MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 NMMA201 - ZIMNÍ SEMESTR 2019–2020 CVIČENÍ

LUBOŠ PICK

1. Metrické prostory II

Příklad 1.1. Rozhodněte, zda v metrikách ℓ^1, ℓ^p a ℓ^∞ konvergují následující posloupnosti:

$$\{1, 2, 3, \dots, n, 0, 0, \dots, 0, \dots\};$$
$$\{1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots\} \ (n \text{ krát});$$
$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0, \dots\right\} \ (n \text{ krát});$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots\right\} \ (n \text{ krát}).$$

Příklad 1.2. Rozhodněte, zda existuje metrický prostor P a dvě jeho neprázdné podmnožiny A, B tak, aby platilo $A \cap B = \emptyset$ a zároveň $\operatorname{dist}(A, B) = 0$. Lze takové množiny nalézt uzavřené? Lze takové množiny nalézt takové, že A je uzavřená a B je kompaktní?

Příklad 1.3. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{jestliže } |x - y| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{2} & \text{jestliže } |x - y| \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \\ 0 & \text{jestliže } x = y. \end{cases}$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, charakterizujte všechny otevřené a všechny kompaktní množiny v této metrice.

Příklad 1.4. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, spočtěte $\operatorname{diam}(F_n)$, kde $F_n := [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, v této metrice. Jsou množiny F_n omezené, uzavřené, kompaktní?

Příklad 1.5. Definujme na množině $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ funkci

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{jestliže } x \neq 0,\ y = 0; \\ \frac{1}{|y|} & \text{jestliže } y \neq 0,\ x = 0; \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{jestliže } x \neq 0,\ y \neq 0, x \neq y; \\ 0 & \text{jestliže } x = y. \end{cases}$$

Ověřte, zda ϱ je metrika, a pokud ano, charakterizujte všechny kompaktní množiny v této metrice. Je prostor $(\mathbb{R}, \varrho)$ kompaktní?

Příklad 1.6. Nechť P je kompaktní metrický prostor. Dokažte, že existují $y, z \in P$ taková, že $\varrho(y, z) = \operatorname{diam} P$.

Příklad 1.7. Dokažte, že existuje metrický prostor P a v něm neprázdná uzavřená množina F a neprázdná kompaktní množina K takové, že jejich vzdálenost není realisována, tedy neexistují body $a \in K$, $b \in F$ splňující $\varrho(a, b) = \operatorname{dist}(K, F)$. Lze úlohu vyřešit v $\mathbb{R}^n$?

Příklad 1.8. Dokažte, že posloupnost $\{f_n\}$, kde $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, nemá limitu v $(C([0, 1]), \varrho_{\sup})$.

Příklad 1.9. Nalezněte posloupnost $\{f_n\}$, která bodově konverguje ke spojité funkci, ale nekonverguje k této funkci v $(C([0, 1]), \varrho_{\sup})$.

Příklad 1.10. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru P splňující $x_n \to x$ pro nějaké $x \in P$. Rozhodněte, zda je množina $\{x_n; x \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompaktní.

Příklad 1.11. Nechť P je nekompaktní metrický prostor. Sestrojte omezenou spojitou funkci $f\colon P \to \mathbb{R}$, která není stejnoměrně spojitá.

Příklad 1.12. Nechť P je nekompaktní metrický prostor. Sestrojte neomezenou spojitou funkci $f\colon P \to \mathbb{R}$.

Příklad 1.13. Rozhodněte, zda je množina $\{x = \{x_n\}; |x_n| \le \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ kompaktní v ℓ^2.

Příklad 1.14. Rozhodněte, zda je množina všech neklesajících spojitých funkcí f na $[0,1]$ splňujících $\|f\| \le 1$ kompaktní v $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$.

Příklad 1.15. Rozhodněte, zda je množina všech 1-lipschitzovských funkcí f na $[0,1]$ splňujících $\|f\| \le 1$ kompaktní v $(C([0,1]), \varrho_{\sup})$.

Příklad 1.16. Rozhodněte, zda součin dvou kompaktních prostorů je kompaktní prostor.

Příklad 1.17. Definujme funkci $F\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ předpisem $F(x) = \limsup x_n$. Je F spojitá na ℓ^∞, na c, nebo na c_0?

Příklad 1.18. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru splňující

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_0\colon \varrho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Plyne odtud, že $\{x_n\}$ je cauchyovská?

Příklad 1.19. Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriky $\varrho_1(x,y) = |x-y|$ a $\varrho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Nalezněte posloupnost, která je cauchyovská vzhledem k právě jedné z těchto dvou metrik.

