MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, NMMA201, ZIMNÍ SEMESTR 2019–2020 POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o třetí část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy pro bakalářské obory. Věnuje se pokročilejším partiím diferenciálního a integrálního počtu a metrických prostorů a jejich aplikací k řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Kurs se skládá z přednášek a cvičení a je hodnocen zápočtem a zkouškou.

Přednáška se koná pro větší množství (desítky až stovky) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou, typicky pro jeden kroužek. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři budou probírány hlavně početní příklady písemkové obtížnosti a teoretické úlohy, které se přímo týkají látky kurzu Matematická analýza 3. Zápočet se uděluje za účast (a aktivitu). Postačující (a většinou i nutnou) podmínkou je účast na 9 proseminářích.

Zápočet

Postačující podmínkou pro udělení zápočtu je 50% účast na cvičeních a dvě splněné zápočtové písemky.

Během zimního semestru budou uspořádány celkem tři zápočtové písemky, z toho dvě v průběhu cvičení a jedna opravná. Každá zápočtová písemka bude obsahovat tři příklady z oblastí matematické analýzy odpovídajících náplni prvního semestru. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 30 minut. Povoleny jsou pouze psací potřeby. Písemka je hodnocena jako *splněná*, pokud student správně vyřeší alespoň dva ze tří příkladů. V případě nesplnění zápočtových písemek je možné získat zápočet za domácí vypracování sedmi nebo patnácti příkladů (podle toho, zda studentovi chybí jedna nebo dvě splněné písemky). Tato možnost je chápána jako zcela výjimečné opravné opatření a týká se pouze studentů, kteří vyčerpají všechny tři možnosti napsání písemky. Je nutná individuální domluva s cvičícím.

Zkouška

Písemná část. Pro písemnou část zkoušky bude vypsáno právě pět termínů, a to

- ve středu 15.01. 2020 v 8:00 v posluchárně K1,
- ve středu 22.01. 2020 v 8:00 v posluchárně K1,
- ve středu 05.02. 2020 v 8:00 v posluchárně K1,
- ve středu 12.02. 2020 v 8:00 v posluchárně K1,
- v pondělí 29.06. 2020 v 8:00 v posluchárně K1,

Date: 26. června 2020.

Mimo vypsané termíny nebude možné vykonat písemnou část zkoušky.

V posluchárně K1 bude v době konání písemné části zkoušky vyvěšen zasedací pořádek. Prosíme studenty, aby se dostavili včas a zaujali svá místa podle zasedacího pořádku. Před začátkem písemné části zkoušky bude provedena kontrola totožnosti studentů. Každý student se musí prokázat nějakým platným dokladem s fotografií (index, OP, ŘP, pas a podobně).

Písemná část zkoušky bude obsahovat čtyři příklady z následujících partií matematické analýzy:

- diferenciální počet implicitních funkcí více proměnných (10 bodů),
- extrémy funkcí více proměnných (10 bodů),
- stejnoměrná konvergence posloupnosti nebo řady funkcí (15 bodů),
- obyčejné diferenciální rovnice (15 bodů).

Jestliže student získá z písemné části zkoušky 28 nebo více bodů, postoupí k ústní části zkoušky. Jestliže získá 27 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Čas k vypracování písemné části je 150 minut. Povoleny budou pouze běžné psací potřeby.

Bezprostředně po skončení písemné části bude na tabuli v posluchárně K1 předvedeno vzorové řešení. Účast na předvedení vzorového řešení je povolena i studentům, kteří ten den písemnou zkoušku neskládali.

Odevzdané písemky budou opraveny v den konání písemné části zkoušky. Studentům, kteří úspěšně složí písemnou část zkoušky, bude elektronickou poštou zaslán čas ústní části zkoušky (bude použita oficiální elektronická adresa, která je uvedena v systému SIS). Tento čas bude pro všechny studenty závazný. Studentům, jejichž písemná část zkoušky bude hodnocena známkou neprospěl(a), bude do systému SIS zapsána známka 4. Tito studenti budou mít možnost se s hodnocením své písemné práce seznámit, pokud o to projeví zájem.

Ústní část. Ústní část zkoušky se bude konat následující pracovní den po písemné části zkoušky od 08:00 v posluchárně K2 (týká se prvních čtyř termínů). Ústní část zkoušky posledního (pátého) termínu se koná ve středu 1.7. 2020 od 8:00 v posluchárně K8.

