MATEMATICKÁ ANALÝZA 4 - LETNÍ SEMESTR 2019–2020
PŘEDNÁŠKA

LUBOŠ PICK

19. Metrické prostory III

19.1. **Úplné prostory - pokračování.**

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **hustá** v P, jestliže $\overline{A} = P$.

Poznámka. Množina A je hustá v metrickém prostoru P právě tehdy, když pro každé $x \in P$ existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků A splňující $x_n \to x$.

Příklady. (a) $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$,
(b) množina všech polynomů na $[a, b]$, kde $[a, b] \subset \mathbb{R}$, je hustá v $C([a, b], \varrho_{\sup})$,
(c) množina A je hustá v diskrétním prostoru P právě tehdy, když $A = P$.

Věta 19.1 (charakterisace hustých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom je $A \subset P$ je hustá právě tehdy, když pro každou otevřenou neprázdnou množinu $G \subset P$ platí $G \cap A \neq \emptyset$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme že existuje otevřená neprázdná množina $G \subset P$ splňující $G \cap A = \emptyset$. Potom je $P \setminus G$ uzavřená a platí $A \subset P \setminus G$. Tudíž $\overline{A} \subset \overline{P \setminus G} = P \setminus G$. Množina G je podle předpokladu neprázdná, a tedy $P \setminus G \neq P$. Odtud plyne, že $\overline{A} \neq P$, a tedy A není hustá v P.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že A není hustá v P, tedy $\overline{A} \neq P$. Potom je $P \setminus \overline{A}$ neprázdná a otevřená a platí $(P \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$. Odtud plyne tvrzení. $\square$

Věta 19.2 (průnik hustých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $G \subset P$ je otevřená hustá a $H \subset P$ je hustá. Potom je $G \cap H$ hustá.*

Důkaz. Zvolme otevřenou neprázdnou množinu G_1. Potom je $G_1 \cap G$ otevřená a neprázdná. Tudíž je $G_1 \cap (G \cap H) = (G_1 \cap G) \cap H$ neprázdná. Protože G_1 byla zvolena libovolně, plyne odtud, že $(G \cap H)$ je hustá. $\square$

Poznámka. Tvrzení Věty 19.2 neplatí bez předpokladu otevřenosti alespoň jedné z množin. Například $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté a disjunktní v $\mathbb{R}$.

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $n \in \mathbb{N}$ a $G_1, \ldots, G_n$ jsou otevřené husté podmnožiny P. Potom $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ je otevřená a hustá. Toto tvrzení neplatí pro spočetný průnik. Například pro každé $r \in \mathbb{Q}$ je množina $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ hustá a otevřená v $\mathbb{Q}$, ale množina $\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \setminus \{r\})$ je prázdná, a tedy není hustá v $\mathbb{R}$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **řídká**, jestliže $P \setminus \overline{A}$ je hustá.

Příklady. (a) Prázdná množina je řídká v libovolném metrickém prostoru,
(b) A je řídká v diskrétním prostoru právě tehdy, když $A = \emptyset$,
(c) $\mathbb{N}$ je řídká v $\mathbb{R}$,
(d) $\mathbb{Q}$ není řídká v $\mathbb{R}$,
(e) množina

$$A = \{f \in C[a,b],\ -1 \leq f(x) \leq 1,\ x \in [a,b]\}$$

je řídká v $(C[a,b], \varrho_{\mathrm{int}})$, ale není řídká v $(C[a,b], \varrho_{\mathrm{sup}})$.

Věta 19.3 (charakterisace řídkých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A \subset P$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní:*

(a) *A je řídká v P,*
(b) $\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) = \emptyset$*,*
(c) *$P \setminus A$ obsahuje hustou otevřenou množinu.*

Důkaz. (a)$\Rightarrow$(b) Předpokládejme, že množina $\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right)$ je neprázdná. Tato množina je otevřená a platí

$$\operatorname{Int}\left(\overline{A}\right) \cap (P \setminus \overline{A}) = \emptyset.$$

Tedy $P \setminus \overline{A}$ není hustá, takže A není řídká.

(b)$\Rightarrow$(c) Množina $P \setminus \overline{A}$ je otevřená a splňuje $P \setminus \overline{A} \subset P \setminus A$. Dokážeme, že je hustá. Zvolme otevřenou neprázdnou množinu G a položme $H = G \cap (P \setminus \overline{A})$. Předpokládejme, že $H = \emptyset$. Potom $G \subset \overline{A}$, tedy $G \subset \operatorname{Int}(\overline{A})$, takže $\operatorname{Int}(\overline{A}) \neq \emptyset$, což je spor. Tedy $H \neq \emptyset$. Odtud plyne tvrzení.

(c)$\Rightarrow$(a) Protože $P \setminus A$ obsahuje hustou otevřenou množinu, je $\operatorname{Int}(P \setminus A)$ hustá. Protože $\operatorname{Int}(P \setminus A) = P \setminus \overline{A}$, je $P \setminus \overline{A}$ hustá. Tedy je A řídká. $\square$

Věta 19.4 (vlastnosti řídkých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$. Potom*

(a) *je-li A řídká a $B \subset A$, pak B je řídká,*
(b) *jsou-li A a B řídké, pak také $A \cup B$ je řídká,*
(c) *množina A řídká právě tehdy, když $\overline{A}$ je řídká.*

Důkaz. (a) Platí $\overline{B} \subset \overline{A}$, a tedy $P \setminus \overline{A} \subset P \setminus \overline{B}$. Množina $P \setminus \overline{B}$ je hustá, a tedy B je řídká.

(b) Platí

$$P \setminus \overline{A \cup B} = P \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = (P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B}).$$

Protože množiny A a B jsou řídké, jsou $P \setminus \overline{A}$ a $P \setminus \overline{B}$ husté a otevřené. Množina $(P \setminus \overline{A}) \cap (P \setminus \overline{B})$ je hustá. Množina $P \setminus \overline{A \cup B}$ je hustá, tedy $A \cup B$ je řídká.

(c) Tvrzení plyne z toho, že, $P \setminus \overline{\overline{A}} = P \setminus \overline{A}$. $\square$

Definice. Nechť P je množina a $\mathfrak{M} \subset \exp P$. Řekneme, že struktura $\mathfrak{M}$ je **množinový ideál**, jestliže je uzavřená na podmnožiny a konečná sjednocení, a **množinový σ-ideál**, jestliže je uzavřená na podmnožiny a spočetná sjednocení.

Poznámka. Z tvrzení (a) a (b) Věty 19.4 plyne, že systém všech řídkých podmnožin každého metrického prostoru tvoří množinový ideál. Netvoří však množinový σ-ideál, protože například každá jednobodová množina obsahující některé racionální číslo je řídká v $\mathbb{R}$, ale jejich spočetné sjednocení tvoří množinu $\mathbb{Q}$, která již v $\mathbb{R}$ řídká není (je tam dokonce hustá).

konec 1. přednášky (17.2.2020)

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **hromadný bod** množiny A, jestliže existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků A, $x_n \neq x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, splňující $x_n \to x$. Množinu všech hromadných bodů A nazýváme **derivací** množiny A a značíme A'. Řekneme, že A je **dokonalá**, jestliže $A \subset A'$. Každý bod množiny $A \setminus A'$ nazýváme **isolovaným bodem** množiny A.

Příklad. Cantorovým diskontinuem nazýváme množinu definovanou předpisem

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

kde

$$\begin{aligned} F_1 &= [0,1], \\ F_2 &= [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1], \\ F_3 &= [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1], \\ &\dots \end{aligned}$$

Množina C je nespočetná, uzavřená (kompaktní), dokonalá, řídká a míry 0.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **první kategorie**, jestliže existuje posloupnost řídkých množin $\{A_n\}$ splňující $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Řekneme, že A je **druhé kategorie**, jestliže není první kategorie. Řekneme, že A je **residuální**, jestliže $P \setminus A$ je první kategorie.

Příklady. (a) $\mathbb{Q}$ je první kategorie,
(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je druhé kategorie a residuální v $\mathbb{R}$,
(c) $(C([a,b]), \varrho_{\mathrm{int}})$ je první kategorie.

Poznámka. Systém všech množin první kategorie v metrickém prostoru tvoří σ-ideál.

Věta 19.5 (charakterisace prostorů druhé kategorie)**.** *Metrický prostor (P, ϱ) je druhé kategorie právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{G_n\}$ otevřených hustých množin platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že pro nějakou posloupnost $\{G_n\}$ otevřených hustých množin platí $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $P \setminus G_n$ uzavřená a řídká. Navíc platí

$$P = P \setminus \emptyset = P \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P \setminus G_n),$$

a tedy je P první kategorie.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že P je první kategorie. Potom existuje posloupnost řídkých množin $\{A_n\}$ splňující $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Podle Věty 19.4(c) je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $\overline{A_n}$ řídká. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $G_n = P \setminus \overline{A_n}$. Pak je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená a hustá. Dále platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{A_n}) = P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = P \setminus P = \emptyset.$$

$\square$

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **Baireův**, jestliže je každá jeho neprázdná otevřená podmnožina druhé kategorie.

Věta 19.6 (charakterisace Baireových prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující tři výroky ekvivalentní.*

(a) *P je Baireův,*
(b) *je-li $\{G_n\}$ posloupnost otevřených hustých množin, pak je $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ hustá,*
(c) *je-li $A \subset P$ residuální, pak je A hustá.*

Důkaz. (a)$\Rightarrow$(b) Předpokládejme, že množina $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ není hustá. Pak podle Věty 19.1 existuje neprázdná otevřená množina G splňující

$$G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset.$$

Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $G \cap G_n$ otevřená a hustá v G. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $G \setminus G_n$ uzavřená a řídká v G. Navíc platí

$$G = G \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G \setminus G_n),$$

a tedy G je první kategorie. Z toho plyne, že P není Baireův.

(b)$\Rightarrow$(c) Nechť $A \subset P$ je residuální množina. Potom existuje posloupnost $\{A_n\}$ řídkých množin splňující $P \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $G_n = P \setminus \overline{A_n}$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená a hustá a platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P \setminus \overline{A_n}) = P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

Podle (b) je $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ hustá, a tedy také A je hustá.

(c)$\Rightarrow$(a) Nechť A je neprázdná množina první kategorie. Potom je $P \setminus A$ residuální, a tedy hustá. Podle Věty 19.1 není A otevřená, a tedy P je Baireův. $\square$

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Množinu $\overline{B}(x, r)$ definovanou předpisem

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in P; \varrho(x, y) \leq r\}$$

nazýváme **uzavřenou koulí se středem** x **a poloměrem** r.

Věta 19.7 (Baireova)**.** *Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor. Potom je P Baireův.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{G_n\}$ je posloupnost otevřených hustých množin a že G je otevřená a neprázdná. Podle Věty 19.1 je množina $G \cap G_1$ otevřená a neprázdná. Nechť $x_1 \in G \cap G_1$. Potom existuje $r_1 > 0$ takové, že $\overline{B}(x_1, r_1) \subset G \cap G_1$. Množina $\overline{B}(x_1, r_1)$ je uzavřená. Podle Věty 19.1 je $B(x_1, r_1) \cap G_2$ otevřená a neprázdná. Obdobně jako výše nalezneme $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap G_2$ a $r_2 \in \mathbb{R}$, $0 < r_2 < \frac{1}{2} r_1$, takové, že

$$\overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap G_2 \subset G \cap G_1 \cap G_2.$$

Opakováním tohoto postupu dostaneme posloupnost uzavřených koulí $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$$

a

$$\lim \operatorname{diam}(\overline{B}(x_n, r_n)) = 0.$$

Prostor P je úplný, a tedy díky Cantorově větě nalezneme $x \in P$ splňující

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \subset (G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n).$$

Tedy $G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$, takže podle Věty 19.1 je $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ hustá. Podle Věty 19.6 je tudíž P Baireův. $\square$

Příklady. Dokažte, že

(a) $(0,1)$ je Baireův, ale není úplný,
(b) $(0,1) \cup \{2\}$ je Baireův,
(c) $(0,1) \cup (\mathbb{Q} \cap (2,3))$ je druhé kategorie, ale není Baireův,
(d) $(C([0,1]), \varrho_{\text{int}})$ není Baireův.

Poznámka. Pro neprázdný metrický prostor P platí

$$P \text{ je kompaktní } \Rightarrow P \text{ je úplný } \Rightarrow P \text{ je Baireův } \Rightarrow P \text{ je druhé kategorie,}$$

přičemž žádnou z implikací není možné obrátit.

konec 2. přednášky (20.2.2020)

Věta 19.8 (vnitřek podprostoru)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho lineární podprostor. Potom $\operatorname{Int} Y \neq \emptyset$ právě tehdy, když $X = Y$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že pro nějaká $y \in Y$ a $r > 0$ platí $B(y, r) \subset Y$. Zvolme $x \in X$ a položme $z = y + \frac{r}{2\|x\|}x$. Potom $z \in B(y, r)$, a tedy $z \in Y$. Protože $x = \frac{2\|x\|}{r}(z - y)$, plyne z linearity Y, že $x \in Y$. Tedy $X = Y$.
$\Leftarrow$ Tato implikace je zřejmá. $\square$

Věta 19.9 (algebraická dimenze Banachova prostoru)**.** *Nechť X je Banachův prostor. Potom je jeho algebraická dimenze buď konečná, nebo nespočetná.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\{x_n\}$ je spočetná nekonečná algebraická báze X. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $E_n = \operatorname{Lin}(\{x_1, \dots, x_n\})$. Potom $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je E_n uzavřená a podle Věty 19.8 platí $\operatorname{Int}(E_n) = \emptyset$. Z Věty 19.3 plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je E_n řídká, neboť $\operatorname{Int}(\overline{E_n}) = \operatorname{Int}(E_n) = \emptyset$. Odtud plyne, že X je první kategorie. Protože X je úplný, dostáváme díky Baireově větě (Věta 19.7) spor. $\square$

Poznámka. Nechť P je množina a $V(x)$, $x \in P$, je výroková forma. Chceme-li dokázat výrok $\exists\, x \in P \colon V(x)$, můžeme postupovat následujícím způsobem. Nalezneme na P metriku ϱ takovou, že (P, ϱ) je úplný a $\{x \in P,\ \neg V(x)\}$ je první kategorie. Tento postup je důležitým příkladem nekonstruktivní důkazové techniky a nazýváme jej *metoda kategorií.*

Věta 19.10 (existence spojité funkce bez derivace)**.** *Existuje funkce $f \in \mathcal{C}([0,1])$, která nemá v žádném bodě ani jednu vlastní jednostrannou derivaci.*

Důkaz. Položme

$$E^{+} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]); \exists x \in [0,1) \text{ takové, že existuje vlastní } f'_{+}(x)\}$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$E_n^{+} = \{f \in \mathcal{C}([0,1]); \exists x \in [0, 1 - \tfrac{1}{n}]\ \forall h \in (0, 1-x) : |f(x+h) - f(x)| \leq nh\}.$$

Potom $E^+ \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že E_n^+ je uzavřená. Předpokládejme, že $\{f_k\}$ je posloupnost prvků E_n^+ a $f \in \mathcal{C}([0,1])$ splňující $f_k \rightrightarrows f$ na $[0,1]$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $x_k \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ splňující $|f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| \leq nh$. Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty nalezneme podposloupnost $\{x_{k_j}\}$ posloupnosti $\{x_k\}$ a $x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ splňující $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x$. Zvolme $h \in (0, 1-x)$. Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x)| \leq{} & |f(x+h) - f(x_{k_j}+h)| + |f(x_{k_j}+h) - f_{k_j}(x_{k_j}+h)| \\ & + |f_{k_j}(x_{k_j}+h) - f_{k_j}(x_{k_j})| + |f_{k_j}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})| \\ & + |f(x_{k_j}) - f(x)|.\end{aligned}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné konvergenci f_k k f a díky spojitosti f k němu nalezneme $j_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, a pro každé $y \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ platí $|f_{k_j}(y) - f(y)| < \varepsilon$, $|f(x+h) - f(x_{k_j}+h)| < \varepsilon$ a $|f(x_{k_j}) - f(x)| < \varepsilon$. Kombinací odhadů dostaneme

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon + nh + \varepsilon + \varepsilon = nh + 4\varepsilon,$$

a tedy vzhledem k tomu, že ε bylo zvoleno libovolně

$$|f(x+h) - f(x)| \leq nh.$$

Odtud plyne, že $f \in E_n^+$, takže E_n^+ je uzavřená. Dokážeme, že E_n^+ je řídká. Vzhledem k uzavřenosti E_n^+ stačí dokázat, že $\mathcal{C}([0,1]) \setminus E_n^+$ je hustá. Zvolme $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme po částech lineární funkci φ na $[0,1]$ splňující $\|f - \varphi\| < \varepsilon$ a funkci „tvaru pily“ p v $\mathcal{C}([0,1])$ splňující $\|p\| < \varepsilon$ a

$$\forall x \in [0,1]\ \exists h \in (0, 1-x) : |p(x+h) - p(x)| > nh.$$

Položme $g = \varphi + p$. Potom $g \notin E_n^+$ a

$$\|f - g\| \leq \|f - \varphi\| + \|\varphi - g\| = \|f - \varphi\| + \|p\| < 2\varepsilon,$$

takže $\mathcal{C}([0,1]) \setminus E_n^+$ je hustá v $\mathcal{C}([0,1])$. Tedy E^+ je první kategorie. Obdobně lze dokázat, že i množina

$$E^- = \{f \in \mathcal{C}([0,1]); \exists x \in [0,1) \text{ takové, že existuje vlastní } f'_-(x)\}$$

je první kategorie, a tedy i $E^+ \cup E^-$ je první kategorie. Protože $(\mathcal{C}([0,1]), \varrho_{\sup})$ je úplný, plyne tvrzení z Baireovy věty. $\square$

Poznámka. Nechť $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $g(x) = |x|$ pro $x \in [-1,1]$ a g je 2-periodická na $\mathbb{R}$. Položme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g\left(4^n x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Potom f je spojitá a v žádném bodě nemá derivaci.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $f\colon P \to P$. Řekneme, že f je **kontrakce**, jestliže existuje $\gamma \in [0,1)$ takové, že pro každé $x, y \in P$ platí $\varrho(f(x), f(y)) \leq \gamma\varrho(x,y)$. Řekneme, že f je **neexpansivní**, jestliže pro každé $x, y \in P$, $x \neq y$, platí $\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x,y)$.