Příklad 1.20. Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriky $\varrho_1(x,y) = |x-y|$ a $\varrho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Rozhodněte, zda některý z prostorů $(\mathbb{R}, \varrho_1)$ a $(\mathbb{R}, \varrho_2)$ má více otevřených množin.

Příklad 1.21. Definujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ metriku $\varrho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Rozhodněte, zda je prostor $(\mathbb{R}, \varrho_2)$ úplný.

Příklad 1.22. Nechť P je neprázdný kompaktní metrický prostor a $f\colon P \to P$ splňuje podmínku

$$\forall x, y \in P,\ x \ne y\colon \varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x,y).$$

Dokažte, že potom má f na P pevný bod.

2. Funkce více proměnných II

2.1. **Implicitní funkce.**

Příklad 2.1. Vypočítejte derivaci $y'(x)$ implicitní funkce $y = y(x)$ definované následujícími předpisy:

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2, \qquad \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right);$$
$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1);$$
$$x^y = y^x \quad (x \ne y), \qquad y = 2x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Příklad 2.2. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial z}{\partial y}$ implicitní funkce $z = z(x,y)$ definované předpisem

$$z^2 + xy^3 = \frac{xz}{y}.$$

Příklad 2.3. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial x}{\partial y}$ implicitní funkce $x = x(y,z)$ definované předpisem

$$xy^3 = y - z.$$

Příklad 2.4. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial y}{\partial z}$ implicitní funkce $y = y(x,z)$ definované předpisem

$$e^{yz} - x^2 z \log y = \pi.$$

Příklad 2.5. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial z}{\partial x}$ implicitní funkce $z = z(x,y)$ definované předpisem

$$F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = 0,$$

kde F je diferencovatelná funkce dvou proměnných.

Výsledky. Příklad 2.1:

$$\frac{x+y}{y-x}, \quad \frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}, \quad \frac{y^2(1-\log x)}{x^2(1-\log y)}, \quad \frac{y}{x}.$$

Příklad 2.2:

$$\frac{3xy^4+xz}{xy-2zy^2}.$$

Příklad 2.3:

$$\frac{1-3xy^2}{y^3}.$$

Příklad 2.4:

$$\frac{x^2y\log y-y^2e^{yz}}{yze^{yz}-x^2z}.$$

Příklad 2.5:

$$\frac{2x\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2-z^2,y^2+xz\right)+z\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2-z^2,y^2+xz\right)}{2z\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2-z^2,y^2+xz\right)-x\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2-z^2,y^2+xz\right)}.$$

Příklad 2.6. Dokažte, že vztahy

$$xe^{u+v}+2uv=1$$
$$ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x$$

definují na okolí bodu $[x,y]=[1,2]$ hladké funkce u,v proměnných x,y takové, že $u(1,2)=0$ a $v(1,2)=0$. Rozhodněte, zda mají funkce u a v v bodě $[x,y]=[1,2]$ totální diferenciály, a pokud ano, spočítejte je.

Příklad 2.7. Ukažte, že vztahy

$$u=\operatorname{arctg}(\pi x)+y^2z,$$
$$v=e^{-x}+2\frac{y}{z}$$
$$w=\cos(2xy)+2\sqrt{z}$$

definují na okolí bodu $[u,v,w]=[4,\frac{3}{2},5]$ hladké funkce $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$, pro které platí $x(4,\frac{3}{2},5)=0$, $y(4,\frac{3}{2},5)=1$, $z(4,\frac{3}{2},5)=4$. Rozhodněte, zda má funkce $y(u,v,w)$ totální diferenciál v bodě $[4,\frac{3}{2},5]$, a pokud ano, spočtěte jej. Má funkce $y(u,v,w)$ v bodě $[4,\frac{3}{2},5]$ stacionární bod?

Výsledek: $\nabla y(4,\frac{3}{2},5)=(\frac{2}{\pi+16},\frac{2\pi}{\pi+16},\frac{\pi-8}{\pi+16})$, funkce $y(u,v,w)$ v bodě $[4,\frac{3}{2},5]$ nemá stacionární bod

Příklad 2.8. Ukažte, že vztahy

$$u=\sin x+xy+e^z,$$
$$v=\cos y+xe^{-y},$$
$$w=x^2+2y-\cos(xz)$$

definují na okolí bodu $[u,v,w]=[1+\sin 1,2,0]$ hladké funkce $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$, pro které platí $x(1+\sin 1,2,0)=1$, $y(1+\sin 1,2,0)=0$, $z(1+\sin 1,2,0)=0$. Rozhodněte, zda má funkce $x(u,v,w)$ totální diferenciál v bodě $[1+\sin 1,2,0]$, a pokud ano, spočtěte jej.

