prostory, $f_n \colon P \to Q$ jsou spojitá zobrazení, $n \in \mathbb{N}$, $f \colon P \to Q$ je zobrazení a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $P$. Potom $f$ je spojité.*

*Důkaz.* Zvolme $a \in P$. K němu nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(a, r)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\forall x \in B(a, r) \colon \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) < \varepsilon.$$
K tomuto $n_0$ dále nalezneme $\delta \in (0, r)$ takové, že
$$\forall x \in B(a, \delta) \colon \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) < \varepsilon.$$
Potom pro každé $x \in B(a, \delta)$ platí
$$\sigma(f(x), f(a)) \leq \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + \sigma(f_{n_0}(a), f(a)) < 3\varepsilon.$$
Funkce $f$ je tedy spojitá v bodě $a$. Protože bod $a$ byl zvolen libovolně, je $f$ spojitá na $P$. $\square$

**Definice.** Nechť $(P, \varrho)$ je metrický prostor. Řekneme, že funkce $f: P \to \mathbb{R}$ je **první Baireovy třídy** na $P$, jestliže existuje posloupnost spojitých funkcí $f_n: P \to \mathbb{R}$, která bodově konverguje k funkci $f$ na $P$.

**Poznámky.** (a) Každá spojitá funkce je první Baireovy třídy.

(b) Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = 1 \\ 0 & \text{pokud } x \in [0, 1), \end{cases}$$

je první Baireovy třídy, ale není spojitá.

(c) Dirichletova funkce první Baireovy třídy.

**Věta 17.4** (charakterisace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f_n: (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $(a, b)$ právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$, kde $c, d \in (a, b)$, $c < d$.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Předpokládejme, že existují $c, d \in (a, b)$ taková, že $c < d$, $[c, d] \subset (a, b)$ a $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně na $[c, d]$. Podle výše uvedené poznámky nalezneme $\varepsilon > 0$, rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ a posloupnost $\{x_k\}$ prvků $[c, d]$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{N}: |f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon.$$

Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty nalezneme rostoucí posloupnost $\{k_j\}_{j=1}^\infty$ a $x^* \in [c, d]$ splňující $x_{k_j} \to x^*$, $j \to \infty$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x^*, r)$. K tomuto $r$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ \forall x \in B(x^*, r): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nyní nalezneme $j \in \mathbb{N}$ takové, že $n_{k_j} \geq n_0$ a $x_{k_j} \in B(x^*, r)$. Potom

$$\varepsilon \leq |f_{n_{k_j}}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})| < \varepsilon,$$

což je spor.

$\Leftarrow$ Pro $x_0 \in (a, b)$ nalezneme $r > 0$ takové, že $[x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $(x_0 - r, x_0 + r)$. $\square$

**Definice.** Nechť $M$ je množina a $f_n: M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}$ je **stejnoměrně cauchyovská** na $M$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in M: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

**Věta 17.5** (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť $M$ je množina a $f_n: M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na $M$ právě tehdy, když je stejnoměrně cauchyovská na $M$.*

**konec 14. přednášky (21.11.2019)**

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\ \forall x \in M: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Zvolme $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq n_0$. Potom

$$\forall x \in M: |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon,$$

a tedy je posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně cauchyovská na $M$.

$\Leftarrow$ Zvolme $x \in M$. Potom je posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v $\mathbb{R}$, a má tedy vlastní limitu, kterou označíme symbolem $f(x)$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0,\ m \geq n_0\ \forall x \in M: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Protože $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$, plyne odtud, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\ \forall x \in M: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $M$. $\square$

**Věta 17.6** (stejnoměrná konvergence derivací)**.** *Nechť* $(a,b)$ *je omezený interval a* $f_n\colon (a,b)\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. *Nechť*

(a) *pro každé* $n\in\mathbb{N}$ *má* $f_n$ *vlastní derivaci na* $(a,b)$*;*

(b) *existuje* $x_0\in(a,b)$ *takové, že* $\{f_n(x_0)\}$ *konverguje;*

(c) $\{f_n'\}$ *konverguje stejnoměrně na* $(a,b)$.

*Potom existuje* $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ *taková, že* $f_n\rightrightarrows f$ *na* $(a,b)$, $f$ *má vlastní derivaci na* $(a,b)$ *a platí* $f_n'\rightrightarrows f'$ *na* $(a,b)$.

*Důkaz.* Zvolme $\varepsilon>0$. K němu nalezneme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m,n\in\mathbb{N},\ m,n\ge n_0,\ \forall x\in(a,b)\colon |f_n'(x)-f_m'(x)|<\varepsilon \tag{11}$$

(to je možné díky Větě 17.5) a zároveň

$$\forall m,n\in\mathbb{N},\ m,n\ge n_0,\colon |f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\varepsilon.$$

Zvolme $x\in(a,b)$. Potom

$$|f_n(x)-f_m(x)|\le |f_n(x)-f_m(x)-(f_n(x_0)-f_m(x_0))|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|.$$

Podle Lagrangeovy věty pro funkci $f_n-f_m$ existuje $\xi\in(a,b)$ takové, že

$$|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(x_0)-f_m(x_0))|=|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)|\cdot|x-x_0|.$$

Potom dle (11) platí

$$|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)|<\varepsilon.$$

Navíc

$$|x-x_0|\le b-a,$$

neboť $(a,b)$ je omezený interval, takže kombinací odhadů dostáváme

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon(b-a)+\varepsilon=\varepsilon(b-a+1).$$

Posloupnost $\{f_n\}$ je tedy stejnoměrně cauchyovská na $(a,b)$, a tudíž je podle Věty 17.5 stejnoměrně konvergentní na $(a,b)$. Její limitu označíme $f$.

Zbývá dokázat, že $f$ má vlastní derivaci na $(a,b)$ a $f_n'\rightrightarrows f'$ na $(a,b)$. Protože $f_n'$ konverguje stejnoměrně na $(a,b)$, stačí dokázat, že $f_n'\to f'$ na $(a,b)$. Zvolme $z\in(a,b)$ a $n\in\mathbb{N}$. Definujme funkci $\varphi_n$ předpisem

$$\varphi_n(x)=\frac{f_n(x)-f_n(z)}{x-z},\quad x\in(a,b)\setminus\{z\}.$$

Zvolme $x\in(a,b)\setminus\{z\}$ a $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge n_0$, $n\ge n_0$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\eta$ ležící mezi $x$ a $z$ takové, že

$$|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(z)-f_m(z))|=|f_n'(\eta)-f_m'(\eta)|\cdot|x-z|.$$

Tedy podle definice funkcí $\varphi_n$ a $\varphi_m$ a podle (11) platí

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|=|f_n'(\eta)-f_m'(\eta)|<\varepsilon.$$

Protože $x$ bylo zvoleno libovolně, je posloupnost $\{\varphi_n\}$ stejnoměrně cauchyovská, a tedy podle Věty 17.5 také stejnoměrně konvergentní na $(a,b)\setminus\{z\}$. Podle Mooreovy–Osgoodovy věty (Věta 17.2) tudíž existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to z}\varphi_n(x)\qquad\text{a}\qquad\lim_{x\to z}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$$

a jsou si rovny. Protože

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to z}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(z)$$

a

$$\lim_{x\to z}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{x\to z}\frac{f(x)-f(z)}{x-z}=f'(z),$$

existuje vlastní $f'(z)$ a platí $f'(z)=\lim_{n\to\infty}f_n'(z)$. Protože $z$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud tvrzení věty. □

**Věta 17.7** (záměna limity a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na neprázdném omezeném intervalu $(a,b)$ a nechť $f_n \in \mathcal{N}(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

*Důkaz.* Zvolme $x_0 \in (a,b)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje funkce $F_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ taková, že $F_n' = f_n$ na $(a,b)$ a $F_n(x_0) = 0$. Potom podle Věty 17.6 je posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně konvergentní na $(a,b)$. Označme $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$, $x \in (a,b)$. Podle Věty 17.6 potom platí $F' = f$ na $(a,b)$. Podle Mooreovy–Osgoodovy věty platí

$$\lim_{x\to a_+} F(x) = \lim_{x\to a_+} \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a_+} F_n(x)$$

a

$$\lim_{x\to b_-} F(x) = \lim_{x\to b_-} \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} F_n(x),$$

přičemž obě tyto limity jsou vlastní. Celkem tedy dostáváme vztah

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} F_n(x) - \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a_+} F_n(x)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.\end{aligned}$$

Tím je tvrzení věty dokázáno. □

**Značení.** Nechť $M$ je množina, $f\colon M \to \mathbb{R}$ a $g\colon M \to \mathbb{R}$. Píšeme $f \le g$ na $M$, jestliže pro každé $x \in M$ platí $f(x) \le g(x)$. Speciálně píšeme $f \ge 0$ na $M$, jestliže $f$ je nezáporná na $M$.