Poznámka. Každá kontrakce je neexpansivní. Funkce sin na $[0, \frac{\pi}{2}]$ je neexpansivní, ale není kontrakce. Každé neexpansivní zobrazení je lipschitzovské (s konstantou 1), a tedy spojité.

Definice. Nechť P je množina, $f\colon P \to P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je **pevný bod** f, jestliže $f(x) = x$.

Věta 19.11 (Banachova věta o kontrakci)**.** *Nechť (P, ϱ) je úplný neprázdný metrický prostor a $f\colon P \to P$ je kontrakce. Potom f má právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Necvť $\gamma \in [0, 1)$ splňuje $\varrho(f(x), f(y)) \le \gamma\varrho(x, y)$ pro každá $x, y \in P$. Zvolme $x_1 \in P$ a předpokládejme, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ máme určeny $x_1, \dots, x_n$. Položme $x_{n+1} = f(x_n)$. Takto definujeme posloupnost $\{x_n\}$ prvků P. Dokážeme matematickou indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\varrho(x_n, x_{n+1}) \le \gamma^{n-1}\varrho(x_1, x_2). \tag{1}$$

Pro $n = 1$ je nerovnost (1) zřejmá. Předpokládejme, že (1) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\varrho(x_{n+1}, x_{n+2}) = \varrho(f(x_n), f(x_{n+1})) \le \gamma\varrho(x_n, x_{n+1}) \le \gamma\gamma^{n-1}\varrho(x_1, x_2) = \gamma^n\varrho(x_1, x_2).$$

Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, platí

$$\begin{aligned}\varrho(x_n, x_m) &\le \varrho(x_n, x_{n+1}) + \varrho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \varrho(x_{m-1}, x_m)\\ &\le \left(\gamma^{n-1} + \gamma^n + \dots + \gamma^{m-2}\right)\varrho(x_1, x_2) \le \frac{\gamma^{n-1}}{1-\gamma}\varrho(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{\gamma^{n_0-1}}{1-\gamma}\varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \ge n_0$, platí

$$\varrho(x_n, x_m) \le \frac{\gamma^{n-1}}{1-\gamma}\varrho(x_1, x_2) \le \frac{\gamma^{n_0-1}}{1-\gamma}\varrho(x_1, x_2) < \varepsilon.$$

Tedy $\{x_n\}$ je cauchyovská. Díky úplnosti P nalezneme $x \in P$ splňující $\lim x_n = x$. Podle věty o limitě vybrané posloupnosti platí $\lim x_{n+1} = x$. Navíc pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\varrho(f(x_n), f(x)) \le \gamma\varrho(x_n, x)$, a tedy $\lim f(x_n) = f(x)$, neboť $\lim x_n = x$. Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f(x_n) = x_{n+1}$, plyne z věty o jednoznačnosti limity, že $f(x) = x$, takže x je pevný bod f. Dokážeme jeho jednoznačnost. Předpokládejme, že y je pevný bod f. Potom

$$\varrho(x, y) = \varrho(f(x), f(y)) \le \gamma\varrho(x, y).$$

Protože $\gamma < 1$, platí $\varrho(x, y) = 0$, a tedy $y = x$. □

konec 3. přednášky (24.2.2020)

Věta 19.12 (o pevném bodu neexpansivního zobrazení)**.** *Nechť (P, ϱ) je kompaktní neprázdný metrický prostor a $f\colon P \to P$ je neexpansivní. Potom f má právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Definujme zobrazení $g\colon P \to [0, \infty)$ předpisem

$$g(x) = \varrho(x, f(x)).$$

Zvolme $x, y \in P$. Potom buď $x = y$ nebo $\varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y)$, v každém případě platí $\varrho(f(x), f(y)) \leq \varrho(x, y)$, a tedy

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= \varrho(x, f(x)) - \varrho(y, f(y)) \\ &\leq \varrho(x, y) + \varrho(y, f(y)) + \varrho(f(y), f(x)) - \varrho(y, f(y)) \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(f(x), f(y)) \\ &\leq \varrho(x, y) + \varrho(x, y) = 2\varrho(x, y). \end{aligned}$$

Ze symetrie dostaneme $g(y) - g(x) \leq 2\varrho(x, y)$, a tedy $|g(x) - g(y)| \leq 2\varrho(x, y)$. Odtud plyne, že g je lipschitzovské, a tedy spojité na P, takže nabývá na P svého minima. Existuje tudíž bod $x_0 \in P$ takový, že pro všechna $y \in P$ platí $g(x_0) \leq g(y)$. Předpokládejme, že $g(x_0) > 0$. Potom $x_0 \neq f(x_0)$, a tedy

$$g(f(x_0)) = \varrho(f(x_0), f^2(x_0)) < \varrho(x_0, f(x_0)) = g(x_0),$$

což je spor s tím, že g nabývá minima v x_0. Tedy $g(x_0) = 0$, takže x_0 je pevný bod f. Dokážeme jeho jednoznačnost. Předpokládejme, že $x, y \in P$ jsou dva různé pevné body f. Potom $f(x) \neq f(y)$, a tedy

$$\varrho(x, y) = \varrho(f(x), f(y)) < \varrho(x, y),$$

což je spor. □

Věta 19.13 (o pevném bodu zobrazení, jehož mocnina je kontrakce)**.** *Nechť (P, ϱ) je úplný neprázdný metrický prostor a $f\colon P \to P$ je zobrazení, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že že f^n je kontrakce na P, kde $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n-krát). Potom f má právě jeden pevný bod.*

Důkaz. Podle Banachovy věty o kontrakci má f^n v P právě jeden pevný bod, označme jej x_0. Potom

$$f^n(f(x_0)) = f(f^n(x_0)) = f(x_0),$$

takže $f(x_0)$ je pevný bod f^n. Z jednoznačnosti pevného bodu plyne $f(x_0) = x_0$, a tedy x_0 je pevný bod f. Dokážeme jeho jednoznačnost. Předpokládejme, že y je pevný bod f. Dokážeme matematickou indukcí, že potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ je y pevný bod f^k. Pro $k = 1$ tvrzení platí. Nechť pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ je y pevný bod f^k. Potom

$$f^{k+1}(y) = f(f^k(y)) = f(y) = y.$$

Speciálně je tedy y pevný bod f^n. Z jednoznačnosti pevného bodu plyne $y = x_0$. □

19.2. **Separabilní prostory.**

Definice. Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá **separabilní**, jestliže existuje spočetná množina $A \subset P$, která je hustá v P.

Příklady. (a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ jsou separabilní,

(b) $(C([0, 1]), \varrho_{\sup})$ je separabilní,

(c) diskrétní prostor je separabilní právě tehdy, když je spočetný.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{B}$ je nějaký systém otevřených podmnožin P. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je **báze otevřených množin** P, jestliže pro každou otevřenou množinu G existuje $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ taková, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

Věta 19.14 (charakterisace separabilních prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Potom P je separabilní právě tehdy, když existuje spočetná báze otevřených množin P.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť D je spočetná hustá podmnožina P. Položme

$$\mathcal{B} = \{B(x, r); x \in D, \ r \in \mathbb{Q}, \ r > 0\}.$$

Potom $D \times \mathbb{Q}$ je spočetná. Definujme $F\colon D \times \mathbb{Q} \to \exp P$ předpisem $F(x, r) = B(x, r)$. Potom $F(D \times \mathbb{Q}) = \mathcal{B}$, a tedy $\mathcal{B}$ je spočetná. Prvky $\mathcal{B}$ jsou zřejmě otevřené množiny. Zvolme otevřenou množinu G a položme $\mathcal{B}^* = \{H \in \mathcal{B}; H \subset G\}$. Zřejmě platí $\bigcup \mathcal{B}^* \subset G$. Dokážeme opačnou inkluzi. Zvolme $x \in G$. K němu nalezneme $\varepsilon > 0$ splňující $B(x, \varepsilon) \subset G$. Díky hustotě D nalezneme $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{4}) \cap D$. Zvolme $r \in (\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}) \cap \mathbb{Q}$. Potom $\varrho(x, y) < r$, takže $x \in B(y, r)$. Pro každé $z \in B(y, r)$ platí

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a tedy $B(y, r) \subset B(x, \varepsilon) \subset G$. Odtud vyplývá, že $B(y, r) \in \mathcal{B}^*$, a tudíž $x \in \bigcup \mathcal{B}^*$. Platí tedy $G = \bigcup \mathcal{B}^*$, takže $\mathcal{B}$ je báze otevřených množin P.

$\Leftarrow$ Nechť $\mathcal{B} = \{G_n; n \in \mathbb{N}\}$ je spočetná báze neprázdných otevřených množin. Pro $n \in \mathbb{N}$ zvolme $x_n \in G_n$ a položme $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pak je D spočetná. Zvolme neprázdnou otevřenou množinu G. K ní nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $G_n \subset G$. Potom $x_n \in G$, a tedy $G \cap D \neq \emptyset$. Podle Věty 19.1 je D hustá. Tedy P je separabilní. $\square$

konec 4. přednášky (27.2.2020)

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je separabilní metrický prostor a $A \subset P$. Potom (A, ϱ) je separabilní.

Věta 19.15 (nutná podmínka separability)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Jestliže existují $A \subset P$ a $\delta > 0$ taková, že A je nespočetná a pro každá $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x, y) \geq \delta$, potom P není separabilní.*

Důkaz. Zvolme $D \subset P$ spočetnou. Protože $\{B(x, \frac{\delta}{2}); x \in A\}$ je nespočetný systém po dvou disjunktních koulí, existuje $x \in A$ splňující $B(x, \frac{\delta}{2}) \cap D = \emptyset$. Podle Věty 19.1 není D hustá, takže P není separabilní. $\square$

Definice. Označme

$$\ell^\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty, \ x_n \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}, \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

(prostor všech omezených posloupností reálných čísel) a

$$\|\{x_n\}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Označme dále

$$c_0 = \{\{x_n\}_{n=1} \in \ell^\infty, \ \lim x_n = 0\}$$

(prostor všech posloupností reálných čísel s nulovou limitou).

Poznámka. Prostory $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ jsou Banachovy.

Věta 19.16 (prostory ℓ^∞, c_0 a separabilita)**.** (a) *Prostor ℓ^∞ není separabilní.*

(b) *Prostor c_0 je separabilní.*

Důkaz. (a) Nechť $A, B \in \exp \mathbb{N}$, $A \neq B$. Potom

$$\|\chi_A - \chi_B\|_{\ell^\infty} = 1,$$

kde

$$(\chi_A)_j = \begin{cases} 1 & \text{pro } j \in A \\ 0 & \text{pro } j \notin A \end{cases}$$

Protože $\exp \mathbb{N}$ je nespočetná, plyne z Věty 19.15, že ℓ^∞ není separabilní. (b) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$D_n = \{\{x_j\}_{j=1}^\infty \in c_0; x_j \in \mathbb{Q} \text{ pro každé } j \in \mathbb{N} \text{ a } x_j = 0 \text{ pro každé } j > n\}$$

a

$$D = \bigcup_{n=1}^\infty D_n.$$

Potom D spočetná. Zvolme $\{y_j\}_{j=1}^\infty \in c_0$ a $\varepsilon > 0$. K nim nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|y_j| < \varepsilon$ pro každé $j > n_0$. Ke každému $j \in \{1, \dots, n_0\}$ nalezneme $r_j \in \mathbb{Q}$ splňující $|r_j - y_j| < \varepsilon$. Položme

$$x_j = \begin{cases} r_j & \text{pro } j \in \{1, \dots, n_0\}, \\ 0 & \text{pro } j > n_0. \end{cases}$$

Potom $\{x_j\}_{j=1}^\infty \in D_{n_0}$ a

$$\begin{aligned} \|\{x_j\}_{j=1}^\infty - \{y_j\}_{j=1}^\infty\|_{\ell^\infty} &= \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j - y_j| \\ &= \max\{\sup_{j \leq n_0} |x_j - y_j|, \sup_{j > n_0} |x_j - y_j|\} \\ &= \max\{\sup_{j \leq n_0} |r_j - y_j|, \sup_{j > n_0} |y_j|\} \\ &< \max\{\varepsilon, \varepsilon\} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy D je tedy hustá v c_0, takže c_0 je separabilní. □

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $\varepsilon > 0$ a $A \subset P$. Řekneme, že A je **ε-síť** v P, jestliže

$$\forall x \in P \; \exists y \in A : \varrho(x, y) < \varepsilon.$$

Řekneme, že P je **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť v P.

Věta 19.17 (totální omezenost a omezenost)**.** *Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P omezený.*

Důkaz. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_m \in P$ taková, že $\{x_1, \dots, x_m\}$ je konečná 1-síť v P. Označme $M = \max\{\varrho(x_i, x_j); i, j \in \{1, \dots, m\}\}$. Zvolme $x, y \in P$. K nim nalezneme $i, j \in \{1, \dots, m\}$, taková, že $\varrho(x, x_i) < 1$ a $\varrho(y, x_j) < 1$. Potom

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_i) + \varrho(x_i, x_j) + \varrho(x_j, y) < 1 + M + 1 = M + 2,$$

takže P je omezený. □

Věta 19.18 (totální omezenost a separabilita)**.** *Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P separabilní.*

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme konečnou $\frac{1}{n}$-síť A_n v P. Položme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Potom je A spočetná. Zvolme $x \in P$ a $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n} < \varepsilon$. K němu nalezneme $y \in A_n$ takové, že $\varrho(x, y) < \frac{1}{n}$. Potom $y \in A$ a platí $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Tedy A je hustá, takže P je separabilní. □

Příklad. Položme

$$A = \{f \in C([0, 1]), \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1\}.$$

Potom $(A, \varrho_{\sup})$ je omezený úplný separabilní metrický prostor, který není totálně omezený.

Věta 19.19 (kompaktnost a totální omezenost)**.** *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P totálně omezený.*

Důkaz. Předpokládejme, že P není totálně omezený. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou konečnou množinu $C \subset P$ je

$$P \setminus \bigcup_{x\in C} B(x, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Zvolme $x_1 \in P$ a předpokládejme, že máme zvoleny prvky $x_1, \ldots, x_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Potom $P \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$. Nechť $x_{n+1} \in P \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Potom pro každé $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$ platí $\varrho(x_j, x_k) \geq \varepsilon$, takže P není kompaktní. □

Důsledek. *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom je P separabilní.*

konec 5. přednášky (2.3.2020)

Věta 19.20 (kompaktnost, totální omezenost a úplnost)**.** *Metrický prostor je kompaktní právě tehdy, když je úplný a totálně omezený.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Tato implikace vyplývá z Vět 15.13 a 19.19.

$\Leftarrow$ Jestliže $P = \emptyset$, pak je kompaktní. Předpokládejme, že P je neprázdný a zvolme $\{x_n\} \subset P$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezneme konečnou $\frac{1}{k}$-síť D_k. Díky tomu, že D_1 je konečná, nalezneme $y_1 \in D_1$ takové, že

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in B(y_1, 1)\}$$

je nekonečná. Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ máme určeny prvky $y_1, \ldots, y_k$ a nekonečné množiny přirozených čísel $A_1, \ldots, A_k$. Díky tomu, že A_k je nekonečná a D_{k+1} je konečná, nalezneme $y_{k+1} \in D_{k+1}$ takové, že

$$A_{k+1} = \{n \in A_k; x_n \in B(y_{k+1}, \tfrac{1}{k+1})\}$$

je nekonečná. Potom $\{A_k\}$ je teleskopická posloupnost nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$. Nalezneme rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ splňující $n_k \in A_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$. Potom pro každá $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, $\ell \geq k_0$ platí $n_k, n_\ell \in A_{k_0}$, a tedy

$$\varrho(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \leq \varrho(x_{n_k}, y_{k_0}) + \varrho(y_{k_0}, x_{n_\ell}) < \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0} = \frac{2}{k_0} < \varepsilon.$$

Odtud plyne, že $\{x_{n_k}\}$ je cauchyovská, a tedy díky úplnosti P konvergentní, takže P je kompaktní. □

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor a $A \subset P$. Potom je (A, ϱ) totálně omezený.