Výsledek: $\nabla x(1+\sin 1,2,0)=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

Příklad 2.9. Dokažte, že vztahy

$$u=\sin(\pi xy)-\operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$$
$$v=3xy^2+e^{x+y}$$

definují na okolí bodu $[u,v]=[\frac{\pi}{4},-2]$ hladké funkce x,y proměnných u,v takové, že $x(\frac{\pi}{4},-2)=-1$ a $y(\frac{\pi}{4},-2)=1$. Je-li navíc $z(x,y)=\log(x^2+y^2)$, spočtěte $\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{4},-2)$.

Výsledek: $\frac{\partial z}{\partial u}(\frac{\pi}{4},-2)=-\frac{2}{9-2\pi}$

Příklad 2.10. Dokažte, že vztahy

$$u = \operatorname{tg}(xy) + \log(x^2 + y^2)$$
$$v = \arcsin(2x) - (3^x)^y$$

definují na okolí bodu $[u, v] = [0, -1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, -1) = 0$ a $y(0, -1) = 1$. Rozhodněte, zda má funkce y v bodě $[u, v] = [0, -1]$ totální diferenciál, a pokud ano, spočítejte jej.

Výsledek: $\nabla y(0, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2(2-\log 3)})$

Příklad 2.11. Dokažte, že vztahy

$$xy^2 + xu + yv^2 = 3$$
$$x^3y + 2xv - u^2v = 2$$

definují na okolí bodu $[x, y] = [1, 1]$ hladké funkce u, v proměnných x, y takové, že $u(1, 1) = 1$ a $v(1, 1) = 1$. Rozhodněte, zda existuje tečná rovina ke grafu funkce $u(x, y)$ v bodě $[x, y, u] = [1, 1, 1]$, a pokud ano, napište její rovnici.

Výsledek: $u - 1 = \frac{8}{5}(x - 1) - \frac{1}{5}(y - 1)$

Příklad 2.12. Ukažte, že vztahy

$$u = \cos(\pi y) + 2\sqrt{xz},$$
$$v = \frac{y}{x} - \log z$$
$$w = \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}(yz)$$

definují na okolí bodu $[u, v, w] = [3, 0, \frac{1}{2}]$ hladké funkce $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$, pro které platí $x(3, 0, \frac{1}{2}) = 1$, $y(3, 0, \frac{1}{2}) = 0$, $z(3, 0, \frac{1}{2}) = 1$. Rozhodněte, zda má funkce $y(u, v, w)$ totální diferenciál v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$, a pokud ano, spočtěte jej. Má funkce $y(u, v, w)$ v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$ stacionární bod?

Výsledek: $\nabla y(3, 0, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, funkce $y(u, v, w)$ nemá v bodě $[3, 0, \frac{1}{2}]$ stacionární bod

2.2. **Extrémy funkcí více proměnných.**

Příklad 2.13. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$$

vzhledem k jejímu definičnímu oboru. Existují globální extrémy?

Příklad 2.14. Rozhodněte, zda má funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + yz$$

globální extrémy na množině

$$M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ y + z = 2,\ x^2 + y^2 = 2\right\},$$

a pokud ano, spočítejte je.

Výsledek: $\max f = f(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{\pi}{2}$, f nenabývá svého minima, $\inf f = 2(\sqrt{2} - 1)$

Příklad 2.15. Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$F(x, y, z) = x \cos y - z^2 - x^2$$

na $\mathbb{R}^3$. Rozhodněte, zda má funkce na $\mathbb{R}^3$ globální maximum a globální minimum a pokud ano, určete jejich hodnoty a ve kterých bodech se nabývají.

Výsledek: $\max f = f(\frac{(-1)^k}{2}, k\pi, 0) = \frac{1}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

Příklad 2.16. Najděte všechny globální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

na množině $M = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ xy = 4\right\}$. Zdůvodněte existenci globálních extrémů.

Výsledek: $\max f = f(2, 2, -1) = 5$, $\min f = f(-2, -2, 1) = -5$

Příklad 2.17. Najděte všechny globální extrémy funkce
$$f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 + xy$$
na uzavřeném trojúhelníku v $\mathbb{R}^2$ s vrcholy
$$A = [0,1],\ B = [2,0],\ C = [-1,-1].$$

Výsledek: $\max f = f(0,0) = 0$, $\min f = f(2,0) = -4$

Příklad 2.18. Rozhodněte, zda funkce
$$f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 + 2xy - 2x - 4y$$
nabývá na množině
$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\}$$
svých globálních extrémů, a pokud ano, určete je.

Výsledek: $\max f = f(0,2) = 12$, $\min f = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -1$

Příklad 2.19. Rozhodněte, zda funkce
$$f(x,y) = (x+y)^2$$
nabývá na množině
$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^3 + y^3 \leq 2xy\}$$
svých globálních extrémů, a pokud ano, nalezněte je.