**Definice.** Nechť $M$ je množina a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $f_n$ je **neklesající** na $M$, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n \le f_{n+1}$ na $M$. Obdobně definujeme posloupnost funkcí **nerostoucí**, **klesající**, **rostoucí**, **monotónní** a **ryze monotónní** na $M$.

**konec 15. přednášky (25.11.2019)**

**Věta 17.8** (Diniova)**.** *Nechť $(P,\varrho)$ je kompaktní metrický prostor a $\{f_n\}$ je monotónní posloupnost spojitých zobrazení $P$ do $\mathbb{R}$. Nechť $f\colon P \to \mathbb{R}$ je spojité a $f_n \to f$ na $P$. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $P$.*

*Důkaz.* Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n - f$ spojité, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $f(x) = 0$ pro každé $x \in P$, jinak bychom uvažovali posloupnost $\{f_n - f\}$. Dále můžeme předpokládat, že na $P$ platí

$$f_1 \ge f_2 \ge \cdots \ge 0,$$

neboť v opačném případě bychom uvažovali posloupnost $\{-f_n\}$. Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Nalezneme $\varepsilon > 0$ a posloupnost $\{x_n\}$ prvků $P$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(x_n) \ge \varepsilon$. Díky kompaktnosti $P$ nalezneme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ posloupnosti $\{x_n\}$ a bod $x^* \in P$ takové, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$. Protože $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x^*) = 0$, nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $f_{n_m}(x^*) < \varepsilon$. Díky spojitosti $f_{n_m}$ nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in B(x^*,\delta)$ platí $f_{n_m}(x) < \varepsilon$. Protože $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$, nalezneme $l \in \mathbb{N}$, $l \ge m$, takové, že $x_{n_l} \in B(x^*,\delta)$. Posloupnost $\{f_{n_k}(x_{n_l})\}_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí, a tedy

$$\varepsilon \le f_{n_l}(x_{n_l}) \le f_{n_m}(x_{n_l}) < \varepsilon,$$

což je spor. □

**Definice.** Nechť $M$ je množina a $A \subset M$. Pak **charakteristickou funkcí** množiny $A$ nazýváme funkci $\chi_A\colon M \to \mathbb{R}$, definovanou předpisem

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in A,\\ 0, & \text{pokud } x \in M \setminus A.\end{cases}$$

17.2. **Weierstrassova věta.**

**Definice.** Řekneme, že operátor (zobrazení) $L$ z $\mathcal{C}([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$ je **positivní**, jestliže platí implikace

$$f \in \mathcal{C}([0,1]), f \geq 0 \text{ na } [0,1] \quad \Rightarrow \quad L(f) \geq 0 \text{ na } [0,1].$$

**Poznámka.** Každý positivní lineární operátor $L$ na $\mathcal{C}([0,1])$ zachovává monotonii v následujícím smyslu: je-li $f \leq g$ na $[0,1]$, pak $L(f) \leq L(g)$ na $[0,1]$.

**Věta 17.9** (Korovkinova věta o třech funkcích)**.** *Nechť $\{L_n\}$ je posloupnost positivních lineárních operátorů z $\mathcal{C}([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$. Potom $L_n f \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([0,1])$ právě tehdy, když $L_n(g_j) \rightrightarrows (g_j)$ na $[0,1]$ pro každou ze tří funkcí $g_j(x) = x^j$, $x \in [0,1]$, $j = 0,1,2$.*

*Důkaz.* Zvolme $f \in C([0,1])$ a $\varepsilon > 0$. Potom je $f$ omezená a stejnoměrně spojitá na $[0,1]$. Nalezneme tedy $M > 0$ takové, že pro každé $x \in [0,1]$ platí $|f(x)| \leq M$, a $\delta \in (0,1)$ takové, že pro každé $x, y \in [0,1]$ splňující $|x-y| < \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. K $\delta$ a $\varepsilon$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, každé $x \in [0,1]$ a každé $j \in \{0,1,2\}$ platí

$$|L_n(g_j)(x) - g_j(x)| < \varepsilon\delta^2.$$

Zvolme $y \in [0,1]$. Potom pro každé $x \in [0,1]$ nastane buď $|x-y| < \delta$ a potom $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, nebo $|x-y| \geq \delta$ a potom

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2M \leq \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}.$$

V každém případě, tedy pro každé $x \in [0,1]$, platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}.$$

Odtud plyne, že pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$f(x) \leq f(y) + \varepsilon + \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}.$$

Označme

$$h(x) = f(y) + \varepsilon + \frac{2M(x-y)^2}{\delta^2}, \quad x \in [0,1].$$

Pak pro speciální volbu $x = y$ dostáváme

$$h(y) = f(y) + \varepsilon.$$

Z definice funkcí $g_0, g_1$ a $g_2$ plyne, že

$$h = c_0 g_0 + c_1 g_1 + c_2 g_2,$$

kde

$$c_0 = f(y) + \varepsilon + \frac{2My^2}{\delta^2}, \quad c_1 = -\frac{4My}{\delta^2}, \quad c_2 = \frac{2M}{\delta^2}.$$

Navíc platí $f \leq h$ na $[0,1]$, a tedy díky positivitě operátorů $\{L_n\}$ také

$$L_n(f) \leq L_n(h) \quad \text{na } [0,1] \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned} |L_n(h)(x) - h(x)| \leq |c_0||L_n(g_0)(x) - g_0(x)| + \\ + |c_1||L_n(g_1)(x) - g_1(x)| + c_2|L_n(g_2)(x) - g_2(x)|. \end{aligned}$$

Protože $y \in [0,1]$, platí

$$|c_0| \leq M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \quad \text{a} \quad |c_1| \leq \frac{4M}{\delta^2}.$$

Tedy pro každé $x \in [0,1]$ a každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned}|L_n(h)(x) - h(x)| &\leq (M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2})|L_n(g_0)(x) - g_0(x)| + \\ &+ \frac{4M}{\delta^2}|L_n(g_1)(x) - g_1(x)| + \frac{2M}{\delta^2}|L_n(g_2)(x) - g_2(x)| \\ &\leq \varepsilon\delta^2 \left( M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} + \frac{4M}{\delta^2} + \frac{2M}{\delta^2} \right) = \varepsilon \left( M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M \right),\end{aligned}$$

a tudíž

$$L_n(h)(x) \leq h(x) + \varepsilon \left( M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M \right).$$

Pro speciální volbu $x = y$ dostáváme

$$L_n(f)(y) \leq L_n(h)(y) \leq h(y) + \varepsilon \left( M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M \right),$$

a tedy

$$L_n(f)(y) \leq f(y) + \varepsilon + \varepsilon \left( M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M \right) = f(y) + \varepsilon \left( M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M + 1 \right).$$

Obdobně lze dokázat, že

$$L_n(f)(y) \geq f(y) - \varepsilon \left( M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M + 1 \right).$$

Protože $y$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$\sup_{y \in [0,1]} |L_n(f)(y) - f(y)| \leq \varepsilon \left( M\delta^2 + \varepsilon\delta^2 + 8M + 1 \right),$$

tedy

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in [0,1]} |L_n(f)(y) - f(y)| = 0,$$

což podle Věty 17.4 znamená, že

$$L_n(f) \rightrightarrows f \quad \text{na } [0,1].$$

Tvrzení věty je dokázáno. □

**Definice.** Nechť $f \in \mathcal{C}[0,1]$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom polynom

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Bernsteinovým polynomem** funkce $f$ stupně $n$. Symbolem $B_n$ značíme operátor z $\mathcal{C}([0,1])$ do $\mathcal{C}([0,1])$ definovaný předpisem $B_n\colon f \mapsto B_n(f)$.