Věta 19.21 (kompaktnost a otevřená pokrytí)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Potom P je kompaktní právě tehdy, když pro každý systém $\mathcal{G}$ otevřených množin splňující $P = \bigcup \mathcal{G}$ existuje konečný systém $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ takový, že $P = \bigcup \mathcal{G}^*$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $\mathcal{G}$ je systém otevřených množin takový, že $P = \bigcup \mathcal{G}$. Podle Důsledku je P separabilní, a tedy podle Věty 19.15 nalezneme spočetnou bázi $\mathcal{B}$ otevřených množin. Položme

$$\mathcal{S} = \{H \in \mathcal{B}; \exists G \in \mathcal{G} : H \subset G\}.$$

Potom $\mathcal{S}$ je spočetný systém otevřených množin. Označme $\mathcal{S} = \{H_n; n \in \mathbb{N}\}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $G_n \in \mathcal{G}$ splňující $H_n \subset G_n$. Z vlastností báze plyne, že $P = \bigcup H_n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $F_n = P \setminus \bigcup_{k=1}^n H_k$. Potom $\{F_n\}$ je teleskopická posloupnost uzavřených množin splňující

$$\bigcap F_n = P \setminus \bigcup H_n = \emptyset.$$

Díky Větě 15.12 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ splňující $F_n = \emptyset$. Potom $P = \bigcup_{k=1}^n H_k$, a tedy $P = \bigcup_{k=1}^n G_k$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že P není kompaktní. Potom podle Věty 15.12 nalezneme teleskopickou posloupnost $\{F_n\}$ uzavřených neprázdných množin splňující $\bigcap F_n = \emptyset$. Položme $\mathcal{G} = \{P \setminus F_n; n \in \mathbb{N}\}$. Potom $\mathcal{G}$ je systém otevřených množin splňující

$$\bigcup \mathcal{G} = \bigcup (P \setminus F_n) = P \setminus \bigcap F_n = P.$$

Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\bigcup_{n=1}^{m} (P \setminus F_n) = P \setminus \bigcap_{n=1}^{m} F_n = P \setminus F_m \neq P.$$

Tedy pro každý konečný systém $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{G}$ platí $\bigcup \mathcal{G}^* \neq P$. $\square$

19.3. **Souvislé prostory.**

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že P je **souvislý**, jestliže jej není možné zapsat ve tvaru sjednocení dvou disjunktních neprázdných otevřených množin. Řekneme, že A je **souvislá**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) souvislý.

Příklady. Dokažte, že

(a) v každém metrickém prostoru jsou prázdná množina a každá jednoprvková množina souvislé,

(b) podmnožina diskrétního prostoru je souvislá právě tehdy, když je prázdná, nebo jednoprvková,

(c) má-li souvislý metrický prostor více než jeden prvek, pak je nespočetný.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **obojetná**, jestliže je otevřená a uzavřená.

Příklady. Dokažte, že

(a) v každém metrickém prostoru (P, ϱ) jsou množiny $\emptyset$ a P obojetné,

(b) v metrickém prostoru $[0, 1] \cup (2, 3)$ jsou množiny $[0, 1]$ i $(2, 3)$ obojetné,

(c) každá podmnožina diskrétního prostoru je obojetná.

Věta 19.22 (charakterisace souvislých prostorů)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:*

(a) P *není souvislý,*

(b) *existují dvě uzavřené neprázdné disjunktní množiny* F_1, F_2 *splňující* $P = F_1 \cup F_2$*,*

(c) *existuje neprázdná obojetná množina* $H \subset P$ *splňující* $H \neq P$*,*

(d) *existuje spojité surjektivní zobrazení* $f: P \to (\{0,1\}, \varrho_{\mathrm{diskr}})$*.*

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ (b) Nechť $P = G_1 \cup G_2$, přičemž G_1 a G_2 jsou neprázdné, otevřené a disjunktní. Položme $F_1 = G_1$ a $F_2 = G_2$. Potom F_1 a F_2 mají požadované vlastnosti.

(b) $\Rightarrow$ (c) Položme $H = F_1$. Potom H má požadované vlastnosti.

(c) $\Rightarrow$ (d) Položme $f = \chi_H$. Potom $f^{-1}(\{0\}) = P \setminus H$ a $f^{-1}(\{1\}) = H$. Množiny $f^{-1}(\{0\})$ a $f^{-1}(\{1\})$ jsou neprázdné a otevřené, takže f je surjektivní a spojité.

(d) $\Rightarrow$ (a) Položme $G_1 = f^{-1}(\{0\})$ a $G_2 = f^{-1}(\{1\})$. Potom $P = G_1 \cup G_2$ a G_1, G_2 jsou disjunktní. Ze spojitosti f plyne, že G_1 a G_2 jsou otevřené. Ze surjektivity f plyne, že G_1 a G_2 jsou neprázdné. Tedy P není souvislý. $\square$

konec 6. přednášky (5.3.2020)

Věta 19.23 (spojitý obraz souvislého prostoru)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je souvislý metrický prostor,* (Q, σ) *je metrický prostor a* $f: P \to Q$ *je spojité. Potom* $f(P)$ *je souvislý.*

Důkaz. Předpokládejme, že $f(P)$ není souvislý. Nalezneme neprázdné otevřené disjunktní množiny $G_1, G_2 \subset Q$ splňující $f(P) = G_1 \cup G_2$. Potom $P = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$, přičemž $f^{-1}(G_1)$ a $f^{-1}(G_2)$ jsou neprázdné a disjunktní. Ze spojitosti f plyne, že $f^{-1}(G_1), f^{-1}(G_2)$ jsou otevřené, takže P není souvislý. $\square$

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $G \subset P$ je otevřená, $A \subset P$ a $G \cap A = \emptyset$. Potom $G \cap \overline{A} = \emptyset$.

Poznámka. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $A \subset M$. Potom A je otevřená (respektive uzavřená) v M právě tehdy, když existuje $B \subset P$ otevřená (respektive uzavřená) v P splňující $A = B \cap M$.

Věta 19.24 (souvislost uzávěru)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor,* $A \subset P$ *je souvislá a* $A \subset B \subset \overline{A}$*. Potom* B *je souvislá. Speciálně* $\bar{A}$ *je souvislá.*

Důkaz. Je-li B prázdná, nebo jednoprvková, potom je souvislá. Předpokládejme, že B má alespoň dva body. Zvolme neprázdné disjunktní množiny G_1, G_2 otevřené v B a $x \in G$. Potom $x \in \overline{A}$, a tedy nalezneme posloupnost $\{x_n\}$ prvků A splňující $x_n \to x$. Díky otevřenosti G nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n \in G_1$. Tedy $G_1 \cap A \neq \emptyset$. Obdobně lze dokázat, že $G_2 \cap A \neq \emptyset$. Množiny $G_1 \cap A$, $G_2 \cap A$ jsou disjunktní, neprázdné a otevřené v A. Protože A je souvislá, platí $A \setminus (G_1 \cup G_2) \neq \emptyset$. Tedy $B \setminus (G_1 \cup G_2) \neq \emptyset$, a tudíž B je souvislá. $\square$

Věta 19.25 (souvislost sjednocení)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor,* $I \neq \emptyset$ *a* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *jsou souvislé podmnožiny* P*. Označme* $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$*. Jestliže pro každá* $\alpha, \beta \in I$ *platí* $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$*, potom je* A *souvislá.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že pro každá $\alpha, \beta \in I$ je $A_\alpha \cup A_\beta$ souvislá. Zvolme $\alpha, \beta \in I$ a $x \in A_\alpha \cap A_\beta$. Zvolme G_1, G_2 disjunktní neprázdné otevřené v $A_\alpha \cup A_\beta$.

Předpokládejme, že $G_1 \cup G_2 = A_\alpha \cup A_\beta$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \in G_1$. Zvolme $y \in G_2$. Potom $y \in A_\alpha \cup A_\beta$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $y \in A_\alpha$. Potom $G_1 \cap A_\alpha$ a $G_2 \cap A_\alpha$ jsou neprázdné disjunktní a otevřené v A_α, a tedy A_α není souvislá, což je spor.

V obecném případě předpokládejme, že existují disjunktní neprázdné G_1, G_2 otevřené v A splňující $G_1 \cup G_2 = A$. Nalezneme $\alpha, \beta \in I$ (ne nutně různá) taková, že $G_1 \cap A_\alpha \neq \emptyset$ a $G_2 \cap A_\beta \neq \emptyset$. Označme $B = A_\alpha \cup A_\beta$. Potom B je podle předcházejícího kroku souvislá, ale $B \cap G_1$, $B \cap G_2$ jsou neprázdné, disjunktní a otevřené v B a platí $B = (B \cap G_1) \cup (B \cap G_2)$, což je spor. □

Příklad. Položme

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \sqrt{1-x^2}\,\right\},$$
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = -\sqrt{1-x^2}\,\right\}.$$

Dokažte, že A, B jsou souvislé a $A \cap B$ není souvislá.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množiny $A, B \subset P$ jsou **oddělené**, jestliže existují disjunktní otevřené množiny G_1, G_2 splňující $A \subset G_1$ a $B \subset G_2$.

Věta 19.26 (normalita metrických prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A, B \subset P$ jsou disjunktní uzavřené množiny. Potom A a B jsou oddělené.*

Důkaz. Ke každému $x \in A$ najdeme $\delta_x > 0$ takové, že $B(x, 2\delta_x) \cap B = \emptyset$ a ke každému $y \in B$ najdeme $\delta_y > 0$ takové, že $B(y, 2\delta_y) \cap A = \emptyset$. Položme

$$G_1 = \bigcup_{x \in E} B(x, \delta_x), \quad G_2 = \bigcup_{y \in F} B(y, \delta_y).$$

Potom G_1, G_2 jsou otevřené a platí $A \subset G_1$, $B \subset G_2$. Předpokládejme pro spor, že existuje $z \in G_1 \cap G_2$. K němu nalezneme $x \in A$ a $y \in B$ taková, že $\varrho(x,z) < \delta_x$ a $\varrho(y,z) < \delta_y$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\delta_x \leq \delta_y$. Potom

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y) \leq \delta_x + \delta_y \leq 2\delta_y,$$

tedy $x \in A \cap B(y, 2\varrho_y)$, což je spor. □

Věta 19.27 (charakterisace souvislých množin)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $M \subset P$. Potom M je nesouvislá právě tehdy, když existují disjunktní neprázdné oddělené množiny $A, B \subset M$ takové, že $A \cup B = M$.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Nalezneme disjunktní neprázdné množiny A, B otevřené v M takové, že $A \cup B = M$. Dále nalezneme otevřené množiny $U, V \subset P$ takové, že $A = M \cap U$ a $B = M \cap V$. Položme $Y = U \cup V$, $E = Y \setminus V$ a $F = Y \setminus U$. Potom E a F jsou disjunktní množiny uzavřené v Y, $A \subset E$ a $B \subset F$. Podle Věty 19.26 existují disjunktní $G, H \subset Y$ otevřené v Y takové, že $E \subset G$ a $F \subset H$, tedy $A \subset G$ a $B \subset H$. Tvrzení plyne z toho, že podle výše uvedené poznámky jsou G, H otevřené i v P.

$\Leftarrow$ Tato implikace je zřejmá. □

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je **komponenta** P, jestliže A je maximální souvislá podmnožina P.

Věta 19.28 (charakterisace komponent)**.** *Nechť (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor. Potom*

(a) *komponenty P jsou neprázdné a uzavřené,*

(b) *každý bod P je obsažen v některé komponentě,*

(c) *komponenty jsou disjunktní.*

Důkaz. (a) Jednoprvkové množiny jsou souvislé, a tedy prázdná množina nemůže být maximální. Nechť A je komponenta P. Potom je A souvislá, a tedy podle Věty 19.24 je $\overline{A}$ souvislá. Z maximality plyne, že $\overline{A} = A$, takže A je uzavřená.

(b)Zvolme $x \in P$ a položme

$$A = \bigcup\{B \subset P; B \text{ je souvislá a } x \in B\}.$$

Podle Věty 19.25 je A souvislá. Maximalita je zřejmá.

(c) Zvolme A a B komponenty P a předpokládejme, že $A \cap B \neq \emptyset$. Potom podle Věty 19.25 je $A \cup B$ souvislá. Z maximality plyne, že $A \cup B \subset A$ a $A \cup B \subset B$, takže $A = B$. $\square$

konec 7. přednášky (9.3.2020)

Věta 19.29 (souvislé podmnožiny $\mathbb{R}$)**.** *Množina $A \subset \mathbb{R}$ je souvislá právě tehdy, když je to interval.*

Důkaz. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, $a = \inf A$, $b = \sup A$. Nechť A není interval s krajními body a a b. Potom existuje $x \in (a, b) \setminus A$. Množiny $(-\infty, x) \cap A$ a $(x, \infty) \cap A$ jsou potom neprázdné, disjunktní a otevřené v A, tedy A není souvislá.

Nyní předpokládejme, že A je interval a pro spor, že není souvislá. Pak máme neprázdné disjunktní množiny G, H otevřené v A tak, že $G \cup H = A$. Zvolme $x \in G$, $y \in H$, můžeme předpokládat $x < y$. Položme

$$s = \sup\{t \in A \colon (x, t) \subset G\}.$$

Množina G obsahuje pravé okolí x a H obsahuje levé okolí y. Odtud vidíme $x < s < y$, tedy s je vnitřní bod A. Jestliže $s \in G$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $(s - \delta, s + \delta) \subset G$. Jestliže $s \in H$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $(s - \delta, s + \delta) \subset H$. V obou případech dostaneme spor s definicí s. $\square$

Důsledek. *Nechť f je spojité zobrazení intervalu I do metrického prostoru. Potom $f(I)$ je souvislá množina.*

Příklady. (a) Prostor $\mathbb{R}$ je souvislý.

(b) Prostor $[0, 1] \cup (2, 3)$ není souvislý a má dvě komponenty souvislosti.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je **křivkově souvislý**, jestliže pro každé $x, y \in P$ existuje spojité zobrazení $\gamma \colon [0, 1] \to (P, \varrho)$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Řekneme, že množina $A \subset P$ je **křivkově souvislá**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) křivkově souvislý.

Věta 19.30 (souvislost souvislosti s křivkovou souvislostí)**.** *Každý křivkově souvislý metrický prostor je souvislý.*

Důkaz. Nechť P je křivkově souvislý. Předpokládejme pro spor, že P je nesouvislý. Máme neprázdné disjunktní otevřené množiny $G, H \subset P$ tak, že $G \cup H = P$. Zvolme $x \in G$ a $y \in H$ a najděme $\gamma\colon [0,1] \to (P, \varrho)$ takovou, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Buď $A = \gamma([0,1])$. Potom A je spojitý obraz intervalu, tedy podle Vět 19.23 a 19.29 je A souvislá. Ale $A \cap G$ a $A \cap H$ jsou neprázdné disjunktní a otevřené v A, spor. $\square$

Příklady. (a) Graf spojité funkce na intervalu je křivkově souvislý.

(b) Podmnožina prostoru $\mathbb{R}^2$ definovaná jako graf funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0] \\ \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

je příkladem souvislého metrického prostoru, který není křivkově souvislý.

Poznámky. (a) Spojitý obraz křivkově souvislého metrického prostoru je křivkově souvislý.

(b) Uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislý.

(c) Sjednocení křivkově souvislých množin s neprázdným průnikem je křivkově souvislá množina.

Věta 19.31 (souvislost v NLP)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Potom*

(a) *Každá konvexní množina v X je křivkově souvislá.*

(b) *Každá souvislá otevřená podmnožina $G \subset X$ je křivkově souvislá.*

(c) *Nechť $G \subset X$ je otevřená. Potom komponenty G jsou otevřené v X.*

Důkaz. (a) Nechť $A \subset X$ je konvexní a $x, y \in A$. Položme $\gamma(t) = x + t(y - x)$, $t \in [0,1]$. Potom γ "parametrizuje" úsečku spojující x a y, tedy $\gamma([0,1]) \subset A$. Spojitost γ je zřejmá.