(**Návod:** Dokažte, že $M \subset [0,2]^2$.)

Výsledek: $\max f = f(1,1) = 4$, $\min f = f(0,0) = 0$

3. Číselné řady II

Příklad 3.1. Vyšetřete konvergenci řad
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cos\left(\pi \frac{n^2}{n+1}\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^\alpha + \sin \frac{n\pi}{4}}, \quad \alpha > 0, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\sin(n^2 a)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\cos(n^2 a)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\cos(n^2 a)}{n}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3.2. Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{R}$ konverguje absolutně řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}.$$

Příklad 3.3. Dokažte, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(ak)}{k} \right| < 2\sqrt{\pi}.$$

Příklad 3.4. Dokažte následující *Kroneckerovo lemma*: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada a nechť $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Potom
$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = o\left(\frac{1}{b_n}\right) \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = o\left(b_n\right).$$

Příklad 3.5. Utvořte Cauchyův součin daných řad a spočítejte jeho součet:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$.

Příklad 3.6. Zkoumejte konvergenci (a eventuální součet) následujících zobecněných řad:

(i) $$\sum_{(i,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} x^i y^k, \quad |x|,|y|<1$$

(ii) $$\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} \frac{1}{n!k!(n+k+1)},$$

(iii) $$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{nk(n+k+2)},$$

(iv) $$\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} \frac{n!k!}{(n+k+2)!},$$

(v) $$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha k^\beta}, \quad \alpha,\beta>0,$$

(vi) $$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{(n+k)^p}, \quad p>0,$$

(vii) $$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} nx^{nk}, \quad |x|<1.$$

Výsledky.
- Příklad 3.1: (i), (ii), (iii) konvergují, (iv) konverguje pro $\alpha > \frac{1}{2}$ a diverguje pro $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, (v) konverguje, (vi), (vii) a (viii) konvergují pro každé $a \in \mathbb{R}$.
- Příklad 3.2: Řada konverguje absolutně právě tehdy, pokud $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro ostatní $a \in \mathbb{R}$ konverguje neabsolutně.
- Příklad 3.5: (i) $e^{\frac{5}{2}}$, (ii) $-\frac{1}{2}\log 2$, (iii) $\frac{1}{(1-x^2)^2}$.

Příklad 3.7. Dokažte následující *Kummerovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť D_n je posloupnost kladných reálných čísel. Označme

$$p_n = D_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - D_{n+1}.$$

Potom

(i) jestliže $\liminf p_n > 0$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $\limsup p_n < 0$ a navíc řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{D_n}$ diverguje, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverguje.

Příklad 3.8. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Raabeovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Potom

(i) jestliže $\liminf n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $\limsup n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverguje.

Příklad 3.9. Dokažte pomocí Kummerova kritéria následující *Gaussovo kritérium konvergence řad.* Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je řada reálných čísel s nezápornými členy. Nechť existuje omezená posloupnost reálných čísel b_n a konstanta $k \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{b_n}{n^2}.$$

Potom

(i) jestliže $k > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konverguje;
(ii) jestliže $k \le 1$, pak řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverguje.

4. Stejnoměrná konvergence posloupnosti a řad funkcí

4.1. Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí.

Příklad 4.1. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in [0,\infty).$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0,\infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.2. Nechť posloupnost funkcí f_n je zadána předpisem

$$f_n(x) = \sqrt{x}\, n^{-\sqrt{x}} \log n, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in [0, \infty).$$

Vyšetřete,zda:
(i) f_n konverguje bodově na intervalu $[0, \infty)$ (pokud ano, určete limitní funkci f),
(ii) f_n konverguje stejnoměrně na intervalu $[0, \infty)$,
(iii) f_n konverguje stejnoměrně na intervalu $(0, \infty)$,
(iv) f_n konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $(0, \infty)$.

Výsledek: $f_n \to 0$ na $[0, \infty)$ a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0, \infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.3. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in [0, \infty).$$

Výsledek: $f_n \rightrightarrows f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 3] \\ x, & x \in [3, \infty) \end{cases}$ na $[0, \infty)$

Příklad 4.4. Nechť posloupnost funkcí f_n je dána předpisem

$$f_n(x) = (x+1)^3 \operatorname{arccotg}\left(-nx^3\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

(i) Vyšetřete bodovou konvergenci posloupnosti f_n a najděte její bodovou limitu;
(ii) rozhodněte, zda posloupnost f_n konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$;
(iii) rozhodněte, zda posloupnost f_n konverguje lokálně stejnoměrně na $(-\infty, 0)$.
Bonifikační otázka: rozhodněte, zda posloupnost f_n konverguje lokálně stejnoměrně na $(0, \infty)$.