**Poznámka.** $\{B_n\}$ je posloupnost positivních lineárních operátorů na $\mathcal{C}[0,1]$.

**konec 16. přednášky (28.11.2019)**

**Věta 17.10** (Weierstrassova)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje polynom $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takový, že*

$$\forall x \in [a,b]\colon |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

*Důkaz.* Předpokládejme nejprve, že $[a,b] = [0,1]$. Víme, že $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost pozitivních lineárních operátorů na $\mathcal{C}([0,1])$. Ověříme, že pro každé $j \in \{0,1,2\}$ platí

$$B_n(g_j) \rightrightarrows g_j \quad \text{na } [0,1].$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ platí

$$B_n(g_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1 = g_0(x),$$

a tedy $B_n(g_0) = g_0$ na $[0,1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Připomeňme, že pro každé $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, platí

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned}
B_n(g_1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\
&= x(x+1-x)^{n-1} = x = g_1(x),
\end{aligned}$$

a tedy $L_n(g_1) = g_1$ na $[0,1]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Konečně pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a každé $x \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned}
B_n(g_2)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k} + \frac{x}{n} \\
&= \frac{n-1}{n} x^2 (x+1-x)^{n-2} + \frac{x}{n} = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}.
\end{aligned}$$

To znamená, že pro každé $n \in N$, $n \geq 2$, a každé $x \in [0,1]$ platí

$$|B_n(g_2)(x) - g_2(x)| = \frac{x - x^2}{n} \leq \frac{1}{4n},$$

a tedy

$$B_n(g_2) \rightrightarrows g_2 \quad \text{na } [0,1].$$

Z Korovkinovy věty tudíž vyplývá, že

$$B_n(f) \rightrightarrows f \quad \text{na } [0,1].$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x \in [0,1]$ platí $|B_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$ a položíme $P = B_{n_0}(f)$. Odtud plyne tvrzení věty v případě, kdy $[a,b] = [0,1]$.

Nyní předpokládejme, že $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definujme zobrazení $\varphi : [0,1] \to [a,b]$ předpisem

$$\varphi(x) = (b-a)x + a.$$

Potom $\varphi$ je spojitá bijekce $[0,1]$ na $[a,b]$ a platí

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}, \quad y \in [a,b].$$

Položme $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Potom $\tilde{f} \in \mathcal{C}([0,1])$. Podle již dokázaného tvrzení nalezneme polynom $\tilde{P}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takový, že pro každé $x \in [0,1]$ platí

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{P}(x)| < \varepsilon.$$

Položme

$$P(y) = \tilde{P}\left(\frac{y-a}{b-a}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Potom $P$ je polynom a pro každé $y \in [a,b]$ platí

$$|f(y) - P(y)| = |\tilde{f}(\varphi^{-1}(y)) - \tilde{P}(\varphi^{-1}(y))| < \varepsilon.$$

□

**Poznámka.** Tvrzení Weierstrassovy věty nelze rozšířit na interval, který není omezený a uzavřený. Například pro $f(x) = e^x$ na $(0,\infty)$ a libovolný polynom $P$ platí $\lim_{x\to\infty} |f(x) - P(x)| = \infty$, podobně pro $f(x) = \frac{1}{x}$ a libovolný polynom $P$ platí $\lim_{x\to 0+} |f(x) - P(x)| = \infty$.

17.3. **Stejnoměrná konvergence řad funkcí.**

**Definice.** Nechť $M$ je množina, $(Q, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a $f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **bodově konverguje** na $M$, jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{n} f_k\}_{n=1}^{\infty}$ bodově konverguje na $M$. Pojmy **stejnoměrné konvergence** a **lokálně stejnoměrné konvergence** řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ definujeme obdobně. Stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ značíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, lokálně stejnoměrnou konvergenci značíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$.

**Poznámky.** Nechť $M$ je množina a $f_n, g_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Z Věty 17.5 plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na množině $M$ právě tehdy, když platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m,n \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq n_0\ \forall x \in M\colon \left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right| < \varepsilon.$$

(b) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $M$, potom $f_n \rightrightarrows 0$ na $M$. Toto tvrzení plyne z (a), protože pro každé $x \in M$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(x)| = \left|\sum_{j=n}^{n} f_j(x)\right|$

(c) Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konvergují stejnoměrně na $M$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak také řady $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha f_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n \pm g_n)$ konvergují stejnoměrně na $M$.

**Věta 17.11** (Weierstrassovo kritérium)**.** *Nechť $M$ je neprázdná množina a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Označme*

$$\sigma_n = \sup_{x\in M} |f_n(x)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $M$.*

*Důkaz.* Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{j=n}^{\infty} \sigma_j < \varepsilon.$$

Potom pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \geq n \geq n_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$\left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} \sigma_j < \varepsilon.$$

Z předcházející poznámky (a) tedy plyne, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $M$. □

**Příklad.** Nechť $\alpha > 1$. Dokažte, že řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$

jsou stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

**Řešení.** Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\cos(nx)|}{n^\alpha}.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sigma_n = \frac{1}{n^\alpha},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty.$$

Podle Weierstrassova kritéria tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$ stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$. Obdobně lze dokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$.

**Věta 17.12** (Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence řad funkcí)**.** *Nechť $M$ je množina a $f_n \colon M \to \mathbb{R}$, $g_n \colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť*

(a) *pro každé $x \in M$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ monotónní,*
(b) $\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in M \colon |g_n(x)| \leq K$,
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ *na $M$.*

*Potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

*Důkaz.* Označme

$$M^{\downarrow} = \{x \in M\,;\ \{g_n(x)\} \text{ je nerostoucí}\}$$

a

$$M^{\uparrow} = \{x \in M\,;\ \{g_n(x)\} \text{ je neklesající}\}.$$

Potom dle (a) platí $M = M^{\downarrow} \cup M^{\uparrow}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n \geq n_0\ \forall x \in M : \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ a každé $x \in M$ označme

$$\sigma_k(x) = \sum_{j=n}^{k} f_j(x).$$

Potom

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq n\ \forall x \in M : |\sigma_k(x)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Zvolme $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Z Abelovy parciální sumace vyplývá, že

$$\forall x \in M : \sum_{j=n}^{m} f_j(x) g_j(x) = \sum_{j=n}^{m-1} \sigma_j(x) \left(g_j(x) - g_{j+1}(x)\right) + \sigma_m(x) g_m(x). \tag{13}$$

Zvolme $x \in M^{\downarrow}$. Potom z předpokladu (a) a odhadu (12) vyplývá, že

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) g_j(x) \right| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j(x)| \left(g_j(x) - g_{j+1}(x)\right) + |\sigma_m(x)||g_m(x)| \\
&< \varepsilon \sum_{j=n}^{m-1} \left(g_j(x) - g_{j+1}(x)\right) + \varepsilon |g_m(x)| \\
&= \varepsilon \left(g_n(x) - g_m(x) + \varepsilon |g_m(x)|\right) \leq 3K\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $M^{\downarrow}$. Obdobně lze dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $M^{\uparrow}$. Protože $M = M^{\downarrow} \cup M^{\uparrow}$, plyne odtud tvrzení věty. $\square$

**konec 17. přednášky (2.12.2019)**

**Věta 17.13** (Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence řad funkcí)**.** *Nechť $M$ je množina a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $g_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť platí*

(a) *pro každé $x \in M$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ monotónní,*
(b) *$\{g_n\} \rightrightarrows 0$ na $M$,*
(c) *$\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\colon \left|\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right| \le K$.*

*Potom*
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows \quad \text{na } M.$$