(b) Zvolme $x \in G$ a definujme H jako sjednocení všech otevřených křivkově souvislých podmnožin G obsahujících x. Podle předchozí poznámky (c) je H křivkově souvislá, stačí ukázat, že $H = G$. Zřejmě H je otevřená v G. Dokážeme ještě, že H je uzavřená v G. Nechť $y \in G \cap \overline{H}$. Najdeme otevřenou kouli $B \subset G$ se středem v y. Potom B je křivkově souvislá podle bodu (a). Z definice $\overline{H}$ najdeme $z \in B \cap H$. Potom libovolný bod $u \in B$ můžeme spojit křivkou s x, neboť u spojíme se z v B a z spojíme s x v H. Z maximality plyne $B \cup H \subset H$. Tím jsme dokázali $y \in H$ pro každé $y \in G \cap \overline{H}$, tedy H je uzavřená v G. Shrneme: H je neprázdná a obojetná v G, jelikož G je souvislý, máme $H = G$.

(c) Nechť H je komponenta G a $x \in H$. Najděme kouli $B \subset G$ se středem v x. Potom B je souvislá podle bodu (a) a Věty 19.30, $B \cup H$ je souvislá podle Věty 19.25, tedy z maximality $B \subset H$. Bod x má tedy okolí B ležící v H. $\square$

Věta 19.32 (struktura otevřených podmnožin $\mathbb{R}$)**.** *Je-li $G \subset \mathbb{R}$ otevřená, pak existuje spočetný disjunktní systém otevřených intervalů $\mathcal{I}$ takový, že $G = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$.*

Důkaz. Uvažujme systém všech komponent G. Tyto komponenty jsou otevřené podle Věty 19.31, intervaly podle Věty 19.29, disjunktní podle Věty 19.28(c).

$\square$

Věta 19.33 (aplikace souvislosti)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná souvislá otevřená množina a $f\colon G \to \mathbb{R}$ je zobrazení splňující $f'(x) = 0$ pro každé $x \in G$. Potom f je konstantní na G.*

Důkaz. Zvolme $x \in G$ a položme $H = \{y \in G\colon f(y) = f(x)\}$. Potom H je neprázdná, neboť obsahuje x. Dokážeme-li, že H je obojetná, máme ze souvislosti $H = G$, což dokazuje tvrzení. Uzavřenost H v G je zřejmá, zbývá otevřenost. Nechť $z \in H$ a B je otevřená koule se středem v z obsažená v G. Zvolme $y \in B$ a definujme funkci $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ předpisem $g(t) = f(z + t(y-z))$. Potom g je spojitá na $[0,1]$ a $g'(t) = f'(z + t(y-z))(y-z) = 0$ pro všechna $t \in (0,1)$. Tedy g je konstantní a tudíž $f(y) = g(1) = g(0) = f(z) = f(x)$. K danému $z \in H$ jsme našli jeho okolí B ležící v H, tedy H je otevřená. □

konec distanční 8. přednášky (12.3.2020)

20. Křivkový a plošný integrál

Lebesgueova míra je matematickým vyjádřením intuitivního pojmu objem (v dimenzi 3) nebo povrch (v dimenzi 2). Podobně chceme matematicky vyjádřit pojem délky nebo povrchu v dimenzi 3.

20.1. Hausdorffovy míry.

Značení. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Pro $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$, položme

$$\mathcal{H}^k(A,\delta) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_k(\operatorname{diam} A_j)^k;\quad A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \mathbb{R}^n,\ \operatorname{diam} A_j \le \delta\Big\}, \tag{2}$$

kde hodnota $\alpha_k \in (0,\infty)$ bude určena později. Položme dále

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup\big\{\mathcal{H}^k(A,\delta); \delta \in (0,\infty)\big\}.$$

Z definice infima vyplývá, že pro každé $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ splňující $0 < \delta_1 < \delta_2$ a každou $A \subset \mathbb{R}^n$ platí $\mathcal{H}^k(A,\delta_1) \ge \mathcal{H}^k(A,\delta_2)$. Funkce $\delta \mapsto \mathcal{H}^k(A,\delta)$ je tedy nerostoucí na $(0,\infty)$, a proto existuje limita $\lim_{\delta\to 0_+} \mathcal{H}^k(A,\delta)$, která se rovná $\mathcal{H}^k(A)$.

Věta 20.1 (Hausdorffova míra a vnější míra). *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$. Potom je $\mathcal{H}^k$ vnější míra na $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Pro každé $\delta > 0$ platí $\mathcal{H}^k(\emptyset,\delta) = 0$, a proto také $\mathcal{H}^k(\emptyset) = 0$. Pro každé $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$ platí podle definice $\mathcal{H}^k(A,\delta) \le \mathcal{H}^k(B,\delta)$. Odtud potom plyne $\mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(B)$.

K dokončení důkazu zbývá ověřit σ-subaditivitu $\mathcal{H}^k$. Nechť $M_i, i \in \mathbb{N}$, jsou podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ nalezneme množiny $A_{i,j} \subset \mathbb{R}^k, j \in \mathbb{N}$, takové, že

- $M_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$,
- $\operatorname{diam} A_{i,j} < \delta$,
- $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k(\operatorname{diam} A_{i,j})^k \le \mathcal{H}^k(M_i,\delta) + \varepsilon 2^{-i}$.

Potom

$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i, \delta\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_{i,j})^k$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\big(\mathcal{H}^k(M_i,\delta) + \varepsilon 2^{-i}\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i) + \varepsilon.$$

Odtud plyne

$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i) + \varepsilon,$$

a tedy také

$$\mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(M_i).$$

□

Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Množinovou funkci

$$A \mapsto \mathcal{H}^k(A), \quad A \subset \mathbb{R}^n,$$

nazýváme **k-dimenzionální vnější Hausdorffova míra** na $\mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množiny $A, B \subset P$ jsou **vzdálené**, jestliže splňují

$$\inf\{\varrho(x,y);\ x \in A, y \in B\} > 0.$$

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že vnější míra γ na P je **metrická**, jestliže pro každé dvě dvě vzdálené množiny $A, B \subset P$ platí $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) + \gamma(B)$.

Věta 20.2 (vlastnosti vnější Hausdorffovy míry)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$.*

(a) *Vnější míra $\mathcal{H}^k$ na $\mathbb{R}^n$ je metrická.*
(b) *Vnější míra $\mathcal{H}^k$ je translačně invariantní, tj. pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$ platí $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(A + x)$, kde symbol $A + x$ značí množinu $\{y + x; y \in A\}$.*

Důkaz. (a) Mějme množiny $A, B \subset \mathbb{R}^n$, které jsou vzdálené, tj. číslo $\delta_0 = \inf\{\varrho(x,y); x \in A, y \in B\}$ je kladné. Nechť $\delta \in (0, \delta_0)$. Pro každou množinu $M \subset A \cup B$ splňující $\operatorname{diam} M \leq \delta$, platí $M \subset A$ nebo $M \subset B$. Pokud by totiž M protínala množinu A i množinu B, musel by její diametr být větší než δ_0.

Odtud plyne

$$\mathcal{H}^k(A \cup B, \delta) = \mathcal{H}^k(A, \delta) + \mathcal{H}^k(B, \delta).$$

Limitním přechodem $\delta \to 0+$ dostaneme

$$\mathcal{H}^k(A \cup B) = \mathcal{H}^k(A) + \mathcal{H}^k(B).$$

(b) Zvolme $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Vzhledem k tomu, že pro každé $M \subset \mathbb{R}^n$ platí $\operatorname{diam}(M) = \operatorname{diam}(M+x)$, dostáváme také $\mathcal{H}^k(A+x, \delta) = \mathcal{H}^k(A, \delta)$ pro každé $\delta > 0$. Odtud plyne $\mathcal{H}^k(A + x) = \mathcal{H}^k(A)$. □

Věta 20.3 (metrická vnější míra a borelovské množiny)**.** *Nechť γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P, ϱ). Potom je každá borelovská podmnožina P γ-měřitelná.*

Důkaz. Systém γ-měřitelných množin tvoří σ-algebru. Stačí dokázat, že uzavřené množiny jsou γ-měřitelné, protože potom budou také všechny otevřené množiny γ-měřitelné, a tedy i všechny borelovské množiny budou γ-měřitelné. Nechť $F \subset P$ je uzavřená. Při ověřování γ-měřitelnosti množiny F je naším úkolem ukázat, že platí $\gamma(T) \geq \gamma(F \cap T) + \gamma(T \setminus F)$ pro libovolnou množinu $T \subset P$. Zvolme $T \subset P$. Můžeme předpokládat, že $\gamma(T) < \infty$, jinak dokazovaná nerovnost zřejmě platí. Označme

$$\begin{aligned} P_0 &= \bigl\{x \in T; \operatorname{dist}(x, F) \geq 1\bigr\} \quad \text{a} \\ P_j &= \bigl\{x \in T; \tfrac{1}{j+1} \leq \operatorname{dist}(x, F) < \tfrac{1}{j}\bigr\}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Platí $T \setminus F = \bigcup_{j=0}^{\infty} P_j$, neboť vzhledem k uzavřenosti F má každý prvek množiny $T \setminus F$ od F kladnou vzdálenost. Množiny P_j, P_i, kde $|j - i| > 1$, jsou vzdálené. Poněvadž je γ metrická, dostáváme pro každé $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vztahy

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m} \gamma(P_{2j}) &= \gamma\Bigl(\bigcup_{j=0}^{m} P_{2j}\Bigr) \leq \gamma(T), \\ \sum_{j=0}^{m} \gamma(P_{2j+1}) &= \gamma\Bigl(\bigcup_{j=0}^{m} P_{2j+1}\Bigr) \leq \gamma(T). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že řada $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma(P_j)$ je konvergentní. Odtud a ze σ-subaditivity γ plyne

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \gamma\Bigl(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Bigr) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma(P_j) = 0 \tag{3}$$

Pro každé $m \in \mathbb{N}$ jsou množiny $\bigcup_{j=0}^{m} P_j$ a $F \cap T$ vzdálené, takže pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} \gamma(T \setminus F) + \gamma(T \cap F) &= \gamma\Bigl(\bigcup_{j=0}^{\infty} P_j\Bigr) + \gamma(T \cap F) \\ &\leq \gamma\Bigl(\bigcup_{j=0}^{m} P_j\Bigr) + \gamma\Bigl(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Bigr) + \gamma(F \cap T) \\ &\leq \gamma\Bigl(\bigcup_{j=0}^{m} P_j \cup (F \cap T)\Bigr) + \gamma\Bigl(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Bigr) \\ &\leq \gamma(T) + \gamma\Bigl(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Bigr). \end{aligned} \tag{4}$$

Z (3) a (4) pak dostaneme dokazovanou nerovnost

$$\gamma(T \setminus F) + \gamma(F \cap T) \leq \lim_{m\to\infty} \Bigl(\gamma(T) + \gamma\Bigl(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} P_j\Bigr)\Bigr) = \gamma(T).$$

□

Důsledek (borelovské množiny a hausdorffovská měřitelnost)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, a $A \subset \mathbb{R}^n$ je borelovská množina. Potom je A $\mathcal{H}^k$-měřitelná.*

Lemma 20.4 (Hausdorffova míra k-rozměrné krychle)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Potom $0 < \mathcal{H}^k\bigl([0, 1)^k \times \{0\}^{n-k}\bigr) < \infty$.*

Důkaz. Označme $K = [0,1)^k \times \{0\}^{n-k}$. Nejprve ukážeme, že platí $\mathcal{H}^k(K) < \infty$. Zvolme $\delta > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{\sqrt{k}}{m} < \delta$. Označme $I(j) = \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right)$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$. Položme

$$K(j_1, \dots, j_k) = \prod_{i=1}^{k} I(j_i) \times \{0\}^{n-k}, \quad (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, m\}^k.$$

Potom platí $\operatorname{diam} K(j_1, \dots, j_k) = \frac{\sqrt{k}}{m} < \delta$ pro každé $(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, m\}^k$ a také

$$K = \bigcup \big\{ K(j_1, \dots, j_k); (j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, m\}^k \big\}.$$

Potom

$$\mathcal{H}^k(K, \delta) \le \alpha_k m^k \left(\frac{\sqrt{k}}{m} \right)^k = \alpha_k \big(\sqrt{k}\big)^k.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^k(K) \le \alpha_k \big(\sqrt{k}\big)^k < \infty$.

Nyní dokážeme $\mathcal{H}^k(K) > 0$. Nechť $\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení definované předpisem $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$. Pro $A \subset \mathbb{R}^n$ definujme $\mu(A) = \lambda^{k*}\big(\pi(A)\big)$. Pro každou množinu $A \subset \mathbb{R}^n$ platí $\mu(A) \le (\operatorname{diam} A)^k$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ je posloupnost množin taková, že $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = K$. Potom

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} A_j)^k \ge \alpha_k \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \ge \alpha_k \mu(K) = \alpha_k > 0.$$

Platí tedy $\mathcal{H}^k(K) > 0$. $\square$

Značení. Koeficient α_k zvolíme tak, aby $\mathcal{H}^k\big([0,1)^k \times \{0\}^{n-k}\big) = 1$.

Věta 20.5 (regularita Hausdorffovy míry)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, a $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom existuje borelovská množina $B \subset \mathbb{R}^n$ taková, že $A \subset B$ a $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.*

Důkaz. Pokud $\mathcal{H}^k(A) = \infty$, stačí položit $B = \mathbb{R}^n$. Pokud $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, nalezneme pro každé $j \in \mathbb{N}$ podle definice uzavřené množiny $C_i^j \subset \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{N}$, takové, že $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty C_i^j$, $\operatorname{diam} C_i^j < \frac{1}{j}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ a $\sum_{i=1}^\infty \alpha_k (\operatorname{diam} C_i^j)^k \le \mathcal{H}^k(A, \frac{1}{j}) + \frac{1}{j}$. Potom pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí, že $F_j = \bigcup_{i=1}^\infty C_i^j$ je množina typu F_σ splňující $\mathcal{H}^k\big(F_j, \frac{1}{j}\big) < \mathcal{H}^k\big(A, \frac{1}{j}\big) + \frac{1}{j}$. Položme $B = \bigcap_{j=1}^\infty F_j$. Množina B je typu $F_{\sigma\delta}$, a tedy je borelovská, přičemž splňuje $A \subset B$. Dále pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathcal{H}^k\big(A, \tfrac{1}{j}\big) \le \mathcal{H}^k\big(B, \tfrac{1}{j}\big) \le \mathcal{H}^k\big(F_j, \tfrac{1}{j}\big) < \mathcal{H}^k\big(A, \tfrac{1}{j}\big) + \frac{1}{j},$$

takže $\mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(B) \le \mathcal{H}^k(A)$, a tedy $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$. $\square$

Věta 20.6 (Hausdorffova míra a vnější Lebesgueova míra)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom $\mathcal{H}^n(A) = \lambda^{n*}(A)$.*

Důkaz. Pro $m \in \mathbb{N}$ označme $\mathcal{Q}_m$ systém všech množin tvaru

$$\prod_{i=1}^{n} \left[\tfrac{l_i}{2^m}, \tfrac{l_i+1}{2^m}\right), \quad l_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, n.$$

Dále označme $\mathcal{Q} = \bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{Q}_m$. Platí následující pozorování:

(a) Pro každé $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ platí $Q_1 \subset Q_2$ nebo $Q_2 \subset Q_1$ nebo $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.
(b) Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí $\bigcup \mathcal{Q}_m = \mathbb{R}^n$.

Platí také $\mathcal{H}^n\big([0,1)^n\big) = \lambda^{n*}\big([0,1)^n\big) = 1$. Z translační invariantnosti $\mathcal{H}^n$ (Věta 20.2) a translační invariantnosti λ^{n*} obdržíme rovnost $\mathcal{H}^n(Q) = \lambda^{n*}(Q)$, kde $Q \in \mathcal{Q}$.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Potom lze G zapsat jako spočetné disjunktní sjednocení množin z $\mathcal{Q}$. To odvodíme následujícím způsobem. Položme $\mathcal{S} = \{Q \in \mathcal{Q}; Q \subset G\}$. Zřejmě platí $\bigcup \mathcal{S} \subset G$. Pokud $x \in G$, potom existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) > \sqrt{n}\frac{1}{2^m}$, neboť množina G je otevřená. Potom stačí nalézt množinu $Q \in \mathcal{Q}_m$, která obsahuje bod x. Poněvadž $\operatorname{diam} Q = \sqrt{n}\frac{1}{2^m} < \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)$, máme $x \in Q \subset G$. Odtud plyne $G \subset \bigcup \mathcal{S}$.

Pro každou $Q \in \mathcal{S}$ nalezneme $M(Q) \in \mathcal{S}$, která je maximální vzhledem k inkluzi a splňuje $Q \subset M(Q)$. Taková množina $M(Q)$ existuje díky vlastnostem $\mathcal{Q}$. Označme $\mathcal{S}^* = \{M(Q); Q \in \mathcal{S}\}$. Potom $\bigcup \mathcal{S}^* = G$ a $\mathcal{S}^*$ je disjunktní. První vlastnost je zřejmá, neboť pro každé $Q \in \mathcal{S}$ máme $Q \subset M(Q) \in \mathcal{S}^*$. Ověřme druhou vlastnost. Pokud $M(Q_1) \cap M(Q_2) = \emptyset$, potom platí $M(Q_1) \subset M(Q_2)$ nebo $M(Q_2) \subset M(Q_1)$. Z maximality potom dostáváme $M(Q_1) = M(Q_2)$.