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(-\infty, 0)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.5. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \sqrt{n^2+1}\left(e^{\frac{1}{nx}} - 1\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (0, \infty).$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \frac{1}{x}$ na $(0, \infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.6. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = n^2\left(1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \frac{x^2}{2}$ na $\mathbb{R}$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.7. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{x}\left(2^{\frac{x^2}{\sqrt{n}}} - 1\right), \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (0, \infty).$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} (\log 2)x$ na $(0, \infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.8. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \log\left(1 + \frac{1}{nx^2}\right)\sqrt{n^2+2}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (-\infty, 0).$$

Výsledek: $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \frac{1}{x^2}$ na $(0, \infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.9. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4.10. Nechť $p, q > 0$. Určete bodovou limitu posloupnosti

$$f_n(x) = \frac{x^{pn}}{1+n+x^{qn}}, \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in (0, \infty).$$

v závislosti na parametrech p a q. Rozhodněte, zda f_n konverguje na $(0, \infty)$ stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně.

Příklad 4.11. Rozhodněte, zda posloupnost

$$f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$$

konverguje bodově či stejnoměrně na intervalu $[0, 1]$, případně zda konverguje lokálně stejnoměrně na některé podmnožině tohoto intervalu.

4.2. **Stejnoměrná konvergence řad funkcí.**

Příklad 4.12. Nalezněte definiční obor funkce f, definované předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)x^2}}{n^2}.$$

Rozhodněte, zda existuje $f'(0)$ a pokud ano, spočtěte ji.

Příklad 4.13. Nechť f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(x^n).$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkcí f a f' v jejich definičním oboru.

Příklad 4.14. Vyšetřete, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}$$

konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně na intervalu $[-1, 1]$. Označme součet řady v bodě x jako $f(x)$. Spočtěte $f'(0)$.

Příklad 4.15. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arcsin((-x)^n)}{1 + \log n}.$$

Rozhodněte, pro která $x \in [-1, 1]$ řada bodově konverguje. Je tato konvergence stejnoměrná nebo lokálně stejnoměrná?

Výsledek: $\sum f_n \rightrightarrows$ na $(-1, 1]$ a diverguje pro $x = -1$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.16. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\operatorname{sign}(\cos x))^n (2\cos(x))^{2n}}{\sqrt{\log n}}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru.

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $[(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]] + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ke spojité funkci, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.17. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \arccos(x^n)}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Rozhodněte, pro která $x \in [-1, 1]$ řada bodově konverguje. Je tato konvergence stejnoměrná nebo lokálně stejnoměrná?

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(-1, 1]$ a diverguje v bodě -1.

Příklad 4.18. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2x}{x^2 + n^2}\right), \qquad x \in [0, \infty).$$

Rozhodněte, zda řada konverguje na intervalu $[0, \infty)$ bodově nebo lokálně stejnoměrně.

BONIFIKAČNÍ ÚLOHA: Rozhodněte, zda řada konverguje na intervalu $[0, \infty)$ stejnoměrně.

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $[0, \infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.19. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{sign}(\operatorname{tg} x))^n \sqrt{n} 3^n (\operatorname{tg}(x))^{2n}}{n+1}.$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru.

Výsledek: $\sum f_n$ konverguje absolutně na $(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi)$ a neabsolutně pro $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jinde diverguje. Konvergence je lokálně stejnoměrná a není stejnoměrná, limitní funkce je na svém definičním oboru spojitá

Příklad 4.20. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(x^n)}{\sqrt{n+1}}.$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru.

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(-1, \infty)$, konvergence není stejnoměrná

Příklad 4.21. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}}, \qquad x \in [0, \infty).$$

Rozhodněte, na kterých podintervalech intervalu $x \in [0, \infty)$ řada konverguje bodově, stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na intervalu $[0, \infty)$.

Výsledek: $\sum f_n \rightrightarrows$ na $[0, \infty)$ ke spojité funkci

Příklad 4.22. Nechť funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n(\log n)^2}\right).$$

Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkce f na jejím definičním oboru.

Výsledek: $\sum f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$, konvergence není stejnoměrná

5. Obyčejné diferenciální rovnice

5.1. **Základy, separace proměnných.**

Příklad 5.1. Uhodněte nějaká řešení následujících diferenciálních rovnic. Najdete všechna řešení?

$$y' = 0; \quad y' = 5; \quad y' = -3x; \quad y' = \sin(2x); \quad y' = -4y.$$

Příklad 5.2. Uhodněte partikulární řešení diferenciálních rovnic, která splňují příslušnou okrajovou podmínku:

$$y' = -3x,\ y(2) = 4; \quad y' = -4y,\ y(0) = 7.$$

Příklad 5.3. Zkuste najít některé obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + \lambda^2 y = 0.$$

Nyní najděte partikulární řešení, které splňuje okrajové podmínky

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 3.$$

Příklad 5.4. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

$$y' = 1 + y^2; \quad y' = \sin x \left(y^2 + 2y + 1\right); \quad y' = \begin{cases} y \log^2(y), & y > 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Načrtněte integrální křivky řešení všech uvedených rovnic!