*Důkaz.* Označme $M^{\downarrow}$ a $M^{\uparrow}$ stejné množinu jako v důkazu Věty 17.12. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu díky předpokladu (b) nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \ge 2$, takové, že
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0\ \forall x \in M\colon |g_n(x)| < \varepsilon.$$
Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \ge n$ a každé $x \in M$ označme
$$\sigma_k(x) = \sum_{j=n}^{k} f_j(x).$$
Potom dle předpokladu (c) platí pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \ge n$, a každé $x \in M$
$$|\sigma_k(x)| = \left|\sum_{j=1}^{k} f_j(x) - \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x)\right| \le \left|\sum_{j=1}^{k} f_j(x)\right| + \left|\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x)\right| \le 2K.$$
Zvolme $m \in \mathbb{N}$, $m \ge n$, a $x \in M^{\downarrow}$. Potom dle předpokladu (a) a (13) platí
$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x) g_j(x)\right| &\le \sum_{j=n}^{m-1} |\sigma_j(x)| \left(g_j(x) - g_{j+1}(x)\right) + |\sigma_m(x)||g_m(x)| \\
&\le 2K \sum_{j=n}^{m-1} \left(g_j(x) - g_{j+1}(x)\right) + 2K|g_m(x)| \\
&= 2K\left(g_n(x) - g_m(x)\right) + 2K|g_m(x)| \\
&\le 2K\left(|g_n(x)| + |g_m(x)| + |g_m(x)|\right) < 6K\varepsilon.
\end{aligned}$$
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $M^{\downarrow}$. Obdobně lze dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $M^{\uparrow}$. Protože $M = M^{\downarrow} \cup M^{\uparrow}$, plyne odtud tvrzení věty. □

**Příklad.** Dokažte, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$, kde $\alpha \in (0, \infty)$, jsou lokálně stejnoměrně konvergentní na $(0, \pi)$.

**Řešení.** Zvolme $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ a položme
$$f_n(x) = \sin(nx), \quad g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad x \in [\delta, \pi - \delta],\ n \in \mathbb{N}.$$
Ze součtových vzorců plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí
$$2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx) = \cos(k - \tfrac{1}{2})x - \cos(k + \tfrac{1}{2})x,$$
Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme
$$\begin{aligned}
2\sin(\tfrac{1}{2}x)\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\cos(k - \tfrac{1}{2})x - \cos(k + \tfrac{1}{2})x\right) \\
&= \cos(1 - \tfrac{1}{2})x - \cos(n + \tfrac{1}{2})x \\
&= \cos\tfrac{1}{2}x - \cos(n + \tfrac{1}{2})x.
\end{aligned}$$

Tedy pro každé $x \in [\delta, \pi - \delta]$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq \frac{\left|\cos(\frac{1}{2}x) - \cos(n+\frac{1}{2})x\right|}{\left|2\sin(\frac{1}{2}x)\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin(\frac{1}{2}x)\right|} \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Dále zřejmě platí

$$g_n \rightrightarrows 0 \quad \text{na } [\delta, \pi - \delta].$$

Z Dirichletova kritéria tedy plyne, že

**Věta 17.14** (záměna sumy a derivace)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$ *splňující*

(i) $f_n$ *má vlastní derivaci na omezeném intervalu* $(a, b)$*,* $n \in \mathbb{N}$*,*

(ii) *existuje* $x_0 \in (a, b)$ *takové, že je číselná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *konvergentní,*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ *na* $(a, b)$*.*

*Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ *na* $(a, b)$ *a pro každé* $x \in (a, b)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

*Důkaz.* Položme $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in (a, b)$. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ má $g_n$ vlastní derivaci na $(a, b)$, posloupnost $\{g_n(x_0)\}$ je konvergentní a posloupnost $\{g_n'\}$ je stejnoměrně konvergentní na $(a, b)$. Podle Věty 17.6 tedy existuje funkce $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ taková, že $g_n \rightrightarrows g$ a $g_n' \rightrightarrows g'$ na $(a, b)$. Odtud plyne tvrzení věty, neboť zřejmě platí $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. □

**Věta 17.15** (záměna sumy a Newtonova integrálu)**.** *Nechť* $(a, b)$ *je omezený neprázdný interval a nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *je řada funkcí splňující*

(i) $f_n \in \mathcal{N}(a, b)$*,*

(ii) *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně k funkci* $f$ *na* $(a, b)$*.*

*Potom* $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N) \int_a^b f_n = (N) \int_a^b f.$$

*Důkaz.* Použijeme Větu 17.7 na posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Odtud plyne tvrzení. □

**Věta 17.16** (o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *je mocninná řada, přičemž* $x_0 \in \mathbb{R}$*,* $a_n \in \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, s poloměrem konvergence* $\varrho \in (0, \infty]$*. Potom tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu* $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$*.*

*Důkaz.* Nechť $r \in (0, \varrho)$. Potom pro každé $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ platí $|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n| r^n$. Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$ je konvergentní, a tedy podle Weierstrassova kritéria je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Odtud a z Věty 17.1 vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ lokálně stejnoměrně konvergentní na $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$. □

**Poznámka.** Uvedeme alternativní důkaz Abelovy věty pomocí Abelova kritéria. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ je mocninná řada a nechť $\varrho$ je její poloměr konvergence, přičemž $\varrho \in (0, \infty)$. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ konverguje. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [x_0, x_0 + \varrho]$ položme $f_n(x) = a_n \varrho^n$ a $g_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{\varrho^n}$. Potom je řada $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0, x_0 + \varrho]$, $\{g_n\}$ je posloupnost stejně omezených funkcí (s konstantou omezenosti rovnou jedné) a pro každé $x \in [x_0, x_0 + \varrho]$ je posloupnost $\{g_n(x)\}$ nerostoucí. Podle Abelova kritéria je tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ stejnoměrně konvergentní na $[x_0, x_0 + \varrho]$. Podle Mooreovy–Osgoodovy věty pak platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0 + \varrho} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n &= \lim_{x \to x_0 + \varrho} \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n(x - x_0)^n \\
&= \lim_{k \to \infty} \lim_{x \to x_0 + \varrho} \sum_{n=0}^{k} a_n(x - x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.
\end{aligned}$$

Odtud vyplývá tvrzení Abelovy věty.

## 18. Diferenciální rovnice

### 18.1. **Základní pojmy.**

**Definice. Diferenciální rovnicí** rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0, \tag{1}$$

kde $F$ je reálná funkce $n+2$ proměnných.

**Definice. Řešením diferenciální rovnice** (1) rozumíme reálnou funkci $y$ definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu $I$, která má v každém bodě intervalu $I$ vlastní $n$-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (1) v každém bodě intervalu $I$, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) = 0.$$

Řekneme, že řešení $y$ rovnice (1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení $z$, pro které $D(y) \subsetneqq D(z)$ a které se na $D(y)$ shoduje s $y$.

**konec 18. přednášky (5.12.2019)**

**Věta 18.1** (lepení řešení)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina a $F\colon G \to \mathbb{R}$ je spojité. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ a $\delta, \eta > 0$. Uvažujme rovnici*

$$y'(x) = f(x, y(x)). \tag{2}$$

*Nechť $y_l$ je řešením (2) na $(a-\delta, a)$ a $y_r$ je řešením (2) na $(a, a+\eta)$. Nechť $[a, A] \in G$ a platí*

$$\lim_{x\to a_-} y_l(x) = \lim_{x\to a_+} y_r(x) = A.$$

*Pak funkce $y\colon (a-\delta, a+\eta)$ definovaná předpisem*

$$y(x) = \begin{cases} y_l(x), & x \in (a-\delta, a), \\ A, & x = a, \\ y_r(x), & x \in (a, a+\eta), \end{cases}$$

*je řešením (2) na $(a-\delta, a+\eta)$.*

*Důkaz.* Jestliže $x \in (a-\delta, a+\eta) \setminus \{a\}$, potom je rovnice (2) zřejmě splněna. Podle věty o limitě derivací dále platí

$$y'_-(a) = \lim_{x\to a_-} y'_l(x) = \lim_{x\to a_-} F(x, y_l(x)) = F(a, A)$$

a

$$y'_+(a) = \lim_{x\to a_+} y'_r(x) = \lim_{x\to a_+} F(x, y_r(x)) = F(a, A).$$

Tedy existuje vlastní $y'(a)$ a platí

$$y'(a) = F(a, A) = F(a, y(a)).$$

□

18.2. **Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.**

**Definice.** Diferenciální rovnicí 1. řádu se **separovanými proměnnými** rozumíme rovnici tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{3}$$

**Algoritmus pro řešení rovnice** (3) **pro spojité** $g, h$**.**

(a) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v $D(h)$.