Nyní můžeme psát

$$\mathcal{H}^n(G) = \sum_{Q \in \mathcal{S}^*} \mathcal{H}^n(Q) = \sum_{Q \in \mathcal{S}^*} \lambda^{n*}(Q) = \lambda^n(G) = \lambda^{n*}(G).$$

Označme $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin $\mathbb{R}^n$. Systém $\mathcal{G}$ je uzavřený na konečné průniky. Potom platí $\mathcal{H}^n = \lambda^n$ na borelovských množinách.

Nechť nyní $A \subset \mathbb{R}^n$. Pomocí Věty 20.5 a díky regularitě Lebesgueovy míry nalezneme borelovské množiny $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^n$ splňující $A \subset B_1$, $A \subset B_2$ a $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n(B_1)$, $\lambda^{n*}(A) = \lambda^n(B_2)$. Položme $B = B_1 \cap B_2$. Potom

$$\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n(B) = \lambda^n(B) = \lambda^{n*}(A).$$

□

Věta 20.7 (vlastnosti Hausdorffovy míry)**.**

(a) *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $Q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je izometrie a $A \subset \mathbb{R}^k$. Potom $\mathcal{H}^k\big(Q(A)\big) = \lambda^{k*}(A)$.*

(b) *Nechť $k, n, m \in \mathbb{N}$, $k \leq n, k \leq m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ je β-lipschitzovské. Potom*

$$\mathcal{H}^k\big(f(A)\big) \leq \beta^k \mathcal{H}^k(A).$$

(c) *Nechť $k_1, k_2, n \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2 \leq n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ a platí $\mathcal{H}^{k_1}(A) < \infty$. Potom $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$.*

Důkaz. (a) Nechť $\delta > 0$. Vezměme množiny $A_j, j \in \mathbb{N}$ splňující $A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ a $\operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Potom platí $\operatorname{diam} Q(A_j) = \operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Dále platí $Q(A) \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q(A_j)$ a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big(\operatorname{diam} Q(A_j)\big)^k = \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_j)^k.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^k(Q(A), \delta) \leq \mathcal{H}^k(A, \delta)$. Poslední nerovnost platí pro libovolné $\delta > 0$, a tedy $\mathcal{H}^k\big(Q(A)\big) \leq \mathcal{H}^k(A)$.

Nechť opět $\delta > 0$. Vezměme množiny $C_j, j \in \mathbb{N}$ splňující $Q(A) \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j$ a $\operatorname{diam} C_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Položme $A_j = Q^{-1}(Q(A) \cap C_j), j \in \mathbb{N}$. Potom platí

$\operatorname{diam} A_j \le \operatorname{diam} C_j < \delta$ a $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Odtud plyne

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_j)^k \le \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} C_j)^k.$$

Podobně jako v předchozí části důkazu dostáváme $\mathcal{H}^k(A,\delta) \le \mathcal{H}^k(Q(A),\delta)$ a $\mathcal{H}^k(A) \le \mathcal{H}^k(Q(A))$. Tím je důkaz proveden.

(b) Zvolme $\delta > 0$. Nechť dále množiny $A_j, j \in \mathbb{N}$, splňují $A \subset \bigcup_{j-1}^{\infty} A_j$ a $\operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Položme $B_j = f(A \cap A_j), j \in \mathbb{N}$. Potom platí $f(A) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ a $\operatorname{diam} B_j \le \beta \operatorname{diam}(A \cap A_j) \le \beta \operatorname{diam} A_j \le \beta\delta$. Potom platí

$$\mathcal{H}^k(f(A), \beta\delta) \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k (\operatorname{diam} B_j)^k \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_k \beta^k (\operatorname{diam} A_j)^k.$$

Odtud plyne $\mathcal{H}^k(f(A),\beta\delta) \le \beta^k \mathcal{H}^k(A,\delta)$. Limitním přechodem $\delta \to 0+$, pak dostáváme $\mathcal{H}^k(f(A)) \le \beta^k \mathcal{H}^k(A)$.

(c) Zvolme $\delta > 0$. Nechť dále množiny $A_j, j \in \mathbb{N}$, splňují $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ a $\operatorname{diam} A_j < \delta$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\mathcal{H}^{k_2}(A,\delta) \le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{k_2} (\operatorname{diam} A_j)^{k_2} \le \frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_{k_1}} \delta^{k_2 - k_1} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{k_1} (\operatorname{diam} A_j)^{k_1}.$$

Z předchozích nerovností plyne

$$\mathcal{H}^{k_2}(A,\delta) \le \frac{\alpha_{k_2}}{\alpha_{k_1}} \delta^{k_2-k_1} \mathcal{H}^{k_1}(A,\delta).$$

Pak máme $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$. □

Lemma 20.8 (Hausdorffova míra obrazu)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, a $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou λ^k-měřitelnou množinu $A \subset \mathbb{R}^k$ platí*

$$\mathcal{H}^k\big(L(A)\big) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A). \tag{5}$$

Důkaz. Zobrazení L je lineární a prosté, a proto je dimenze vektorového prostoru $L(\mathbb{R}^k)$ rovna k. Existuje tedy lineární izometrie $Q\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ taková, že $Q(\mathbb{R}^k) = L(\mathbb{R}^k)$. Potom platí

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k\big(L(A)\big) &= \mathcal{H}^k(Q^{-1} \circ L(A)) = \lambda^k\big(Q^{-1} \circ L(A)\big) \\ &= |\det(Q^{-1}L)| \cdot \lambda^k(A). \end{aligned} \tag{6}$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \big(\det(Q^{-1}L)\big)^2 &= \det\big((Q^{-1}L)^T Q^{-1}L\big) \\ &= \det\Big(\big(\langle Q^{-1}Le_i, Q^{-1}Le_j\rangle\big)_{i,j=1}^k\Big) \\ &= \det\Big(\big(\langle Le_i, Le_j\rangle\big)_{i,j=1}^k\Big) = \det(L^T L). \end{aligned} \tag{7}$$

Dokazovaná rovnost (5) nyní plyne z (6) a (7). □

Značení. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, a $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení. Budeme značit $\operatorname{vol} L = \sqrt{\det L^T L}$.

Poznámka. (a) Symbol vol je zvolen podle anglického slova **volume**, které znamená objem. Matice $L^T L$ se nazývá **Gramova matice**. Podle Lemmatu 20.8 platí rovnost $\mathcal{H}^k\bigl(L([0,1]^k)\bigr) = \operatorname{vol} L$, takže číslo $\operatorname{vol} L$ vyjadřuje k-dimenzionální objem rovnoběžnostěnu $L\bigl([0,1]^k\bigr)$. Je-li $\varphi \in \mathcal{C}^1(G)$, pak je zobrazení $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$ spojité na množině G.

(b) Je-li L matice typu $n \times k$, potom je matice $L^T L$ symetrická matice typu $k \times k$.

(c) Gramův determinant je nezáporný, neboť pro každou matici A typu $n \times k$ a každé $x \in \mathbb{R}^k$ platí $(A^T Ax, x) = (Ax, Ax) \geq 0$. Gramův determinant je kladný, jestliže má navíc L hodnost k.

Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že φ je **regulární** na G, jestliže je třídy $\mathcal{C}^1$ na G a $\varphi'(x)$ je prosté pro každé $x \in G$.

Lemma 20.9 (β-lipschitzovskost)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\beta > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že*

(a) *zobrazení $y \mapsto \varphi\bigl(\varphi'(x)^{-1}(y)\bigr)$ je β-lipschitzovské na $\varphi'(x)(V)$,*
(b) *zobrazení $z \mapsto \varphi'(x)\bigl(\varphi^{-1}(z)\bigr)$ je β-lipschitzovské na $\varphi(V)$.*

Důkaz. Před vlastním důkazem tvrzení (a) a (b) odvodíme několik pomocných nerovností. Lineární zobrazení $v \mapsto \varphi'(x)(v)$ je prosté, a proto existuje $\eta > 0$ takové, že

$$\forall v \in \mathbb{R}^k\colon \|\varphi'(x)(v)\| \geq \eta\|v\|. \tag{8}$$

Stačí položit $\eta = \inf\bigl\{\|\varphi'(x)(v)\|; v \in \mathbb{R}^k, \|v\| = 1\bigr\}$. Zobrazení $v \mapsto \varphi'(x)(v)$ je spojité a jednotková sféra $\{v \in \mathbb{R}^k; \|v\| = 1\}$ je kompaktní množina, proto se infima nabývá v jistém bodě v_0. Poněvadž $\varphi'(x)(v_0) \neq 0$, je η kladné.

Nalezneme $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\eta)$ takové, že

$$\frac{2\varepsilon}{\eta} + 1 < \beta. \tag{9}$$

Dále nalezneme okolí V bodu x takové, že

$$\forall y \in V\colon \|\varphi'(y) - \varphi'(x)\| \leq \varepsilon.$$

Ukážeme, že potom pro každé $u, v \in V$ platí

$$\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| \leq \varepsilon\|u - v\|. \tag{10}$$

Pro pevné $v \in V$ uvažujme zobrazení

$$g\colon w \mapsto \varphi(w) - \varphi(v) - \varphi'(x)(w - v), \quad w \in V.$$

Pro $w \in V$ máme $g'(w) = \varphi'(w) - \varphi'(x)$. Pak platí

$$\begin{aligned}\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u - v)\| &= \|g(u) - g(v)\| \\ &\leq \sup\{\|g'(w)\|; w \in V\} \cdot \|u - v\| \\ &\leq \varepsilon\|u - v\|,\end{aligned}$$

což dokazuje (10).

Dále ukážeme, že pro každé $u, v \in V$ platí

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\| \geq \frac{1}{2}\eta\|u - v\|. \tag{11}$$

Pro $u, v \in V$ počítejme

$$\begin{aligned} \|\varphi(u) - \varphi(v)\| &\geq -\|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u-v)\| + \|\varphi'(x)(u-v)\| \\ &\geq -\varepsilon\|u-v\| + \eta\|u-v\| \geq \frac{1}{2}\eta\|u-v\|, \end{aligned}$$

tím je vztah (11) dokázán.

(a) Zvolme $a, b \in \varphi'(x)(V)$. K nim nalezneme $u, v \in V$ taková, že $\varphi'(x)(u) = a$, $\varphi'(x)(v) = b$. Počítejme

$$\begin{aligned} \|\varphi\big(\varphi'(x)^{-1}(a)\big) - \varphi\big(\varphi'(x)^{-1}(b)\big)\| &= \|\varphi(u) - \varphi(v)\| \\ &\leq \|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u-v)\| + \|\varphi'(x)(u-v)\| \\ &\overset{(10)}{\leq} \varepsilon\|u-v\| + \|\varphi'(x)(u-v)\| \\ &\overset{(8)}{\leq} \frac{\varepsilon}{\eta}\|a-b\| + \|a-b\| = \big(\tfrac{\varepsilon}{\eta} + 1\big)\|a-b\| \\ &\overset{(9)}{\leq} \beta\|a-b\|. \end{aligned}$$

(b) Zvolme $p, q \in \varphi(V)$. K nim nalezneme $u, v \in V$ takové, že $\varphi(u) = p$, $\varphi(v) = q$. Počítejme

$$\begin{aligned} \|\varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(p)\big) - \varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(q)\big)\| &= \|\varphi'(x)(u) - \varphi'(x)(v)\| \\ &= \|\varphi'(x)(u-v)\| \\ &\leq \|\varphi(u) - \varphi(v) - \varphi'(x)(u-v)\| + \|\varphi(u) - \varphi(v)\| \\ &\overset{(10)}{\leq} \varepsilon\|u-v\| + \|p-q\| \\ &\overset{(11)}{\leq} \tfrac{2\varepsilon}{\eta}\|\varphi(u) - \varphi(v)\| + \|p-q\| = (\tfrac{2\varepsilon}{\eta} + 1)\|p-q\| \\ &\overset{(9)}{\leq} \beta\|p-q\|. \end{aligned}$$

Tím je i druhé tvrzení lemmatu dokázáno. □

Lemma 20.10 (odhady Hausdorffovy míry obrazu)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\alpha > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že pro každou λ^k-měřitelnou $E \subset V$ platí*

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k\big(\varphi(E)\big) \leq \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

Důkaz. Nalezneme $\beta > 1$ a $\tau > 1$ taková, že

$$\beta^k \tau < \alpha. \tag{12}$$

Podle Lemmatu 20.9 nalezneme okolí V_1 bodu x takové, že pro φ a β platí (a) i (b) v uvedeném lemmatu. Díky spojitosti zobrazení $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$ na množině G nalezneme okolí V_2 bodu x takové, že platí

$$\forall t \in V_2\colon \tau^{-1} \operatorname{vol} \varphi'(x) \leq \operatorname{vol} \varphi'(t) \leq \tau \operatorname{vol} \varphi'(x). \tag{13}$$

Položme $V = V_1 \cap V_2$. Ukážeme, že V je hledaným okolím.

Nechť $E \subset V$ je λ^k-měřitelná. Potom díky (13) dostáváme

$$\tau^{-1} \operatorname{vol} \varphi'(x) \lambda^k(E) \leq \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \tau \operatorname{vol} \varphi'(x) \lambda^k(E). \tag{14}$$

Podle Lemmatu 20.8 máme $\operatorname{vol}\varphi'(x)\lambda^k(E) = \mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big)$, a tedy můžeme psát

$$\tau^{-1}\mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big) \le \int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,d\lambda^k(t) \le \tau\mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big). \tag{15}$$

Dále díky Lemmatu 20.9(a) a volbě okolí V_1 dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k\big(\varphi(E)\big) &= \mathcal{H}^k\big(\varphi\circ\varphi'(x)^{-1}\circ\varphi'(x)(E)\big) \le \beta^k\mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big)\\ &\overset{(15)}{\le} \beta^k\tau\int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,d\lambda^k(t) \overset{(12)}{\le} \alpha\int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,d\lambda^k(t).\end{aligned}$$

Podobně díky Lemmatu 20.9(b) a volbě okolí V_1 dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k\big((\varphi(E)\big) &\ge \beta^{-k}\mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)\circ\varphi^{-1}\circ\varphi(E)\big) = \beta^{-k}\mathcal{H}^k\big(\varphi'(x)(E)\big)\\ &\overset{(15)}{\ge} \beta^{-k}\tau^{-1}\int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,d\lambda^k(t) \overset{(12)}{\ge} \alpha^{-1}\int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,d\lambda^k(t).\end{aligned}$$

□

Věta 20.11 (area formule)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \le n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení a $f\colon \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je borelovská. Potom platí*

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\,d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t))\operatorname{vol}\varphi'(t)\,d\lambda^k(t),$$

pokud integrál na pravé straně konverguje.

Důkaz. Zobrazení φ je prosté, a proto existuje inverzní zobrazení φ^{-1}. Nejprve učiníme pozorování ohledně měřitelnosti tohoto zobrazení. Každá otevřená množina $H \subset G$ je spočetným sjednocením kompaktních množin, proto také $\varphi(H)$ je spočetným sjednocením kompaktních množin. Dostáváme tedy, že zobrazení φ^{-1} je borelovské. Množina $\varphi(G)$ je tedy borelovská.

Důkaz věty rozdělíme do několika kroků. Postupně budeme dokazovat area formuli pro stále obecnější zobrazení f.

1. Předpokládejme, že $f = \chi_L$, kde $L \subset \varphi(G)$ je borelovská. Ukážeme, že platí

$$\mathcal{H}^k(L) = \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol}\varphi'(t)\,d\lambda^k(t). \tag{16}$$

Zvolme $\alpha > 1$. Podle Lemmatu 20.10 nalezneme pro každé $y \in G$ okolí $V_y \subset G$ bodu y takové, že pro každou λ^k-měřitelnou množinu $E \subset V_y$ platí

$$\alpha^{-1}\int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,d\lambda^k(t) \le \mathcal{H}^k(\varphi(E)) \le \alpha\int_E \operatorname{vol}\varphi'(t)\,d\lambda^k(t). \tag{17}$$

Platí $\bigcup\{V_y; y \in G\} = G$. Prostor $\mathbb{R}^n$ je separabilní, a proto můžeme nalézt posloupnost $\{y_j\}$ prvků množiny G takovou, že platí $\bigcup_{j=1}^\infty V_{y_j} = G$. Položme

$$A_j = \varphi^{-1}(L) \cap \Big(V_{y_j} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_{y_i}\Big).$$

Potom platí

(a) množina A_j je borelovská pro každé $j \in \mathbb{N}$,
(b) $A_j \subset V_{y_j}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$,
(c) $\forall j, j' \in \mathbb{N}, j \ne j'\colon A_j \cap A_{j'} = \emptyset$,
(d) $\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \varphi^{-1}(L)$,

(e) pro každé $j \in \mathbb{N}$ máme

$$\alpha^{-1} \int_{A_j} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \le \mathcal{H}^k\big(\varphi(A_j)\big) \le \alpha \int_{A_j} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t),$$

(f) pro každé $j \in N$ je množina $\varphi(A_j)$ borelovská.