Příklad 5.5. Jestliže se potkají dvě řešení rovnice

$$y' = f(x, y),$$

kde f je spojitá funkce dvou proměnných, pak na sebe tato dvě řešení navazují hladce. Dokažte!

Rovnici

$$y'x = y \log y$$

řeší například funkce $y \equiv 1$ a $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Tato dvě řešení se potkávají v bodě $[0, 1]$, ale nenavazují na sebe hladce. Proč to není ve sporu se shora uvedeným tvrzením?

Příklad 5.6. Najděte maximální partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y' \sin x = y \log y,$$

procházející bodem $[\frac{\pi}{2}, e]$ a načrtněte jeho graf. Jaký je maximální interval, na který lze toto řešení rozšířit?

Příklad 5.7. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

$$y' = 10^{x+y}; \quad y' - xy' = b(1 + x^2 y'), \qquad y(1) = 1.$$

Načrtněte integrální křivky řešení!

Příklad 5.8. Primitivní *populační model* popisuje vývoj určité populace tak, že růst počtu jedinců P v čase t je přímo úměrný P, takže podle tohoto modelu je vývoj populace řízen diferenciální rovnicí

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti, závislá na typu populace, kterou studujeme. Dokažte, že pak

$$P(t) = Ae^{kt},$$

kde A je nějaká kladná konstanta daná počátečním stavem populace. Promyslete si sestavení a vyřešení obecné rovnice a pak spočítejte následující příklad.

Bakteriální kultura roste v čase t úměrně počtu jednotlivých bakterií $P = P(t)$. Na začátku je 500 bakterií, po jednom dni máme 800 bakterií. Bude jich po dalších 12 hodinách více než 1000? Vedla by lineární aproximace ke stejnému závěru?

Příklad 5.9. Podstatně lepší populační model než ten, který byl popsán v předcházejícím příkladu, bere v potaz tzv. *maximální kapacitu životního prostředí*. Ta je dána číslem N, což je nejvyšší možný počet členů dané populace, který se ještě v daném životním prostředí uživí. Ověřte si, že podle tohoto modelu je vývoj populace řízen diferenciální rovnicí

$$\frac{dP}{dt} = kP(N - P).$$

Dokažte, že vývoj stavu populace je pak dán funkcí

$$P(t) = \frac{kNe^{Nt}}{1 + ke^{Nt}},$$

kde k je konstanta úměrnosti. Vyřešte si obecnou rovnici a načrtněte její integrální křivky. Porovnejte s příkladem 5.8! Pak spočítejte následující příklad.

Na ostrov, který skýtá pastvu pro nejvýše 120 králíků, dorazilo 30 králíků. Po prvním roce jich zde žije již 80. Bude jich za další rok více než 100?

Příklad 5.10. Králík roste podle tzv. allometrického zákona

$$\frac{ds}{dv} = k\frac{s}{v},$$

kde s, v označují šířku a výšku králíka a k je konstanta úměrnosti. Na začátku má králík šířku 5 cm a výšku 5 cm. Po nějaké době má králík 10 cm výšky a $5\sqrt{2}$ cm šířky. Králík má k dispozici noru o šířce 12 cm a výšce 24 cm. Určete, zda mu bude dřív úzká nebo nízká.

Příklad 5.11. Brouk Pytlík nemá rád teplotu nižší než 60 mravenčích stupňů. V 8 hodin ráno mravenci zatopí v peci, na níž Pytlík leží, na 110 stupňů, a odejdou do práce. Ve 13 hodin je teplota v místnosti 80 stupňů. Místnost vychládá rychlostí úměrnou rozdílu okamžité teploty v místnosti a venkovní teploty, která je stabilně rovna 20 stupňům. Vydrží Pytlík do 18 hodin, kdy se mravenci vrátí z práce a zatopí?

Příklad 5.12. Popište křivku v rovině, která prochází bodem $[2, 3]$ s následující vlastností: úsečka libovolné její tečny, vymezená průsečíky této tečny se souřadnými osami, se půlí v bodě dotyku.