(b) Najdeme všechny nulové body funkce $g$. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z (a) je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (3). Těmto řešením se říká **singulární** nebo také **stacionární**.

(c) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je $g$ nenulová.

(d) Vezmeme interval $I$ z (a) a interval $J$ z (c). Tedy $h$ je spojitá na $I$ a $g$ je spojitá a nenulová na $J$. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu $I$ a mají hodnoty v intervalu $J$. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť $H$ je primitivní funkce k $h$ na $I$ a $G$ je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ na $J$. Existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí $G(y(x)) = H(x) + c$ na definičním oboru řešení $y$, který nalezneme v následujícím kroku.

(e) Zvolíme $c \in \mathbb{R}$ a nalezneme všechny maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I\,;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

Připomeňme, že $G^{-1}\colon G(J) \to \mathbb{R}$ existuje, neboť $g$ je na intervalu $J$ spojitá a nenulová, tudíž nemění znaménko, a tedy $G$ je intervalu $J$ ryze monotónní.

(f) Z řešení nalezených v (e) a singulárních řešení z (b) „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (3) pomocí Věty 18.1.

**konec 19. přednášky (9.12.2019)**

**Příklad.** Najděte všechna maximální řešení rovnice $y' = 2x(1 + y^2)$.

**Řešení.** Položme $h(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$ a $g(y) = 1 + y^2$, $y \in \mathbb{R}$. Budeme postupovat podle algoritmu pro řešení (3).

(a) Existuje právě jeden maximální otevřený interval obsažený v $D(h)$, a to $I = \mathbb{R}$.

(b) Rovnice nemá žádné stacionární řešení.

(c) Existuje právě jeden maximální otevřený interval, na němž je funkce $g$ nenulová, a to $J = \mathbb{R}$.

(d) Je-li $y$ řešení na $I$ s hodnotami v $J$, potom platí

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} = 2x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Integrací obou stran rovnice vzhledem k proměnné $x$ zjistíme, že pro každé řešení $y$ existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\operatorname{arctg}(y(x)) = x^2 + c$$

pro $x$ z definičním oboru $y$, který musíme určit.

(e) Označme $G(y) = \operatorname{arctg}(y)$ pro $y \in \mathbb{R}$. Potom $G(J) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zvolme $c \in \mathbb{R}$ a označme

$$A_c = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 + c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\right\}.$$

Hledáme všechny maximální otevřené intervaly obsažené v $A_c$. Platí

$$A_c = \begin{cases} (-\sqrt{\frac{\pi}{2}-c}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2}-c}) \cup (\sqrt{-\frac{\pi}{2}-c}, \sqrt{\frac{\pi}{2}-c}) & \text{pro } c \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}), \\ (\sqrt{-\frac{\pi}{2}-c}, \sqrt{\frac{\pi}{2}-c}) & \text{pro } c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \emptyset & \text{pro } c \in [\frac{\pi}{2}, \infty). \end{cases}$$

Označme

$$I_c^1 = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}-c}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2}-c}\right),\ I_c^2 = \left(\sqrt{-\frac{\pi}{2}-c}, \sqrt{\frac{\pi}{2}-c}\right) \quad \text{pro } c \in (-\infty, -\frac{\pi}{2})$$

a

$$I_c = \left(\sqrt{-\frac{\pi}{2}-c}, \sqrt{\frac{\pi}{2}-c}\right) \quad \text{pro } c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Potom $y$ je maximální řešení právě tehdy, když buď $c \in (-\infty, -\frac{\pi}{2})$ a

$$y(x) = \operatorname{tg}(x^2+c) \quad \text{pro } x \in I_c^1, \text{ nebo pro } x \in I_c^2,$$

nebo $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a

$$y(x) = \operatorname{tg}(x^2+c) \quad \text{pro } x \in I_c.$$

(f) Všechna nalezená řešení jsou maximální, neboť limity v krajních bodech definičních oborů jsou nevlastní. Lepení řešení tedy nepřichází v úvahu.

**Věta 18.2** (řešení rovnice se separovanými proměnnými)**.** *Nechť $I, J$ jsou neprázdné otevřené intervaly, $h\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá a $g\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová. Nechť $x_0 \in I$ a $y_0 \in J$. Potom existuje řešení $y$ rovnice* (3) *splňující $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je lokálně jednoznačné v následujícím smyslu: pro každé řešení $z$ rovnice* (3) *splňující $z(x_0) = y_0$ existuje otevřený neprázdný interval $I_0 \subset I$ takový, že $x_0 \in I_0$ a $z = y$ na $I_0$.*

*Důkaz.* Položme

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,dt, \quad x \in I,$$

a

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}\,ds, \quad y \in J,$$

Potom z věty o derivaci funkce horní meze integrálu plyne, že $H' = h$ na $I$ a $G' = \frac{1}{g}$ na $J$. Navíc platí $H(x_0) = 0$ a $G(y_0) = 0$. Protože $y_0 \in J$, platí $0 = G(y_0) \in G(J)$, a tedy $H(x_0) \in G(J)$. Funkce $G$ je spojitá a ryze monotónní na $J$, neboť $g$ je na $J$ spojitá a nenulová, a tedy podle Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot funkce $\frac{1}{g}$ nemění znaménko na $J$. Odtud plyne, že $G(J)$ je otevřený interval obsahující 0 a existuje funkce $G^{-1}\colon G(J) \to J$. Ze spojitosti $H$ v $x_0$ plyne, že existuje neprázdný otevřený interval $I_1$ splňující $x_0 \in I_1$ a

$$I_1 \subset \{x \in I;\ H(x) \in G(J)\}.$$

Potom funkce

$$y(x) = G^{-1}(H(x))$$

je řešení (3) na $I_1$ splňující

$$y(x_0) = G^{-1}(H(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

Předpokládejme, že $z$ je nějaké řešení (3) splňující $z(x_0) = y_0$. Potom $z$ je definováno na nějakém intervalu $I_2 \subset I$ obsahujícím $x_0$. Položme $I_0 = I_1 \cap I_2$. Potom pro každé $x \in I_0$ platí

$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = h(x).$$

Integrací přes interval $(x_0, x)$ dostaneme $G(z(x)) = H(x)$, a tedy $z(x) = G^{-1}(H(x))$. To znamená, že $z = y$ na $I_0$. □

18.3. **Lineární diferenciální rovnice prvního řádu.**

**Definice.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $p, q\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité. Potom rovnici tvaru

$$y' = p(x)y + q(x) \tag{4}$$

nazýváme **lineární diferenciální rovnicí prvního řádu**. Jestliže $q(x) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$, pak rovnici (4) nazýváme **homogenní**.

**Příklad.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $p\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Určete všechna maximální řešení rovnice $y' = p(x)y$.

**Řešení.** Položme $h(x) = p(x)$, $x \in (a,b)$ a $g(y) = y$, $y \in \mathbb{R}$. Budeme postupovat podle algoritmu pro řešení (3).

(a) Existuje právě jeden maximální otevřený interval obsažený v $D(h)$, a to $I = (a,b)$.
(b) Existuje právě jedno stacionární řešení, a to $y(x) = 0$, $x \in (a,b)$.
(c) Existují právě dva maximální otevřené intervaly, na nichž je funkce $g$ nenulová, a to $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, \infty)$.
(d) Je-li $y$ řešení na $I$ s hodnotami v $J_1$, nebo v $J_2$, potom platí

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = p(x), \quad x \in (a,b).$$

Označme $P$ nějakou primitivní funkci k $p$ na $(a,b)$. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\log|y(x)| = P(x) + c$$

na definičním oboru $y$.
(e) Označme $G(y) = \log|y|$ pro $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom $G(J_1) = G(J_2) = \mathbb{R}$, a tedy jsou všechna řešení definovaná na $(a,b)$ a splňují

$$|y(x)| = e^{P(x)+c}, \quad x \in (a,b).$$

Všechna nalezená řešení včetně stacionárního lze zapsat ve tvaru

$$y(x) = ke^{P(x)}, \quad x \in (a,b),\ k \in \mathbb{R}.$$

(f) Lepení řešení nepřichází v úvahu.