Z (a) a (c)–(e) plyne

$$\alpha^{-1} \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \le \mathcal{H}^k\big(\varphi(\varphi^{-1}(L))\big) \le \alpha \int_{\varphi^{-1}(L)} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

Vzhledem k tomu, že α bylo voleno libovolně, dostáváme (16).

2. Předpokládejme, že f je nezáporná jednoduchá borelovská funkce, tj. $f = \sum_{j=1}^{p} c_j \chi_{L_j}$, kde $L_j \subset \varphi(G)$ je borelovská a $c_j \ge 0$, $j = 1, \dots, p$. Potom podle (16) platí

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) &= \sum_{j=1}^{p} c_j \mathcal{H}^k(L_j) = \sum_{j=1}^{p} c_j \int_{\varphi^{-1}(L_j)} \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \\
&= \sum_{j=1}^{p} c_j \int_G \chi_{L_j} \circ \varphi(t) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \\
&= \int_G f \circ \varphi(t) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).
\end{aligned} \tag{18}$$

3. Nechť f je nezáporná borelovská funkce. Nalezneme nezáporné jednoduché borelovské funkce $f_j \colon \varphi(G) \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, takové, že $f_j \to f$ a $f_j \le f_{j+1}$. Potom podle Leviho věty dostáváme

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\varphi(G)} f_j(x)\, d\mathcal{H}^k(t) = \int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x),$$
$$\lim_{j\to\infty} \int_G f_j(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) = \int_G f(\varphi'(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

Poněvadž podle bodu 2 platí pro každé $j \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\int_{\varphi(G)} f_j(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f_j(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t)$$

dostáváme rovnost

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

4. Nechť f je borelovská funkce a integrál $\int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t)$ konverguje. Položme $f^+ = \max\{f, 0\}$ a $f^- = \max\{-f, 0\}$. Potom podle bodu 3 platí

$$\int_{\varphi(G)} f^+(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f^+(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t). \tag{19}$$

Poslední integrál je roven $\int_G (f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t))^+\, d\lambda^k(t)$, a je tedy podle předpokladu konečný. Podobně dostáváme

$$\int_{\varphi(G)} f^-(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G (f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t))^-\, d\lambda^k(t), \tag{20}$$

přičemž poslední integrál je opět konečný. Odtud tedy plyne

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

□

Poznámka. Area formule platí i v případě, kdy je zobrazení φ lokálně lipschitzovské.

konec distanční 11. přednášky (23.3.2020)

Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$, G je otevřená množina v $\mathbb{R}$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Potom pro každé $t \in G$

$$\operatorname{vol} \varphi'(t) = \|\varphi'(t)\| \quad \text{pro každé } t \in G. \tag{21}$$

Pro $k = 1$ lze tedy area formuli přepsat ve tvaru

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^1(x) = \int_G f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\|\, dt,$$

kde $f\colon \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je borelovská.

20.2. **Vektorový součin.**

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$. **Vektorový součin** $u^1, \dots, u^{n-1}$ definujeme předpisem

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \bigl(\det(e^i, u^1, \dots, u^{n-1})\bigr)_{i=1}^n, \quad \text{je-li } n \geq 3,$$

a

$$u^1 \times = (u^1_2, -u^1_1), \quad \text{je-li } n = 2.$$

Poznámka. Výsledkem vektorového součinu $(n-1)$-tice n-rozměrných vektorů je opět n-rozměrný vektor.

Věta 20.12 (vlastnosti vektorového součinu)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbb{R}^n$.*

(a) *Pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ platí*
$$\langle v, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = \det(v, u^1, \dots, u^{n-1}).$$
(b) *Vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když $u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = o$.*
(c) *Pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$ platí $\langle u^i, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = 0$.*
(d) *Platí* $\operatorname{vol}(u^1, \dots, u^{n-1}) = \|u^1 \times \cdots \times u^{n-1}\|$.

Důkaz. (a) Zvolme $v \in \mathbb{R}^n$. Potom podle definice skalárního a vektorového součinu a podle známých principů lineární algebry dostaneme

$$\begin{aligned}\langle v, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle &= \sum_{i=1}^n v_i \det(e^i, u^1, \dots, u^{n-1}) = \sum_{i=1}^n \det(v_i e^i, u^1, \dots, u^{n-1}) \\ &= \det(v, u^1, \dots, u^{n-1}).\end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ Tato implikace zřejmě platí.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že $u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = o$. Podle (a) je pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ matice $(v, u^1, \dots, u^{n-1})$ singulární. Odtud plyne, že $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně závislé.

(c) Tvrzení bezprostředně plyne z (a).

(d) Označme $w = u^1 \times \cdots \times u^{n-1}$. Jestliže $w = o$, potom jsou dle (b) $u^1, \dots, u^{n-1}$ lineárně závislé, a tedy $\operatorname{vol}(u^1, \dots, u^{n-1}) = 0$. Předpokládejme, že $w \neq o$. Potom podle (c) a (a) platí

$$
\begin{aligned}
\operatorname{vol}(u^1, \dots, u^{n-1})^2 &= \det\Big(\big(\langle u^i, u^j\rangle\big)_{i,j=1}^{n-1}\Big) \\
&= \frac{1}{\|w\|^2} \det \begin{pmatrix} \langle w, w\rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle u^1, u^1\rangle & \dots & \langle u^1, u^{n-1}\rangle \\ 0 & \langle u^2, u^1\rangle & \dots & \langle u^2, u^{n-1}\rangle \\ 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \langle u^{n-1}, u^1\rangle & \dots & \langle u^{n-1}, u^{n-1}\rangle \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\|w\|^2} \det\big((w, u^1, \dots, u^{n-1})^T \cdot (w, u^1, \dots, u^{n-1})\big) \\
&= \frac{1}{\|w\|^2} \det(w, u^1, \dots, u^{n-1})^2 \\
&= \frac{1}{\|w\|^2} \langle w, u^1 \times \cdots \times u^{n-1}\rangle^2 \\
&= \frac{\|w\|^4}{\|w\|^2} = \|w\|^2.
\end{aligned}
$$

Tvrzení tedy plyne z toho, že $\operatorname{vol}(u^1, \dots, u^{n-1}) \geq 0$. $\square$

konec distanční 12. přednášky (26.3.2020)

Poznámky. (a) Vektorový součin je podle Věty 20.12(c) kolmý na každého ze svých činitelů.

(b) Podle Věty 20.12(b) při liché permutaci činitelů změní vektorový součin znaménko a při sudé zůstane nezměněn.

(c) V dimenzi 3 je vektorovým součin binární operace. Pro každá $u, v \in \mathbb{R}^3$ platí

$$
u \times v = \left(\det \begin{pmatrix} u_2, & v_2 \\ u_3, & v_3 \end{pmatrix}, \ -\det \begin{pmatrix} u_1, & v_1 \\ u_3, & v_3 \end{pmatrix}, \ \det \begin{pmatrix} u_1, & v_1 \\ u_2, & v_2 \end{pmatrix} \right)
$$

a $u \times v = -v \times u$.

(d) V dimenzi 2 je vektorový součin unární operace (má jen jednoho činitele).

Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, G je otevřená množina v $\mathbb{R}^{n-1}$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Podle Věty 20.12(d) platí pro každé $t \in G$

$$
\operatorname{vol} \varphi'(t) = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) \right\|. \tag{22}
$$

Pro $k = n - 1$ lze tedy area formuli přepsat ve tvaru

$$
\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_G f(\varphi(t)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t) \right\| d\lambda^{n-1}(t),
$$

kde $f\colon \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je borelovská.

Příklad. Nechť $r > 0$. Spočtěte povrch sféry $S(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = r\}$.

Řešení. Naším úkolem je spočítat $\mathcal{H}^2(S(0,r))$. Množinu $S(0,r)$ zapíšeme jako disjunktní sjednocení $S(0,r) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, kde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \big\{[0,0,r],[0,0,-r]\big\},\\
A_2 &= \{x \in S(0,r); x_2 = 0, x_1 < 0\},\\
A_3 &= S(0,r) \setminus (A_1 \cup A_2).
\end{aligned}$$

Nejprve pomocí area formule vypočteme $\mathcal{H}^2(A_3)$. Použijeme sférické souřadnice $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^3$, kde $G = (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ a

$$\varphi(\alpha,\gamma) = \begin{pmatrix} r\cos(\gamma)\cos(\alpha)\\ r\cos(\gamma)\sin(\alpha)\\ r\sin(\gamma)\end{pmatrix} \quad \text{pro } \alpha \in (-\pi,\pi) \text{ a } \gamma \in (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}).$$

Zobrazení φ je prosté a regulární a $\varphi(G) = A_3$. Spočteme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\gamma) = \begin{pmatrix} -r\cos(\gamma)\sin(\alpha)\\ r\cos(\gamma)\cos(\alpha)\\ 0\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}(\alpha,\gamma) = \begin{pmatrix} -r\sin(\gamma)\cos(\alpha)\\ -r\sin(\gamma)\sin(\alpha)\\ r\cos(\gamma)\end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\gamma) \times \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}(\alpha,\gamma) = \begin{pmatrix} r^2\cos(\gamma)^2\cos(\alpha)\\ r^2\cos(\gamma)^2\sin(\alpha)\\ r^2\cos(\gamma)\sin(\gamma)\end{pmatrix},$$

takže podle (22) platí

$$\operatorname{vol}\varphi'(\alpha,\gamma) = \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(\alpha,\gamma) \times \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}(\alpha,\gamma)\right\| = r^2\cos(\gamma) \quad \text{pro každá } (\alpha,\gamma) \in G.$$

Podle area formule dostáváme

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^2\big(\varphi(G)\big) &= \int_{\varphi(G)} 1\, d\mathcal{H}^2 = \int_G \operatorname{vol}\varphi'\, d\lambda^2\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos(\gamma)\, d\gamma\, d\alpha = 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\gamma)\, d\gamma = 4\pi r^2.
\end{aligned}$$

Zbývá ukázat, že $\mathcal{H}^2(A_1 \cup A_2) = 0$. Množina A_1 má pouze dva prvky, takže přímo z definice Hausdorffovy míry plyne, že $\mathcal{H}^2(A_1) = 0$. Položme $H = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ a definujme $\psi\colon H \to \mathbb{R}^3$ předpisem $\psi(t) = (-r\cos t, 0, r\sin t)^T$. Potom je H otevřená v R, ψ je prosté, třídy $\mathcal{C}^1(H)$ a platí $\psi(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = A_2$. Navíc $\psi'(t) = (r\sin(t), 0, r\cos(t))^T$, takže $\|\psi'(t)\| = r$ pro každé $t \in H$. Podle (21) platí $\operatorname{vol}\psi'(t) = r$ pro každé $t \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Podle area formule obdržíme

$$\mathcal{H}^1\big(\psi(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\big) = \int_{\psi(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} 1\, d\mathcal{H}^1 = \int_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \operatorname{vol}\psi'(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\, dt = \pi r < \infty.$$

Podle Věty 20.7 tedy platí $\mathcal{H}^2(A_2) = 0$. Celkem

$$\mathcal{H}^2(S(0,r)) = \int_{A_1} d\mathcal{H}^2 + \int_{A_2} d\mathcal{H}^2 + \int_{A_3} d\mathcal{H}^2 = 0 + 0 + 4\pi r^2 = 4\pi r^2.$$

20.3. **Křivky, plochy a jejich orientace.**

Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **k-dimenzionální plocha** (krátce **k-plocha**), jestliže pro každé $x \in M$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ takový, že $x \in \varphi(G)$, $\varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M.

Poznámka. Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Jestliže $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená a neprázdná a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus, potom je $\varphi(G)$ k-plocha, neboť $\varphi(G)$ je otevřená ve $\varphi(G)$.

konec distanční 13. přednášky (30.3.2020)

Příklad. Dokažte, že $M = \{0\} \times (0,1)^2$ je 2-plocha v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Položme $G = (0,1)^2$ a definujme $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^3$ předpisem $\varphi(x) = (0, x_1, x_2)$. Potom G je otevřená v $\mathbb{R}^2$, φ je prosté, třídy $\mathcal{C}^1(G)$ a platí $\varphi(G) = M$. Dále platí $\varphi^{-1}(y) = (y_2, y_3)$ pro $y \in M$, takže $\varphi^{-1}\colon M \to G$ je spojité, a proto je φ homeomorfismus. Zvolme $x \in G$. Potom

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy pro každé $x \in G$ platí $\operatorname{rank} \varphi'(x) = 2$, takže φ je regulární homeomorfismus G na M. Podle výše uvedené poznámky je M 2-plocha v $\mathbb{R}^3$.

Věta 20.13 (o úrovňové množině)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k < n$, $H \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $F\colon H \to \mathbb{R}^{n-k}$ je třídy $\mathcal{C}^1(H)$. Označme $M = \{x \in H; F(x) = o\}$. Jestliže $M \neq \emptyset$ a pro každé $x \in M$ platí $\operatorname{rank} F'(x) = n-k$, potom je M k-plocha.*

Důkaz. Zvolme $\tilde{x} \in M$. Potom $\operatorname{rank} F'(\tilde{x}) = n-k$, takže matice $F'(\tilde{x})$, která je typu $(n-k) \times n$, obsahuje regulární submatici typu $(n-k) \times (n-k)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}}(\tilde{x}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\tilde{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_{k+1}}(\tilde{x}) & \cdots & \frac{\partial F_{n-k}}{\partial x_n}(\tilde{x}) \end{pmatrix}$$

je regulární. Podle věty o implicitně zadaných funkcích existují $G_1 \subset \mathbb{R}^k$, $G_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ otevřené a $\varphi\colon G_1 \to G_2$ třídy $\mathcal{C}^1(G_1)$ splňující $\tilde{x} \in G_1 \times G_2$ a $M \cap (G_1 \times G_2) = \operatorname{graf} \varphi$. Definujme $\psi\colon G_1 \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\psi(u) = (u, \varphi(u))$. Potom ψ je prosté, $\psi(G_1) = M \cap (G_1 \times G_2)$, $\psi \in \mathcal{C}^1(G_1)$ a

$$\psi'(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(u) & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(u) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_1}(u) & \cdots & \cdots & \frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial x_k}(u) \end{pmatrix},$$

takže $\operatorname{rank} \psi'(u) = k$ pro každé $u \in G_1$. Tedy ψ je regulární. Navíc je ψ^{-1} restrikce projekce $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^k$ na $M \cap (G_1 \times G_2)$. Tedy ψ^{-1} je spojité, takže ψ je regulární homeomorfismus G_1 na $M \cap (G_1 \times G_2)$. Tvrzení plyne z toho, že $M \cap (G_1 \times G_2)$ je otevřená v M a obsahuje $\tilde{x}$. $\square$

Příklad. Dokažte, že sféra $S_n(o, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = r\}$ je $(n-1)$-plocha.

Řešení. Položme $H = \mathbb{R}^n$ a definujme $F\colon H \to \mathbb{R}$ předpisem $F(x) = \|x\| - r$. Potom $F \in \mathcal{C}^1(H) \setminus \{o\}$ a platí $S_n(o, r) = \{x \in H; F(x) = 0\}$. Dále

$$F'(x) = \frac{1}{\|x\|} x \quad \text{pro každé } x \in H \setminus \{o\},$$

a tedy $\operatorname{rank} F'(x) = 1$ pro každé $x \in S_n(o, r)$. Podle Věty 20.13 je tedy množina $S_n(o, r)$ $(n-1)$-plocha.

Příklad. Nechť $G = (-5, 2\pi)$ a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^2$ je definováno předpisem

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1, t), & -5 < t \leq 0, \\ (\cos t, \sin t), & 0 < t < 2\pi. \end{cases}$$

Položme $M = \varphi(G)$. Dokažte, že φ je prosté a regulární na G, ale není to homeomorfismus G na M.

Řešení. Zřejmě je φ prosté a třídy $\mathcal{C}^1(G)$. Platí

$$\varphi'(t) = \begin{cases} (0, 1), & -5 < t \leq 0, \\ (-\sin t, \cos t), & 0 < t < 2\pi, \end{cases}$$

takže $\|\varphi'(t)\| = 1$ pro každé $t \in G$, a proto je φ regulární. Položme $A = \{x \in M; x_1 > 0\}$. Potom A je souvislá v M, ale $\varphi^{-1}(A) = (-5, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ není souvislá v G. Podle Věty 19.23 tedy φ^{-1} není spojité, takže φ není homeomorfismus.