Ústní část zkoušky bude obsahovat osm otázek uspořádaných a přibližně hodnocených podle následujícího klíče:

- definice vybraného klíčového pojmu z prvního ročníku (0 bodů),
- definice klíčového pojmu (0 bodů),
- formulace dvou vět a jedné definice (5+5+5 body),
- formulace a důkaz tří vět (celkem 35 bodů).

K úspěšnému složení ústní části je třeba napsat správně definici klíčového pojmu a získat minimálně 30 bodů. Uvedené body jsou ovšem pouze orientační a slouží jako pomůcka pro zkoušejícího, nelze na jejich základě vznášet žádné námitky proti výsledku zkoušky.

Po celou dobu ústní zkoušky platí, že student musí bezpečně ovládat veškeré klíčové pojmy, nejen ten, který si vylosuje. Prokáže-li se kdykoli během zkoušky, že student bezpečně neovládá kterýkoli z klíčových pojmů, bude zkouška hodnocena známkou neprospěl(a).

Bude-li zkouška po ústní části hodnocena známkou neprospěl(a), je student povinen znovu složit obě části zkoušky (tedy i písemnou).

Celkové hodnocení zkoušky

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy všech vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech. Orientačně známka "výborně" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 88–100.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a věty, znal důkazy lehčích vět a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích. Orientačně známka "velmi dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 70–87.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student ovládal všechny klíčové pojmy, dále aby s porozuměním ovládal definice a jednoduché věty a znal důkazy lehčích vět. Orientačně známka "dobře" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 58–69.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student nezná některý z klíčových pojmů, neovládá věty nebo definice nebo není schopen dokázat ani nejjednodušší tvrzení. Orientačně hodnocení "neprospěl(a)" odpovídá přibližně bodovému rozmezí 0–57.

Seznamy požadovaných vět, definic a klíčových pojmů

Seznamy požadovaných vět, definic a klíčových pojmů se mohou v průběhu semestru mírně měnit v závislosti na postupu přednášky. Jejich definitivní podoba bude včas oznámena na přednášce.

Seznam klíčových pojmů.

- kompaktní metrický prostor
- stejnoměrně spojité zobrazení
- cauchyovská posloupnost
- úplný metrický prostor
- funkce třídy $\mathcal{C}^k$
- derivace funkce více proměnných vyššího řádu
- diferenciál k-tého řádu
- Taylorův polynom funkce více proměnných vyššího řádu
- difeomorfismus
- bodová, stejnoměrná a lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti a řady funkcí
- cauchyovská a stejnoměrně cauchyovská posloupnost a řada funkcí
- diferenciální rovnice, řešení, maximální řešení
- charakteristický polynom
- fundamentální systém

Seznam požadovaných definic.

- Hessova matice
- k-lineární zobrazení a jeho norma
- regulární zobrazení
- tečná nadrovina
- funkce první Baireovy třídy
- pozitivní lineární operátor
- Bernsteinův polynom
- diferenciální rovnice se separovanými proměnnými
- lineární diferenciální rovnice, homogenní rovnice

Seznam požadovaných vět.

Metrické prostory II.

- konečnost a kompaktnost (Věta 15.1)
- kompaktnost intervalu (Věta 15.2)
- nutná podmínka kompaktnosti (Věta 15.3)
- kompaktnost v diskrétním prostoru (Věta 15.4)
- kompaktnost a uzavřenost (Věta 15.5)
- kompaktnost a omezenost (Věta 15.6)
- uzavřená podmnožina kompaktu (Věta 15.7)
- kompaktnost v $\mathbb{R}^n$ (Věta 15.8)
- spojitý obraz kompaktu (Věta 15.9)
- extrémy spojité funkce na kompaktu (Věta 15.10)
- spojitost a stejnoměrná spojitost na kompaktu (Věta 15.11)
- charakterisace kompaktních prostorů (Věta 15.12)

- kompaktnost a úplnost (Věta 15.13)
- úplnost a uzavřenost (Věta 15.14)
- Cantorova věta (Věta 15.15)

Funkce více proměnných II.