**Věta 18.3** (řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $p, q\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou spojité. Nechť $x_0 \in (a,b)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. Potom existuje právě jedno maximální řešení $y$ rovnice (4) splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je dáno vztahem*

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{-P(t)}\,dt\right)e^{P(x)} + y_0e^{P(x)} \quad \textit{pro } x \in (a,b), \tag{5}$$

*kde $P$ je primitivní funkce k $p$ na $(a,b)$ splňující $P(x_0) = 0$.*

*Důkaz.* Nejprve dokážeme, že funkce $y$ daná vztahem (5) je řešení rovnice (4). Derivováním dostaneme

$$y'(x) = q(x)e^{-P(x)}e^{P(x)} - p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right) + p(x)y_0e^{P(x)} \quad \text{pro } x \in (a,b).$$

Dále platí

$$p(x)y(x) = p(x)e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right) + p(x)y_0e^{P(x)} \quad \text{pro } x \in (a,b),$$

a tedy

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x) \quad \text{pro } x \in (a,b).$$

Navíc zřejmě platí $y(x_0) = y_0$.

Předpokládejme, že $z$ je řešení (4) na $(a,b)$ splňující $z(x_0) = y_0$. Položme $u = y - z$. Potom $u$ je řešením rovnice $u' = pu$. Podle předcházejícího příkladu existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $u(x) = ce^{P(x)}$ na $(a,b)$. Protože $u(x_0) = 0$, platí $c = 0$. Tedy $u(x) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$. Odtud plyne, že $y = z$ na $(a,b)$. Řešení $y$ definované předpisem (5) je tedy jednoznačně určeno. $\square$

**konec 20. přednášky (12.12.2019)**

18.4. **Lineární diferenciální rovnice $n$-tého řádu s konstantními koeficienty.**

**Definice. Lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty** rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f, \tag{6}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. **Homogenní rovnicí** příslušející k rovnici (6) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0. \tag{7}$$

**Věta 18.4** (existence a jednoznačnost řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $x_0 \in (a,b)$ a $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení $y$ rovnice* (6) *splňující*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

*Toto řešení je definováno na celém intervalu $(a,b)$.*

**Věta 18.5** (množina řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty)**.** (a) *Maximální řešení rovnice* (7) *jsou definována na celém $\mathbb{R}$. Množina všech těchto řešení tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ dimenze $n$.*

(b) *Nechť $y_p$ je nějaké maximální řešení rovnice* (6)*. Potom funkce $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je maximální řešení* (6) *právě tehdy, když funkce $y_h$ definovaná předpisem $y_h = y - y_p$ je řešení rovnice* (7)*.*

*Důkaz.* (a) Podle Věty 18.4 jsou maximální řešení definovaná na $\mathbb{R}$. Označme

$$H = \{y \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R});\ y \text{ je řešení } (6)\}.$$

Defimujme zobrazení $L$ na $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ předpisem

$$L\colon y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y.$$

Potom $L$ je lineární operátor z $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ do $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ a platí $\operatorname{Ker} L = H$. Odtud plyne, že $H$ je lineární prostor. Nyní určíme jeho dimenzi.

Podle Věty 18.4 existují řešení $\{y_1, \dots, y_n\}$ rovnice (7) definovaná na $\mathbb{R}$ a splňující

$$\begin{array}{cccc} y_1(0) = 1 & y_2(0) = 0 & \dots & y_n(0) = 0 \\ y_1'(0) = 0 & y_2'(0) = 1 & \dots & y_n'(0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) = 0 & y_2^{(n-1)}(0) = 0 & \dots & y_n^{(n-1)}(0) = 1. \end{array}$$

Předpokládejme, že pro $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ platí

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = 0.$$

Položme $z = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$. Potom

$$z(0) = c_1,\ z'(0) = c_2, \dots,\ z^{(n-1)}(0) = c_n.$$

Zároveň ale platí

$$z(0) = 0,\ z'(0) = 0,\ \dots,\ z^{(n-1)}(0) = 0,$$

neboť $z$ je nulová funkce. Tedy $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Odtud plyne, že $\{y_1, \dots, y_n\}$ jsou lineárně nezávislé prvky prostoru $H$. Tedy $\dim H \geq n$.

Předpokládejme, že $y$ je maximální řešení (7). Položme

$$c_1 = y(0), \quad c_2 = y'(0), \quad \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n.$$

Potom $z$ je řešení (7) definované na $\mathbb{R}$ a platí

$$z(0) = c_1, \quad z'(0) = c_2, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n. \tag{8}$$

Z Věty 18.4 plyne, že maximální řešení (7) splňující podmínky (8) je určeno jednoznačně. Protože $y$ i $z$ tyto podmínky splňují, platí $y = z$.

(b) $\Rightarrow$ Z linearity $L$ plyne, že

$$L(y_h) = L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = f - f = 0,$$

a tedy $y_h \in \operatorname{Ker} L = H$.

$\Leftarrow$ Jest

$$L(y) = L(y_p + y_h) = L(y_p) + L(y_h) = f + 0 = f,$$

a tedy $y$ je řešení (6). □

**Definice.** **Fundamentálním systémem** rovnice (7) rozumíme (jakoukoli) bázi prostoru všech maximálních řešení rovnice (7).

**Příklad.** Určete všechna maximální řešení rovnice

$$y'' + y = x^3 + 6x. \tag{9}$$

**Řešení.** Funkce $\cos x$ a $\sin x$ jsou řešení homogenní rovnice

$$y'' + y = 0 \tag{10}$$

definovaná na $\mathbb{R}$ a jsou lineárně nezávislá. Tedy $\{\cos x, \sin x\}$ je fundamentální systém rovnice (10). Funkce $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, je partikulární řešení rovnice (9). Tedy podle Věty 18.5(b) jsou všechna maximální řešení rovnice (9) tvaru

$$y(x) = x^3 + \alpha \cos x + \beta \sin x, \quad x \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Definice.** Nechť $X$ je normovaný lineární prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $X$ a $x \in X$. Řekneme, že $x$ je **součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ v prostoru** $X$, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x \right\|_X = 0.$$

V takovém případě říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **je konvergentní** v prostoru $X$.

**Věta 18.6** (Rieszova–Fischerova). *Nechť $X$ je normovaný lineární prostor. Potom $X$ je Banachův právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků $X$ splňující $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$ je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergentní v $X$.*

*Důkaz.* $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je posloupnost prvků $X$ splňující $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_n\|_X < \varepsilon$. Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_0$, platí

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} x_k \right\|_X \leq \sum_{k=n}^{m} \|x_k\|_X \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_k\|_X < \varepsilon,$$

a tedy je posloupnost $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}$ cauchyovská v $X$. Protože $X$ je úplný, je tato posloupnost konvergentní v $X$. Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje v $X$.

$\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost prvků $X$. Nalezneme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ splňující $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_X < k^{-2}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|_X < \infty$, a tedy je podle předpokladu řada $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_k} - x_{n_{k+1}})$ konvergentní v $X$. Tudíž existuje $x \in X$ takové, že $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} (x_{n_j} - x_{n_{j+1}}) = x$ v $X$. Odtud plyne, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_{n_1} - x$, takže posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentní. To znamená, že $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost, která má konvergentní podposloupnost. Taková posloupnost je nutně již sama konvergentní. □

**konec 21. přednášky (16.12.2019)**

**Definice.** **Imaginární jednotkou** nazýváme prvek $i$ splňující $i^2 = -1$. **Komplexním číslem** nazýváme každý výraz tvaru $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Čísla $x, y$ pak nazýváme po řadě **reálnou částí** a **komplexní částí** čísla $z$ a píšeme $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$. Množinu všech komplexních čísel značíme symbolem $\mathbb{C}$.