Definice. Nechť $k, n \in \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, M je k-plocha v $\mathbb{R}^n$, $x \in M$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že v je **tečný vektor** k M v x, jestliže existují otevřený interval I, spojité zobrazení $c\colon I \to M$ a $t_0 \in I$ splňující $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množina všech tečných vektorů k M v x se nazývá **tečný prostor** k M v x a značíme ji $T_x(M)$.

Věta 20.14 (popis tečného prostoru)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je k-plocha a $x \in M$.*

(a) *Potom $T_x(M)$ je k-dimenzionální vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.*
(b) *Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina, $a \in G$, $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus, $x = \varphi(a)$, $\varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M. Potom $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) = T_x(M)$.*

Důkaz. (a) Tvrzení plyne z (b), neboť $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$ je lineární podprostor $\mathbb{R}^n$ dimenze k.

(b) Dokážeme nejprve $\varphi'(a)(\mathbb{R}^k) \subset T_x(M)$. Zvolme $v \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. K němu nalezneme $u \in \mathbb{R}^k$ takové, že $\varphi'(a)(u) = v$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $B(a, \delta) \subset G$, a $r > 0$ takové, že $r\|u\| < \delta$. Definujme $c\colon (-r, r) \to \mathbb{R}^n$ předpisem $c(t) = \varphi(a + tu)$. Potom je c spojité zobrazení, $c(0) = x$ a $c'(0) = \varphi'(a)(u) = v$. Tedy $v \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^n)$.

Nyní dokážeme $T_x(M) \subset \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. Zvolme $v \in T_x(M)$. Potom existuje otevřený interval I, $t_0 \in I$ a $c\colon I \to M$ spojité splňující $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Protože

$\operatorname{rank} \varphi'(a) = k$, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

je regulární. Označme π projekci $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^k$, definovanou předpisem

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^n.$$

Potom

$$(\pi \circ \varphi)'(a) = \pi'(\varphi(a)) \circ \varphi'(a) = \pi \circ \varphi'(a) = \mathbb{A}.$$

Jest tedy $\pi \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(G)$ a $(\pi \circ \varphi)'(a)$ je regulární. Podle věty o lokálním difeomorfismu existuje okolí $U \subset G$ bodu a takové, že $\pi \circ \varphi|_U$ je difeomorfismus. Zobrazení $\pi|_{\varphi(U)}$ je prosté, neboť zobrazení $\pi \circ \varphi|_U$ je prosté. Označme $W = c^{-1}(\varphi(U))$. Protože $\varphi^{-1} \colon M \to \mathbb{R}^k$ je spojité a U je otevřená v $\mathbb{R}^k$, je $\varphi(U)$ otevřená v M. Tedy W je otevřená v $\mathbb{R}$, protože c je spojité. Navíc $t_0 \in W$, neboť $c(t_0) = x = \varphi(a)$. Definujme zobrazení $\xi \colon W \to G$ předpisem $\xi(t) = \varphi^{-1}(c(t))$. Potom $c|_W = \varphi \circ \xi$, $\xi(t_0) = a$ a platí

$$\xi(t) = \varphi^{-1} \circ (\pi|_{\varphi(U)})^{-1} \circ \pi|_{\varphi(U)} \circ c(t) = (\pi \circ \varphi|_U)^{-1} \circ (\pi \circ c)(t) \quad \text{pro } t \in W.$$

Protože $(\pi \circ \varphi|_U)^{-1} \in \mathcal{C}^1(\pi(\varphi(U)))$ a $\pi \circ c$ je spojité na W, je ξ spojité na W. Navíc existuje $\xi'(t_0) \in \mathbb{R}^k$, neboť

$$\begin{aligned} \xi'(t_0) &= ((\pi \circ \varphi)^{-1})'((\pi \circ c)(t_0)) \circ (\pi \circ c)'(t_0) \\ &= ((\pi \circ \varphi)^{-1})'(\pi(x)) \circ \pi'(c(t_0)) \circ c'(t_0) \\ &= ((\pi \circ \varphi)^{-1})'(\pi(x))(\pi(v)). \end{aligned}$$

Označme $u = \xi'(t_0)$. Potom

$$v = c'(t_0) = (\varphi \circ \xi)'(t_0) = \varphi'(\xi(t_0))(\xi'(t_0)) = \varphi'(a)(u),$$

takže $v \in \varphi'(a)(\mathbb{R}^k)$. $\square$

konec distanční 14. přednášky (2.4.2020)

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, M je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$, $x \in M$ a $\nu \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že ν je **normálový vektor** k M v x, jestliže $\nu \in T_x(M)^\perp$. Jestliže navíc $\|\nu\| = 1$, pak říkáme, že ν je **jednotkový normálový vektor** k M v x.

Poznámka. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, M je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$, $x \in M$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená, $a \in G$, $\varphi \colon G \to \mathbb{R}^n$ je regulární homeomorfismus, $\varphi(a) = x$, $\varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M. Potom

$$\nu(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a)}{\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a) \|}$$

je jednotkový normálový vektor k M v x. Zobrazení ν je navíc spojité na jisté otevřené množině v M obsahující x.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, M je $(n-1)$-plocha v $\mathbb{R}^n$, $\nu \colon M \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení splňující $\nu(x) \in T_x(M)^\perp$ a $\|\nu(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$. Potom se ν nazývá **orientace** M. Jestliže pro M existuje orientace ν, pak říkáme, že M je **orientovatelná plocha** a dvojice (M, ν) se nazývá **orientovaná plocha**.

Příklad. Pro 2-plochu $M = \{0\} \times (0,1)^2$ v $\mathbb{R}^3$ nalezněte nějakou její orientaci.

Řešení. Položme $\nu(x) = (1,0,0)$, $x \in M$.

Příklad. Nechť $r > 0$. Pro 2-plochu $S(o,r)$ v $\mathbb{R}^3$ nalezněte nějakou její orientaci.

Řešení. Položme $\nu(x) = \frac{x}{r}$, $x \in S(o,r)$.

Příklad. **Möbiova páska** je množina $M \subset \mathbb{R}^3$ splňující $M = \varphi(G)$, kde $G = (0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{R}$ a $\varphi \colon G \to \mathbb{R}^3$ je definováno předpisem

$$\varphi(r,\alpha) = \big(\cos(\alpha) + r\cos(\tfrac{\alpha}{2})\cos(\alpha), \sin(\alpha) + r\cos(\tfrac{\alpha}{2})\sin(\alpha), r\sin(\tfrac{\alpha}{2})\big).$$

Ukažte, že M je 2-plocha, která není orientovatelná.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $z \in H(\Omega)$, U je okolí z a $h \colon U \to \mathbb{R}$. Řekneme, že h je **rozhraničující** funkce pro Ω na U, jestliže $h \in \mathcal{C}^1(U)$, $\nabla h(z) \neq o$ a $U \cap \Omega = \{x \in U; h(x) < 0\}$.

Věta 20.15 (lokální popis hranice)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $z \in H(\Omega)$, U je okolí z a h je rozhraničující funkce pro Ω na U. Potom*

(a) *existuje okolí $V \subset U$ bodu z takové, že $V \cap H(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha,*
(b) *$\nu_\Omega(z) = \frac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|}$ je jednotkový normálový vektor v bodě z k $V \cap H(\Omega)$ a nezávisí na volbě rozhraničující funkce h.*

Důkaz. Platí $h(z) \geq 0$, neboť $z \notin \Omega$. Bod z je prvkem hranice Ω, a proto můžeme nalézt posloupnost $\{z^j\}$ prvků množiny Ω, která konverguje k z. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $h(z^j) < 0$, a proto dostáváme $h(z) \leq 0$. Máme tedy $h(z) = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\frac{\partial h}{\partial x_n}(z) \neq 0$. Použijeme větu o implicitní funkci. Funkce h splňuje

- $h(z) = 0$,
- $h \in \mathcal{C}^1(U)$,
- $\frac{\partial h}{\partial x_n}(z) \neq 0$.

Nalezneme okolí W bodu $[z_1, \ldots, z_{n-1}]$, okolí H bodu z_n a funkci $\varphi \colon W \to H$ takovou, že

- $\varphi(z_1, \ldots, z_{n-1}) = z_n$,
- $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0\} \cap (W \times H) = \operatorname{graf} \varphi$,
- $W \times H \subset U$.

Nyní ověříme rovnost $\operatorname{graf} \varphi = H(\Omega) \cap (W \times H)$. Inkluze $\operatorname{graf} \varphi \subset W \times H$ zřejmě platí. Vezměme $w = (y, \varphi(y)) \in \operatorname{graf} \varphi$. Potom $w \notin \Omega$, neboť $h(w) = 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $h(w + t\nabla h(w)) < h(w)$ pro každé $t \in (-\delta, 0)$. Odtud plyne $h(w + t\nabla h(w)) < 0$ pro každé $t \in (-\delta, 0)$, a tedy $h(w + t\nabla h(w)) \in \Omega$ pro každé $t \in (-\delta, 0)$. Odtud plyne $w \in H(\Omega)$.

Nyní vezměme $w \in H(\Omega) \cap (W \times H)$. Potom platí $h(w) \leq 0$, neboť $w \notin \Omega$. Dále nalezneme posloupnost $\{w^j\}$ prvků množiny Ω konvergující k w a splňující $h(w^j) < 0$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Odtud plyne $h(w) \leq 0$. Dohromady tedy máme $h(w) = 0$, takže $w \in \operatorname{graf} \varphi$. Tím je rovnost dokázána.

Položme $\psi(y) = (y, \varphi(y))$, $y \in W$. Platí

- $\psi \in \mathcal{C}^1(W)$,
- $\psi(W) = \operatorname{graf} \varphi = H(\Omega) \cap (W \times H)$,
- $\operatorname{rank} \psi'(y) = n - 1, y \in W$,
- $\psi^{-1}(w) = \pi(w)$.

Podle výše uvedené poznámky dostáváme, že $\psi(W)$ je $(n-1)$-plocha. Zvolme okolí V bodu z tak, aby $V \subset W \times H$. Potom $\psi(W) \cap V = H(\Omega) \cap V$ je $(n-1)$-plocha.

Ortogonalita $\nu_\Omega(z)$. Pro každé $y \in W$ platí $h(y, \varphi(y)) = 0$. Derivujeme-li funkci $y \mapsto h(y, \varphi(y))$ podle i-té proměnné, dostaneme

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(y, \varphi(y)) + \frac{\partial h}{\partial x_n}(y, \varphi(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) = \langle \nabla h(y, \varphi(y)), \psi'(y, \varphi(y))(e^i) \rangle = 0.$$

Pro bod z tedy platí $\nabla h(z) \in T_z(\psi(W) \cap V)^\perp$.

Jednoznačnost $\nu_\Omega(z) = 0$. Předpokládejme, že $\tilde{h}$ je rozhraničující funkce pro Ω. Podle předchozího je $\nabla \tilde{h}(z) \in T_z(\psi(W) \cap V)^\perp$. Dimenze prostoru $T_z(\psi(W) \cap V)$ je $n-1$, a proto ortogonální doplněk $T_z(\psi(W) \cap V)^\perp$ má dimenzi rovnou 1. Proto existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla h(z) = \alpha \nabla \tilde{h}(z)$. Z výše uvedené poznámky plyne, že $\alpha > 0$, a proto platí

$$\frac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|} = \frac{\nabla \tilde{h}(z)}{\|\nabla \tilde{h}(z)\|}.$$

□

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $z \in H(\Omega)$. Řekneme, že z je **regulární bod** $H(\Omega)$, jestliže existuje rozhraničující funkce pro Ω na nějakém okolí z. Vektor $\nu_\Omega(z)$ nazýváme **vnějším jednotkovým normálovým vektorem** k Ω v z. Množinu všech regulárních bodů hranice Ω značíme $H_*(\Omega)$.

Věta 20.16 (regulární body hranice)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná omezená otevřená množina. Jestliže $H_*(\Omega) \neq \emptyset$, potom $H_*(\Omega)$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν_Ω.*

Příklad (koule)**.** Nechť $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$. Potom $S_n(o, 1) = H(\Omega)$. Zvolme $x \in S(o, 1)$. Potom $h(x) = \|x\| - 1$, $x \in \mathbb{R}^n$, je rozhraničující funkce pro Ω, $\nabla h(x) = x$ a $\nu_\Omega(x) = x$. Každý bod $S_n(o, 1)$ je regulární bod $H(\Omega)$.

Příklad (čtverec)**.** Nechť $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Hranice Ω je sjednocením čtyř úseček („stran“), jejichž relativní vnitřky vzhledem k $\partial\Omega$ tvoří regulární část hranice. Nechť například $x = [1, x_2] \in \{1\} \times (0, 1)$. Rozhraničující funkce na $(0, 2) \times (0, 1)$ je $h(x) = x_1 - 1$. Normála v bodě $x = [1, x_2]$ je $\nu_\Omega(x) = e^1 = [1, 0]$. Ve vrcholech čtverce Ω neexistuje vnější normála, ale ty tvoří 1-nulovou množinu.

Příklad (krychle)**.** Hranici krychle $\Omega = (0, 1)^3$ tvoří sjednocení šesti čtverců („stěn“), jejichž relativní vnitřky vzhledem k $\partial\Omega$ tvoří regulární část hranice. Do regulární části nepatří vrcholy a hrany, ale ty tvoří 2-nulovou množinu. Nechť například $x \in (0, 1) \times \{0\} \times (0, 1)$. Rozhraničující funkce je $h(x) = -x_2$, $x \in (0, 1) \times (-1, 1) \times (0, 1)$, tedy $\nu_\Omega(x) = -e^2 = [0, -1, 0]$ pro takové x.

20.4. **Gaussova, Greenova a Stokesova věta.**

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν a $f\colon M \to \mathbb{R}^n$. **Tok vektorového pole** f orientovanou plochou (M, ν) definujeme předpisem

$$\int_M \langle f(y), \nu(y)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

pokud integrál konverguje.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(U)$. **Divergence** f je definována předpisem

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \quad \text{pro } x \in U.$$

Věta 20.17 (Gaussova věta o divergenci)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^{n-1}\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathcal{H}^{n-1}\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\overline{\Omega} \subset G$, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Potom*

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y)\big\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) \, d\lambda^n(x).$$

konec distanční 15. přednášky (6.4.2020)

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je 1-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\tau\colon M \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\tau(x) \in T_x(M)$ a $\|\tau(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}, n > 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že c je **křivka**, jestliže je spojité. Řekneme, že c je **po částech regulární**, jestliže existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^m$ intervalu $[a,b]$ takové, že pro každé $i = 1, \dots, m$ platí $c \in \mathcal{C}^1([t_{i-1}, t_i])$ a pro každé $t \in [a,b] \setminus \{t_0, \dots, t_m\}$ platí $c'(t) \neq 0$. Řekneme, že c je **jednoduchá a uzavřená křivka**, jestliže je to křivka a navíc $c|_{[a,b)}$ je prosté a $c(a) = c(b)$.