- skládání zobrazení třídy $\mathcal{C}^k$ (Věta 16.1) (bez důkazu)
- záměnnost parciálních derivací (Věta 16.2) (bez důkazu)
- derivace vyššího řádu a totální diferenciál (Věta 16.3) (bez důkazu)
- symetrie derivace (Věta 16.4) (bez důkazu)
- postačující podmínka pro existenci derivace vyššího řádu (Věta 16.5) (bez důkazu)
- Lagrangeův tvar zbytku (Věta 16.6)
- Peanův tvar zbytku (Věta 16.7)
- o implicitně zadané funkci (Věta 16.8) (bez důkazu)
- o implicitně zadaných funkcích (Věta 16.9) (bez důkazu)
- nutná podmínka existence lokálního extrému (Věta 16.10)
- elipticita positivně definitní kvadratické formy (Věta 16.11)
- podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému (Věta 16.12)
- Lagrangeova věta o multiplikátorech (Věta 16.13) (bez důkazu)
- o lokálním difeomorfismu (Věta 16.14)
- vztah difeomorfismu a regulárního zobrazení (Věta 16.15)

Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí.

- charakterisace stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí (Věta 17.1)
- Mooreova–Osgoodova (Věta 17.2)
- vztah stejnoměrné konvergence a spojitosti (Věta 17.3)
- charakterisace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu (Věta 17.4)
- Bolzanova–Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci (Věta 17.5)
- stejnoměrná konvergence derivací (Věta 17.6)
- záměna limity a Newtonova integrálu (Věta 17.7)
- Diniova věta (Věta 17.8)
- Korovkinova věta o třech funkcích (Věta 17.9) (bez důkazu)
- Weierstrassova věta (Věta 17.10)
- Weierstrassovo kritérium (Věta 17.11)
- Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence řad funkcí (Věta 17.12)
- Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence řad funkcí (Věta 17.13)
- záměna sumy a derivace (Věta 17.14) (bez důkazu)
- záměna sumy a Newtonova integrálu (Věta 17.15) (bez důkazu)
- o lokálně stejnoměrné konvergenci mocninné řady (Věta 17.16)

Obyčejné diferenciální rovnice.

- lepení řešení (Věta 18.1)
- řešení rovnice se separovanými proměnnými (Věta 18.2)
- řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu (Věta 18.3) (bez důkazu)
- existence a jednoznačnost řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (Věta 18.4) (bez důkazu)
- množina řešení lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (Věta 18.5)
- Rieszova–Fischerova věta (Věta 18.6)
- Eulerova formule (Věta 18.7)
- partikulární řešení rovnice se speciální pravou stranou (Věta 18.9) (bez důkazu)
- regularita fundamentálního systému (Věta 18.10)
- Peanova věta (Věta 18.11) (bez důkazu)
- Picardova věta (Věta 18.12) (bez důkazu)

Vzorové zadání písemné části zkoušky

Příklad 1. Ukažte, že vztahy

$$u = \sin x + xy + e^z,$$
$$v = \cos y + xe^{-y},$$
$$w = x^2 + 2y - \cos(xz)$$

definují na okolí bodu $[u, v, w] = [1 + \sin 1, 2, 0]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(1 + \sin 1, 2, 0) = 1$, $y(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$, $z(1 + \sin 1, 2, 0) = 0$. Rozhodněte, zda má funkce $x(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[1 + \sin 1, 2, 0]$, a pokud ano, spočtěte jej. **(10 bodů)**

Příklad 2. Nalezněte globální extrémy funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definované předpisem

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ yz = 2\}.$$ **(10 bodů)**

Příklad 3. Nechť f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(x^n).$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkcí f a f' v jejich definičním oboru. **(15 bodů)**

Příklad 4. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1 + y^4}{y \cos^2 x},$$

splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$, a jejich definiční obory. **(15 bodů)**

Vzor zadání zkušebních otázek pro ústní část zkoušky

Otázka 1. Napište definici klíčového pojmu: *úplný metrický prostor*.

Otázka 2. Napište definici pojmu: *Hessova matice*.

Otázka 3. Napište znění věty: *Korovkinova věta o třech funkcích* (Věta 17.9).

Otázka 4. Napište znění věty: *o lokálním difeomorfsmu* (Věta 16.15).

Otázka 5. Zformulujte a dokažte větu: *spojitý obraz kompaktu* (Věta 15.5).

Otázka 6. Zformulujte a dokažte větu: *Rieszova–Fischerova věta* (Věta 18.5).

Otázka 7. Zformulujte a dokažte větu: *Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence řad funkcí* (Věta 17.12).