**Poznámka.** Každé komplexní číslo $z = x + iy$ můžeme ztotožnit s prvkem $[x, y] \in \mathbb{R}^2$. Zobrazení $z \mapsto [x, y]$, kde $x = \operatorname{Re} z$ a $y = \operatorname{Im} z$, je bijekce $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}^2$. Komplexní čísla graficky znázorňujeme jako prvky roviny. Každému reálnému číslu $x$ odpovídá komplexní číslo $[x, 0]$. V tomto smyslu platí $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Číslu $i$ odpovídá dvojice $[0, 1]$.

**Definice.** Nechť $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, přičemž $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$. Na množině $\mathbb{C}$ jsou zavedeny následující relace a operace:

(a) **rovnost**: $z_1 = z_2$ právě tehdy, když $x_1 = x_2$ a zároveň $y_1 = y_2$
(b) **sčítání**: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
(c) **násobení**: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
(d) **absolutní hodnota**: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
(e) **komplexně sdružené číslo**: $\overline{z} = x - iy$
(f) **dělení**: jestliže $z_2 \neq 0$, pak $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, kde pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ máme
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$
(g) **argument**: jestliže $z = x + iy$ a $z \neq 0$, potom
$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{pro } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{pro } x < 0,\ y \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{pro } x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pro } x = 0,\ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{pro } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

**Poznámky.** (a) Početní operace na $\mathbb{C}$ mají stejné vlastnosti jako na $\mathbb{R}$. Speciálně pro každé $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $|z^n| = |z|^n$.
(b) Množina $\mathbb{C}$ je těleso skalárů a vektorový prostoru dimenze 2 (nad $\mathbb{R}$), nebo dimenze 1 (nad $\mathbb{C}$).
(c) Množina $\mathbb{C}$ je metrický prostor vzhledem k metrice $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ a normovaný lineární prostor vzhledem k normě $\|z\| = |z|$. Konvergence v $\mathbb{C}$ je ekvivalentní konvergenci po složkách, tedy $z_n \to z$ v $\mathbb{C}$ právě tehdy, když $x_n \to x$ v $\mathbb{R}$ a $y_n \to y$ v $\mathbb{R}$, kde $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$, a $z = x + iy$. Posloupnost $\{z_n\}$ je cauchyovská v $\mathbb{C}$ právě tehdy, když jsou obě posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ cauchyovské v $\mathbb{R}$. Odtud plyne, že $\mathbb{C}$ je Banachův prostor.

**Definice.** Definujeme následující komplexní funkce komplexní proměnné:

(a) **polynomy**
$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i,\ a_i \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$
(b) **exponenciální funkce**
$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$
(c) **goniometrické funkce**
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Místo $\exp(z)$ budeme často psát $e^z$.

**Poznámky.** (a) Všechny řady v předcházející definici jsou konvergentní pro každé $z \in \mathbb{C}$. Zvolme $z \in \mathbb{C}$. Potom platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{z^n}{n!} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} < \infty.$$

Prostor $\mathbb{C}$ je úplný, a tedy z Rieszovy–Fischerovy věty plyne, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje v $\mathbb{C}$. Tvrzení lze dokázat obdobně pro zbývající dvě řady.

(b) Komplexní funkce komlexní proměnné mají některé odlišné vlastností oproti reálným funkcím reálné proměnné, například
- funkce exp není prostá na $\mathbb{C}$,
- funkce sin a cos nejsou omezené na $\mathbb{C}$.

**Věta 18.7** (Eulerova formule)**.** *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

*Důkaz.* Zvolme $x \in \mathbb{R}$. Platí

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \equiv 0 \pmod 4, \\ i & \text{pro } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & \text{pro } n \equiv 2 \pmod 4, \\ -i & \text{pro } n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Tedy

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$

Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

neboť obě řady na pravé straně jsou konvergentní. Odtud plyne tvrzení. □

**Důsledek.** (a) *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $|e^{ix}| = 1$ (takové komplexní číslo se nazývá* ***komplexní jednotka****).*

(b) *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí* $\mathrm{Re}(e^{ix}) = \cos x$, $\mathrm{Im}(e^{ix}) = \sin x$.

(c) *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

(d) *Platí*

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

**Poznámka.** Každé číslo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ můžeme vyjádřit v **goniometrickém tvaru**

$$z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$$

a v **exponenciálním tvaru**

$$z = |z| e^{i \arg(z)}.$$

**Definice. Charakteristickým polynomem** rovnice (7) rozumíme polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Věta 18.8** (fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty)**.** *Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu $P$ s násobnostmi*

$r_1, \dots, r_s$. *Nechť* $\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_l + i\beta_l$ *jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu* $P$ *s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \dots, q_l$. *Pak funkce*

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1}(x), & \dots & x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\
\vdots & & & \\
e^{\lambda_s x}, & xe^{\lambda_s}(x), & \dots & x^{r_s-1}e^{\lambda_s x}, \\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \\
\vdots & & & \\
e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, & \dots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, \\
e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & xe^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, & \dots & x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x
\end{array}$$

*tvoří fundamentální systém* (7).

**konec 22. přednášky (19.12.2019)**

**Věta 18.9** (partikulární řešení rovnice se speciální pravou stranou)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $P, Q$ *jsou polynomy a*

$$f(x) = e^{\mu x}\left(P(x)\cos\nu x + Q(x)\sin\nu x\right) \quad \textit{pro } x \in (a, b).$$

*Nechť* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *je násobnost čísla* $\mu + i\nu$ *jakožto kořenu charakteristického polynomu* (7). *Potom existuje řešení* (6) *ve tvaru*

$$y(x) = x^m e^{\mu x}\left(R(x)\cos\nu x + S(x)\sin\nu x\right),$$

*kde* $R, S$ *jsou polynomy, jejichž stupeň není větší než* $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$.

**Poznámka.** Z Věty 18.5 vyplývá, že k úplnému popisu množiny všech řešení rovnice (6) stačí určit fundamentální systém příslušné homogenní rovnice (7) a nalézt libovolné jedno partikulární řešení (nehomogenní) rovnice (6). První krok (nalezení fundamentálního systému) byl proveden ve Větě 18.8. Druhý krok (nalezení partikulárního řešení) byl proveden zatím pouze v případě, kdy pravá strana (tedy funkce $f$) má speciální tvar (Věta 18.9). V obecném případě tento krok provedeme pomocí metody variace konstant. K tomu se bude hodit následující tvrzení.

**Věta 18.10** (regularita fundamentálního systému)**.** *Nechť* $\{y_1, \dots, y_n\}$ *je fundamentální systém* (7). *Potom je matice*

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

*regulární pro každé* $x \in \mathbb{R}$.

*Důkaz.* Nechť $x \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že pro nějaké $v \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathbb{A}(x)v = o$. Položme

$$z = v_1 y_1 + \dots + v_n y_n.$$

Potom $z$ je řešení (7) a platí

$$\begin{aligned}
z(x) &= v_1 y_1(x) + \dots + v_n y_n(x) = 0, \\
z'(x) &= v_1 y_1'(x) + \dots + v_n y_n'(x) = 0, \\
&\vdots \\
z^{(n-1)}(x) &= v_1 y_1^{(n-1)}(x) + \dots + v_n y_n^{(n-1)}(x) = 0.
\end{aligned}$$

Podle Věty 18.4 platí $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Funkce $y_1, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém, a proto je $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$. Odtud vyplývá, že $\mathbb{A}(x)$ je regulární. Protože $x$ bylo zvoleno libovolně, plyne odtud tvrzení. $\square$