5.2. **Homogenní rovnice.**

Příklad 5.13. Má-li diferenciální rovnice tvar $y' = f(\frac{y}{x})$, lze ji převést substitucí $z = \frac{y}{x}$ na tvar

$$z'(x)x + z(x) = f(z),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

Řešte diferenciální rovnice

$$xy' = y + x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right), \quad xy' = \frac{y^2+xy}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} - 1, \quad xy' = y\log\frac{x}{y},\ x, y > 0.$$

Příklad 5.14. Řešte diferenciální rovnice

$$xy' = xe^{y/x} + y, \quad \left(x^2 + y^2\right)y' = 2xy.$$

Příklad 5.15. Řešte diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2, \qquad y' = \frac{x+y}{x-y}, \qquad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

5.3. **Exaktní rovnice.** Má-li diferenciální rovnice tvar

$$h(x,y)y' + f(x,y) = 0 \tag{1}$$

a existuje-li funkce dvou proměnných $u(x,y)$ taková, že

$$\frac{\partial u}{\partial y} = h(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y), \tag{2}$$

pak se taková rovnice nazývá *exaktní*.

Dosud jsme chápali u jako funkci dvou proměnných. Protože ale $y = y(x)$, můžeme chápat $u = u(x, y(x))$ jako funkci jedné proměnné (x). Pak ji derivujeme neparciálně,tj. $\frac{du}{dx}$. Povšimněme si, že exaktní rovnici (1) lze přepsat ve tvaru $\frac{du}{dx} = 0$ a že všechna řešení této rovnice jsou implicitně popsána pomocí křivek tvaru $u(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Jak rozpoznat, zda je daná rovnice exaktní? Jsou-li funkce h a f spojité, pak k tomu, aby rovnice (1) byla exaktní, musí platit

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Tento vztah lze považovat za test exaktnosti rovnice. Navíc jej lze snadno ověřit.

Jestliže je rovnice exaktní, jak najít funkci u? Můžeme se například pokusit tuto funkci uhodnout. Pokud to nejde, můžeme funkci u získat integrací vztahů (2).

Příklad 5.16. Řešte diferenciální rovnice

$$y'\left(\log(\sin x) - 3y^2\right) + y\operatorname{cotg} x + 4x = 0, \quad y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{y}; \tag{3}$$

$$y'\left(3x^2y^2 + e^y\right) + 2xy^3 + 2 = 0; \tag{4}$$

$$y'\left(x^2\sin(xy) - 2y\right) + \cos(xy) - xy\sin(xy) = 0. \tag{5}$$

Jestliže rovnice není exaktní, můžeme ji někdy převést na exaktní tvar pomocí integračního faktoru. Rovnici (1) vynásobíme zatím neznámou funkcí φ. Aby byla tato nová rovnice exaktní, musí splnit test, tj. musí platit

$$\frac{\partial(h\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial(f\varphi)}{\partial y},$$

tedy

$$\varphi\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{6}$$

což je ale parciální diferenciální rovnice pro φ. To je úloha těžší než původní rovnice. Z tohoto důvodu většinou hledáme funkci φ závislou jen na jedné ze dvou proměnných. Pokud např. $\varphi = \varphi(x)$, pak je $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ a (6) získá tvar

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

a to je již snadno řešitelná rovnice pro φ se separovanými proměnnými.

Příklad 5.17. Uvažujte diferenciální rovnici

$$y'\left(3xy - 6x^2\right) + y^2 - 6xy = 0.$$

Přesvědčte se, že rovnice není exaktní. Hledejte integrační faktor ve tvaru $\varphi = \varphi(y)$ a rovnici vyřešte.

5.4. **Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu.**

Příklad 5.18. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$xy' + y = y^2 \log x,$$

procházející bodem $[1, \frac{1}{3}]$, a určete jejich definiční obory.

Příklad 5.19. Nalezněte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' + \frac{y}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2x}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right)}\sqrt{y},$$

procházející bodem $[\pi, \pi^4]$ a určete jejich definiční obory. Lze některé z těchto řešení navázat v některém bodě definičního oboru na řešení singulární? Je některé z těchto řešení na svém maximálním definičním oboru omezené?

Příklad 5.20. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$xy' + \frac{y}{\log x} = y^3$$

a určete jejich definiční obory. Pak nelezněte všechna maximální řešení procházející bodem $[e, 1]$, určete jejich definiční obory a rozhodněte, zda je některé z těchto řešení na svém definičním oboru omezené.

Příklad 5.21. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' + 3xy = y^{\frac{1}{3}} e^{-(x+1)^2}$$

a určete jejich definiční obory. Je některé obecné maximální řešení této rovnice omezené na svém definičním oboru? Pak nalezněte všechna řešení této rovnice, procházející bodem $\left[0, -\left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$.

Příklad 5.22. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' - \frac{1}{3}(\operatorname{cotg} x)\, y = (\cos x)^2\, y^4, \qquad x \in (0, \pi),$$

a určete jejich definiční obory. Potom určete všechna řešení této rovnice, procházející bodem $[\frac{\pi}{2}, 2]$ a jejich definiční obory. Nabývá některé z nich někde na svém definičním oboru záporné hodnoty?

Příklad 5.23. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$yy'x + y^2 = \frac{x}{1 - x^3}, \qquad x \in (1, \infty),$$

a určete jejich definiční obory. Potom určete všechna řešení této rovnice, procházející bodem $[\sqrt[3]{2}, 0]$ a jejich definiční obory. Je některé z těchto řešení na svém definičním oboru omezené?

Příklad 5.24. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y'(1 + x^2) \operatorname{arctg} x + 6xy \operatorname{arctg} x = \sqrt[3]{y^4}(1 + x^2)$$

a určete jejich definiční obory.

Příklad 5.25. Najděte všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$xy' + 4y = 3xy^2$$

a určete jejich definiční obory. Potom určete všechna řešení této rovnice, procházející bodem $[2, -\frac{1}{14}]$ a jejich definiční obory. Je některé z těchto řešení na svém definičním oboru omezené?

Příklad 5.26. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'x + y = \frac{1}{2(x^2 + 1)y}$$

a přesně popište jejich definiční obory. Spočtěte maximální řešení, procházející bodem $[x_0, y_0]$, kde $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\log 2}$ a popište jeho definiční obory.

5.5. **Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu.**

Příklad 5.27. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte fundamentální systém řešení a uhodněte alespoň jedno partikulární řešení.

$$y'' - 5y' + 4y = e^{3x};$$
$$y''' - y'' + y' - y = \sin x;$$
$$y'' - y = e^x \left(x^2 + 1\right).$$

Návod: Partikulární řešení hledejte po řadě ve tvaru $y = ae^{3x}$, $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ a $y = ae^x x^2 + be^x x + ce^x$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c.

Příklad 5.28. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte reálný fundamentální systém řešení a uhodněte partikulární řešení.

$$y'' + 4y = \cos(nx); \quad y''' - y = x^3 - 1.$$

Návod: Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y = a\sin(nx) + b\cos(nx)$, respektive ve tvaru $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c, d.

Příklad 5.29. Zrekonstruujte nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, jestliže víte, že její fundamentální systém řešení je

$$[e^x, xe^x]; \quad \left[x, x^2\right].$$

Příklad 5.30. Metodou snižování řádu vyřešte rovnici

$$y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = y''(0) = 1.$$

Návod: Položte $z = y'$.

Příklad 5.31. Nalezněte reálný fundamentální systém řešení následujících lineárních homogenních diferenciálních rovnic:

$$y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0;$$
$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0;$$
$$y'' + 4y' + 13y = 0;$$
$$y'' + y' - 2y = 0.$$

5.6. **Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu.**

Příklad 5.32. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y = x^3 + \sin x.$$

Příklad 5.33. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = x\sin x.$$

Příklad 5.34. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x} + 5\sin x.$$

Příklad 5.35. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 5y' + 6y = \sin(e^{-x}).$$

Příklad 5.36. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Příklad 5.37. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = \sin x.$$

5.7. **Systémy obyčejných diferenciálních lineárních rovnic 1. řádu.**

Příklad 5.38. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 2x - y - 2z \\ z' &= 2z - x + y. \end{aligned}$$

Příklad 5.39. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y - z \\ y' &= 3x - 4y - 3z \\ z' &= 2x - 4y. \end{aligned}$$

Příklad 5.40. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2z - y \\ y' &= x + 2z \\ z' &= y - x - z. \end{aligned}$$

Příklad 5.41. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - z \\ y' &= y - x + z \\ z' &= x - y. \end{aligned}$$

Příklad 5.42. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 5y - 2z \\ y' &= -2x - 2y + z \\ z' &= -x - y + z. \end{aligned}$$

Příklad 5.43. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= 2z - y. \end{aligned}$$

Příklad 5.44. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 2y + 4z \\ z' &= x - z. \end{aligned}$$

5.8. **Systémy obyčejných diferenciálních lineárních rovnic 1. řádu.**

Příklad 5.45. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2y + z + e^t \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -2x + 3y - z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Příklad 5.46. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + z \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= -x + 3z, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Příklad 5.47. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + e^t \\ y' &= 2x + y + e^t, \end{aligned}$$

splňující počáteční podmínku $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Příklad 5.48. Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - z \\ y' &= 2x + y - 2z \\ z' &= 2x + y - 2z. \end{aligned}$$

(i) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy, splňující počáteční podmínku $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

(ii) Určete množinu všech $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{R}^3$, pro která je maximální řešení uvedené soustavy (x, y, z) vyhovující podmínce $y(0) = [x_0, y_0, z_0]$ konstantní.