**Algoritmus pro hledání řešení rovnice (6) metodou variace konstant pro rovnice vyššího řádu.**

Řešení rovnice (6) budeme hledat ve tvaru
$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n,$$
kde $c_1, \dots, c_n$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na $(a, b)$ a $\{y_1, \dots, y_n\}$ je fundamentální systém (7). Potom platí
$$y' = c_1 y_1' + \dots + c_n y_n' + c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n.$$
Položme $c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n = 0$. Derivováním dostaneme
$$y'' = c_1 y_1'' + \dots + c_n y_n'' + c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n'.$$
Položme $c_1' y_1' + \dots + c_n' y_n' = 0$. Pokračujme až k rovnici
$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} + c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)}.$$
Dosaďme $y$ do (6). Dostaneme soustavu podmínek
$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \dots + c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \dots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f, \end{aligned}$$
neboli
$$\mathbb{A} c' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \quad \text{na } (a, b). \tag{11}$$
Zvolme $x \in (a, b)$. Potom je (11) soustava lineárních algebraických rovnic pro neznámé $c_1'(x), \dots, c_n'(x)$. Matice této soustavy je podle Věty 18.10 regulární, takže existuje právě jedno řešení. Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$. Z Cramerova pravidla dostaneme
$$c_i'(x) = \frac{\det \mathbb{A}_i(x)}{\det \mathbb{A}(x)},$$
kde
$$\mathbb{A}_i = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_{i-1}^{(n-2)} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_{i-1}^{(n-1)} & f & y_{i+1}^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$
Funkce $x \mapsto \frac{\det \mathbb{A}_i(x)}{\det \mathbb{A}(x)}$ je spojitá na $(a, b)$, a tedy má primitivní funkci. Odtud plyne existence hledaných funkcí $c_1, \dots, c_n$. Tyto funkce spočítáme integrací a dosadíme do definice $y$.

18.5. **Soustavy diferenciálních rovnic.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina a $f_i \colon G \to \mathbb{R}$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic
$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{12}$$
Soustavu můžeme zapsat ve vektorovém tvaru:
$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

kde $y = [y_1, \dots, y_n]$, $y' = [y_1', \dots, y_n']$ a $f = [f_1, \dots, f_n]$.

**Definice.** **Řešením** soustavy (12) rozumíme vektorovou funkci $y = [y_1, \dots, y_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ takovou, že pro každé $x \in J$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje vlastní derivace $y_i'(x)$ a platí (12).

**Počáteční úlohou** pro (12) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení (12) splňující navíc předem zadanou podmínku $y(x_0) = y^0$, kde $[x_0, y^0] \in G$ (této podmínce se říká **počáteční podmínka**).

**Maximálním řešením** soustavy (12) rozumíme takové řešení $y$ definované na intervalu $J$, které již nelze prodloužit, tj. je-li $z$ řešení definované na intervalu $I$, $J \subset I$ a $z(x) = y(x)$ pro každé $x \in J$, pak $J = I$.

**Poznámka.** Mějme rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{13}$$

Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{14}$$

Pokud $y$ řeší (14), pak $y_1$ řeší (13). Obráceně, pokud $z$ řeší (13), pak $[z, \dots, z^{(n-1)}]$ řeší (14).

**Věta 18.11** (Peanova)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f \colon G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na $G$. Pak pro každé $[x_0, y^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice (12) splňující $y(x_0) = y^0$.*

**Věta 18.12** (Picardova)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $f \colon [x, y] \to f(x, y) \in \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení na $G$ a je „lokálně lipschitzovské v $y$“, tj. pro každý bod $[x, y] \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a $K > 0$ takové, že pro každé dva body $[s, y^1], [s, y^2] \in B([x, y], \varepsilon)$ máme*

$$\left\| f(s, y^1) - f(s, y^2) \right\| \leq K \left\| y^1 - y^2 \right\|.$$

*Jestliže $[x_0, y^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení $y$ rovnice (12) splňující $y(x_0) = y^0$.*

**konec 23. přednášky (6.1.2020)**

**Poznámka.** Jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$, potom z věty o přírůstku vektorové funkce plyne, že $f$ splňuje podmínky Věty 18.12.

18.6. **Soustavy lineárních diferenciálních rovnic.** Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n + b_1, \\ y_2' &= a_{21} y_1 + \dots + a_{2n} y_n + b_2, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n + b_n, \end{aligned} \tag{15}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha < \beta$, $a_{ij} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $b_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce. Soustavu zapisujeme ve vektorovém tvaru:

$$y' = \mathbb{A} y + b,$$

kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

**Homogenní soustavou** k (15) rozumíme soustavu

$$y' = \mathbb{A}y. \tag{16}$$

**Věta 18.13** (řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic)**.** *Nechť* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$*,* $\alpha < \beta$*,* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $y^0 \in \mathbb{R}^n$*. Nechť* $\mathbb{A} : (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$*,* $b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Potom*

(a) *existuje právě jedno maximální řešení* $y$ *soustavy* (15) *splňující* $y(x_0) = y^0$*, a toto řešení je definováno na celém intervalu* $(\alpha, \beta)$*;*

(b) *množina všech maximálních řešení soustavy* (15) *tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbb{R}^n)$ *dimenze* $n$*;*

(c) *každé řešení* $y$ *soustavy* (15) *na intervalu* $(\alpha, \beta)$ *má tvar* $y = y_p + y_h$*, kde* $y_p$ *je nějaké řešení* (15) *a* $y_h$ *je nějaké řešení* (16)*;*

(d) *jestliže* $\{y^1, \dots, y^n\}$ *je fundamentální systém řešení soustavy* (16)*, potom* ***fundamentální matice*** *soustavy* (16) *definovaná předpisem*

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & \dots & y_2^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

*je regulární pro každé* $x \in (\alpha, \beta)$*;*

(e) (*variace konstant*) *maximální řešení* $y$ *rovnice* (15) *s počáteční podmínkou* $y(x_0) = y^0$ *má tvar*

$$y(x) = \Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)y^0 + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t)b(t)\,dt, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

18.7. **Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.**

**Věta 18.14** (řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *a vektorová funkce* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *je řešením soustavy* $y' = \mathbb{A}y$*. Pak* $y$ *je třídy* $\mathcal{C}^\infty$ *a pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí* $y^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k y(x)$ *pro* $x \in \mathbb{R}$*.*

**Definice.** Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné $\lambda$, nazýváme **$\lambda$-maticí**. **Řádkovými úpravami** $\lambda$-matice rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné $\lambda$.

**Lemma** (úprava sloupce)**.** *Nechť* $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ *je* $\lambda$*-matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na* $\lambda$*-matici* $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$*, kde nejvýše jeden z polynomů* $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ *je nenulový.*

**Věta 18.15** (úprava matice $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$*. Pak lze* $\lambda$*-matici* $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* $\lambda$*-matici. Výsledná* $\lambda$*-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je* $n$*.*

**Značení.**

- Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce mající vlastní derivaci $n$-tého řádu na $\mathbb{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y.$$

- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je $\lambda$-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$\begin{aligned}
P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
P_{21}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{2n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
&\vdots\\
P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0.
\end{aligned}$$

**Poznámka.** Nechť $P, Q$ jsou polynomy a $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Potom platí

- $(P+Q)(\frac{d}{dx})y = P(\frac{d}{dx})y + Q(\frac{d}{dx})y$,
- $(PQ)(\frac{d}{dx})y = P(\frac{d}{dx})(Q(\frac{d}{dx})y)$.

**Věta 18.16** (řešení soustavy vzniklé pomocí konečné posloupnosti řádkových úprav)**.** *Nechť $\lambda$-matice $\widetilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav $\lambda$-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$ právě tehdy, když je řešením soustavy odpovídající $\widetilde{\mathbb{P}}$.*

**Příklad.** Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned}
y_1' &= 4y_1 + 5y_2\\
y_2' &= -2y_1 - 2y_2.
\end{aligned}$$

*Řešení.* Řádkovými úpravami převedeme $\lambda$-matici $\mathbb{I} - \mathbb{A}$ na horní trojúhelníkovou, tedy

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

Upravené matici odpovídá soustava

$$\begin{aligned}
y_1 + \frac{1}{2}y_2' + y_2 &= 0,\\
y_2'' - 2y_2' + 2y_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Z druhé rovnice vypočteme

$$y_2 = \alpha_1 e^x \sin x + \alpha_2 e^x \cos x \quad \text{pro } x \in (\alpha, \beta).$$

Derivováním a dosazením do první rovnice dostaneme

$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^x \sin x + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^x \cos x \quad \text{pro } x \in (\alpha, \beta).$$

□

**konec 24. přednášky (9.1.2020)**