Věta 20.18 (Jordan)**.** *Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je jednoduchá uzavřená křivka. Potom existují disjunktní otevřené souvislé množiny $\operatorname{Int} c$ a $\operatorname{Ext} c$ takové, že $\operatorname{Int} c$ je omezená a $\operatorname{Ext} c$ je neomezená a $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c \cup c\big([a,b]\big)$. Navíc platí $H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c\big([a,b]\big)$.*

Věta 20.19 (regulární body křivky)**.** *Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je po částech regulární jednoduchá uzavřená křivka. Potom všechny body množiny $H(\operatorname{Int} c)$ až na konečně mnoho jsou regulárními body $H(\operatorname{Int} c)$.*

Důkaz. Nechť $x \in H(\operatorname{Int} c)$ je takový bod, že existuje $\delta > 0$ a $t_0 \in (a,b)$ takové, že $c(t_0) = x$, c' je spojité na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ a $c'(t_0) \neq 0$. Takový je každý bod z $H(\operatorname{Int} c)$ vyjma konečně mnoha bodů, neboť podle Jordanovy věty máme $H(\operatorname{Int} c) = c([a,b])$ a c je po částech regulární. Pro naše x můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $c_1'(t_0) \neq 0$. Potom existuje okolí $U \subset (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ bodu t_0 takové, že c_1 je difeomorfismus na U. Označme $V = c_1(U)$. Položme $\psi(z) = c_2 \circ c_1^{-1}(z), z \in V$. Potom pro každé $z \in V$ existuje $t \in U$ takové, že $c_1(t) = z$. pak máme $[z, \psi(z)] =$

$[c_1(t), c_2 \circ c_1^{-1}(c_1(t))] = [c_1(t), c_2(t)] = c(t)$. Máme tedy graf $\psi \subset c(U)$. Pro $t \in U$ pak máme

$$c(t) = [\underbrace{c_1(t)}_{\in V}, c_2(t)] = [c_1(t), c_2 \circ c_1^{-1}(\underbrace{c_1(t)}_{\in V})] = [c_1(t), \psi(c_1(t))] \in \operatorname{graf} \psi.$$

Máme tedy graf $\psi = c(U)$. Množina $F = [a,b] \setminus U$ je kompaktní a neprázdná, a tedy $c(F)$ je kompaktní. Platí $x \notin c(F)$ díky jednoduchosti a uzavřenosti c. Množina $c(F)$ má tedy od bodu $x = c(t_0)$ kladnou vzdálenost. Existují tudíž okolí W bodu $c_1(t_0)$ a okolí W bodu $c_2(t_0)$ taková, že $(W \times F) \cap c(F) = \emptyset$. Platí tedy

$$(W \times H) \cap c([a,b]) = (W \times H) \cap c(U) = (W \times H) \cap \operatorname{graf} \psi.$$

Množina $P = \{[x,y] \in W \times H; y < \psi(x)\}$ je otevřená a souvislá. Souvislost vyplývá z křivkové souvislosti. Podobně množina $N = \{[x,y] \in W \times H; y > \psi(x)\}$ je otevřená a souvislá. Poněvadž

$$H(\operatorname{Int} c) = H(\operatorname{Ext} c) = c([a,b]), \tag{23}$$

máme $P \cap (\operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c) \neq \emptyset$ a $N \cap (\operatorname{Int} c \cup \operatorname{Ext} c) \neq \emptyset$. Souvislost P implikuje, že platí buď $P \subset \operatorname{Int} c$ nebo $P \subset \operatorname{Ext} c$. Podobně platí buď $N \subset \operatorname{Int} c$ nebo $N \subset \operatorname{Ext} c$. Z (23) pak plyne, že platí buď

$$P \subset \operatorname{Int} c \text{ a } N \subset \operatorname{Ext} c, \tag{24}$$

nebo

$$P \subset \operatorname{Ext} c \text{ a } N \subset \operatorname{Int} c. \tag{25}$$

Předpokládejme, že nastane případ (24). Potom položme

$$h(u,v) = -\psi(u) + v, \quad [u,v] \in W \times H.$$

Platí $h \in \mathcal{C}^1(W \times H)$, $\nabla h(u,v) = (-\psi'(u), 1) \neq 0$ a

$$\big\{[u,v] \in W \times H; h(u,v) < 0\big\} = P = \operatorname{Int} c \cap (W \times H).$$

Pokud nastane případ (25), pak postupujeme obdobně. $\square$

Definice. (a) Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $f\colon U \to \mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(U)$ a $x \in U$. **Rotace** f je definována předpisem

$$\operatorname{curl} f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \quad \text{pro } x \in U.$$

(b) Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená, $f\colon U \to \mathbb{R}^3$, $f \in \mathcal{C}^1(U)$ a $x \in U$. **Rotace** f je definována předpisem

$$\operatorname{curl} f(x) = \Big(\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \tfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\Big) \quad \text{pro } x \in U.$$

Poznámka. (a) Jako mnemotechnická pomůcka pro zapamatování definice rotace v $\mathbb{R}^3$ může sloužit následující diagram, kterému nebudeme dávat přesný formální smysl:

$$\operatorname{curl} f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} e^1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & f_1 \\ e^2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & f_2 \\ e^3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & f_3 \end{vmatrix}.$$

(b) Pokud bychom vektorové pole f z předchozí definice chápali jako popis proudění kapaliny, kde $f(x)$ určuje vektor rychlosti proudění v bodě x, potom $\operatorname{curl} f(x)$ určuje osu otáčení velmi malé kuličky uchycené v bodě x, přičemž úhlová rychlost otáčení je rovna polovině velikosti vektoru $\operatorname{curl} f(x)$.

Věta 20.20 (Green)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega)\big) < \infty$, $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$, $G \subset \mathbb{R}^2$, $\overline{\Omega} \subset G$, $f\colon G \to \mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pro $x \in H_*(\Omega)$ položme $\tau_\Omega(y) = -(\nu_\Omega(y)\times)$. Potom*

$$\int_{H(\Omega)} \big\langle f(y), \tau_\Omega(y)\big\rangle \, d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{curl} f(x)\, d\lambda^2(x).$$

Důkaz. Definujme $h\colon D(f) \to \mathbb{R}^2$ předpisem $h(x) = (f_2(x), -f_1(x))$. Potom

$$\langle h(y), \nu_\Omega(y)\rangle = \langle f(y), \tau_\Omega(y)\rangle \quad \text{pro } y \in \Omega$$

a

$$\operatorname{div} h(x) = \operatorname{curl} f(x) \quad \text{pro } x \in \Omega.$$

Tvrzení tedy plyne z Gaussovy věty. □

Poznámka. Vektor $\tau_\Omega(y)$ z předchozí věty vznikne otočením vektoru $\nu_\Omega(y)$ o $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček.

Definice. Nechť $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je po částech regulární křivka.

(a) Nechť $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. **Křivkový integrál prvního druhu** $\int_c g\, ds$ definujeme předpisem
$$\int_a^b g\big(c(t)\big)\|c'(t)\|\, dt,$$
pokud tento integrál konverguje.

(b) Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. **Křivkový integrál druhého druhu** $\int_c f \cdot dc$ definujeme předpisem
$$\int_a^b \langle f\big(c(t)\big), c'(t)\rangle\, dt,$$
pokud tento integrál konverguje.

Věta 20.21 (Greenova–Jordanova)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je po částech regulární jednoduchá uzavřená křivka, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $\overline{\operatorname{Int} c} \subset G$, $f\colon G \to \mathbb{R}^2$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Označme $\Omega = \operatorname{Int} c$. Jestliže existuje $t \in [a,b]$ takové, že $\det(\nu_\Omega(c(t)), c'(t)) > 0$, potom platí*

$$\int_c f \cdot\, dc = \int_{\operatorname{Int} c} \operatorname{curl} f(x)\, d\lambda^2(x).$$

Poznámka. Podmínka existence $t \in [a,b]$ takového, že $\det(\nu_\Omega(c(t)), c'(t)) > 0$ určuje kladný (= proti směru hodinových ručiček) směr obíhání.

Část důkazu Věty 20.21. Lze dokázat, že platí $\det(\nu_\Omega(c(t)), c'(t)) > 0$ v každém bodě $t \in [a,b]$, kde $c'(t) \neq 0$. Podle Věty 20.19 a Věty 20.20 platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \tau_\Omega(y)\rangle\, d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{curl} f(x)\, d\lambda^2(x),$$

kde $\tau_\Omega(y) = -(\nu_\Omega(y)\times)$. Víme totiž, že platí

- Ω je otevřená a omezená (Věta 20.18),
- $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega)\big) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt < \infty$ díky tomu, že c je po částech regulární,
- $\mathcal{H}^1\big(H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)\big) = 0$, neboť $H(\Omega) \setminus H_*(\Omega)$ je konečná podle Věty 20.19.

Podle area formule (Věta 20.11) platí

$$\int_{H(\Omega)} \langle f(y), \tau_\Omega(y) \rangle \, d\mathcal{H}^1(y) = \int_a^b \langle f(c(t)), \tau_\Omega(c(t)) \rangle \cdot \|c'(t)\| \, dt.$$

Nechť $c'(t) \neq 0$. Potom $\tau_\Omega(c(t)) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ nebo $\tau_\Omega(c(t)) = -\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$. Podle předpokladu a Věty 20.12(a) platí

$$\begin{aligned} 0 > \det[c'(t), \nu_\Omega(c(t))] &= \langle c'(t), \times \nu_\Omega(c(t)) \rangle \\ &= -\langle c'(t), \tau_\Omega(c(t)) \rangle = -\Big\langle c'(t), \pm \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \Big\rangle. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $\tau_\Omega(c(t)) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$. Potom

$$\int_a^b \langle f(c(t)), \tau_\Omega(c(t)) \rangle \cdot \|c'(t)\| \, dt = \int_a^b \langle f(c(t)), c'(t) \rangle \, dt = \int_c f \cdot \, dc.$$

Tím je věta dokázána. $\square$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým polem ν, $\Omega \subset G$ je otevřená v G, $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$ a $z \in H^G(\Omega)$, kde $H^G(\Omega)$ označuje hranici Ω vzhledem k G. Řekneme, že z je **regulární** bod hranice Ω vzhledem ke G, jestliže existuje okolí U bodu z a funkce $h\colon U \to \mathbb{R}$ třídy $\mathcal{C}^1$ taková, že $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq o$ a $\{x \in G \cap U; h(x) < 0\} = \Omega \cap U$. Množinu všech regulárních bodů Ω vzhledem ke G značíme $H^G_*(\Omega)$. Potom definujeme

$$\tau_{\Omega,\nu}(z) = \frac{\nu(z) \times \nabla h(z)}{\|\nu(z) \times \nabla h(z)\|} \quad \text{pro } z \in H^G_*(\Omega).$$

Věta 20.22 (lokální popis křivky)**.** *Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Jestliže je $H^G_*(\Omega)$ neprázdná, potom je to 1-plocha v $\mathbb{R}^3$ a $\tau_{\Omega,\nu}$ je její orientace.*

Věta 20.23 (Stokes)**.** *Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici, Ω je omezená, $\mathcal{H}^1(H^G(\Omega)) < \infty$, $\mathcal{H}^1(H^G(\Omega) \setminus H^G_*(\Omega)) = 0$, $H \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená, $\overline{\Omega} \subset H$, $f\colon H \to \mathbb{R}^3$ a $f \in \mathcal{C}^1(H)$. Potom*

$$\int_{H^G(\Omega)} \langle f(y), \tau_{\Omega,\nu}(y) \rangle \, d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \langle \operatorname{curl} f(x), \nu(x) \rangle \, d\mathcal{H}^2(x).$$

Definice.

(a) Nechť $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$, $\Phi \in \mathcal{C}^1(G)$ a $g\colon \Phi(G) \to \mathbb{R}$. **Plošný integrál prvního druhu** $\int_\Phi g \, dS$ definujeme předpisem

$$\int_G g\big(\Phi(t)\big) \operatorname{vol} \Phi'(t) \, dt,$$

pokud tento integrál konverguje.

(b) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená, $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^n$, $\Phi \in \mathcal{C}^1(G)$ a $f\colon \Phi(G) \to \mathbb{R}^n$. **Plošný integrál druhého druhu** $\int_\Phi f \cdot d\Phi$ definujeme předpisem

$$\int_G \Big\langle f(\Phi(t)), \frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \Phi}{\partial t_{n-1}}(t) \Big\rangle \, dt,$$

pokud tento integrál konverguje.

konec distanční 16. přednášky (9.4.2020)

20.5. **Hlavní věta teorie pole.**

Věta 20.24 (věta o potenciálu). *Nechť* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená,* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c\colon [a,b] \to \Omega$ *je po částech regulární křivka,* $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *a* $u \in \mathcal{C}^1(U)$. *Potom*

$$u(c(b)) - u(c(a)) = \int_c \nabla u \cdot dc.$$

Důkaz. Díky předpokladu, že c je po částech regulární, a hladkosti u platí

$$(u \circ c)(b) - (u \circ c)(a) = \int_a^b (u \circ c)'(t)\, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\big(c(t)\big) c_i'(t)\, dt$$
$$= \int_a^b \langle \nabla u\big(c(t)\big), c'(t)\rangle\, dt = \int_c \nabla u \cdot dc.$$

□

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a $U \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že U je **hvězdicovitá**, jestliže existuje $a \in U$ takové, že pro každé $x \in U$ platí $\{a + t(x-a); t \in [0,1]\} \subset U$. Potom se a nazývá **střed hvězdicovitosti** U.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ a $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Řekneme, že u je **potenciál** f na Ω, jestliže pro každé $x \in \Omega$ platí $\nabla u(x) = f(x)$. Vektorové pole, které má potenciál, nazýváme **potenciální**.

Věta 20.25 (hlavní věta teorie pole). *Nechť* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená množina a* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *je spojité. Uvažujme následující výroky:*

(i) *Vektorové pole* f *je potenciální.*
(ii) *Pro každé po částech regulární křivky* $c_i\colon [a,b] \to \Omega, i \in \{1,2\}$, *splňující* $c_1(a) = c_2(a)$ *a* $c_1(b) = c_2(b)$ *platí* $\int_{c_1} f \cdot dc_1 = \int_{c_2} f \cdot dc_2$.
(iii) *Pro každé* $i, j \in \{1, \dots, n\}$ *a* $x \in \Omega$ *platí* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$.

Potom platí:

(a) *Výrok* (i) *je ekvivalentní s výrokem* (ii).
(b) *Je-li* f *třídy* $\mathcal{C}^1$ *a platí výrok* (i), *pak platí výrok* (iii).
(c) *Je-li* f *třídy* $\mathcal{C}^1$, Ω *je hvězdicovitá a platí výrok* (iii), *pak platí výrok* (i).

Důkaz. (a) (i) ⇒ (ii) Tato implikace plyne z Věty 20.24.

(ii) ⇒ (i) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že Ω je neprázdná. Uvažujme komponentu W množiny Ω. Potom W je otevřená v $\mathbb{R}^n$. Zvolme $a \in W$. Dokážeme, že pro každé $x \in W$ existuje po částech regulární křivka $\psi_x\colon [0,1] \to W$ taková, že $\psi_x(0) = a$ a $\psi_x(1) = x$. Položme

$$G = \{x \in W; \text{existuje po částech regulární křivka } \psi\colon [0,1] \to W, \psi(0) = a, \psi(1) = x\}.$$

Ukážeme, že G je otevřená množina. Zvolme $x \in G$. K němu nalezneme příslušné ψ_x. Dále nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset W$. Zvolme $y \in B(x,r)$. Položme

$$\psi_y(t) = \begin{cases} \psi_x(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x + (y-x)(2t-1,) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Potom je ψ_y je po částech regulární, $\psi_y([0,1]) \subset W$ díky konvexitě $B(x,r)$, $\psi_y(0) = a$, $\psi_y(1) = y$. Platí tedy $y \in W$, takže $B(x,r) \subset W$, a tedy G je otevřená.

Dále ukážeme, že G je uzavřená v W. Mějme posloupnost $\{x_n\}$ prvků G konvergující k $x \in W$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset W$. Potom nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $x_m \in B(x,r)$. Položme

$$\psi_x(t) = \begin{cases} \psi_{x_m}(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x_m + (x - x_m)(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Potom ψ_x je po částech regulární, $\psi_x([0,1]) \subset W$ díky konvexitě $B(x,r)$, $\psi_x(0) = a$, $\psi_x(1) = x$.

Množina G je neprázdná, neboť zřejmě existuje $r > 0$ splňující $B(a,r) \subset G$. Množina W je souvislá, a proto $G = W$. Tím je pomocné tvrzení dokázáno.

Pro $x \in W$ položme $u(x) = \int_\psi f \cdot d\psi$, kde ψ je po částech regulární křivka, $\psi(0) = a$, $\psi(1) = x$. Definice je korektní podle právě dokázaného pomocného tvrzení a (ii). Zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in W$. Nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x,r) \subset W$. Pro $t \in (-r, r)$ platí

$$u(x + te^i) - u(x) = \int_\gamma f \cdot d\gamma,$$

kde $\gamma(s) = x + ste^i$. Potom

$$\begin{aligned} \frac{u(x+te^i) - u(x)}{t} &= \frac{1}{t} \int_0^1 \langle f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle \, ds = \frac{1}{t} \int_0^1 t \cdot f_i(\gamma(s)) \, ds \\ &= \int_0^1 f_i(\gamma(s)) \, ds = \int_0^1 f_i(x + ste^i) \, ds, \end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \int_0^1 f_i(x + ste^i) \, ds = \int_0^1 f_i(x) \, ds = f_i(x).$$

Odtud plyne $u \in \mathcal{C}^1(W)$ a $\nabla u = f$.

(b) Plyne z věty o záměně derivací.

(c) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že pro každé $x \in \Omega$ a každé $t \in [0,1]$ platí $tx \in \Omega$. Položme

$$u(x) = \int_{\psi_x} f \cdot d\psi_x, \quad \psi_x(t) = tx, \quad t \in [0,1].$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \langle f(tx), x \rangle \, dt = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \sum_{j=1}^n f_j(tx) x_j \, dt \\ &= \int_0^1 \Big(f_i(tx) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx) \cdot tx_j \Big) \, dt. \end{aligned}$$

Dále platí

$$f_i(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(tf_i(tx)\big) \, dt = \int_0^1 \Big(f_i(tx) + t \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx) \cdot x_j \Big) \, dt.$$

Máme tedy $\nabla u = f$. $\square$

Příklad. Ukažte, že množina $P = \{x \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$ není hvězdicovitá a nalezněte vektorové pole na P, které má nulovou rotaci, ale není potenciální.

Řešení. Nejznámějším příkladem je pole
$$f(x) = \Big(\frac{-x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2}\Big).$$
Lokálně se potenciály k f nalézt dají, například $u(x_1, x_2) = \operatorname{arctg}(x_2/x_1)$ na množině $\{x \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0\}$.

konec distanční 17. přednášky (16.4.2020)

21. Číselné řady II

21.1. **Přerovnávání řad.**

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom **kladnou částí** čísla a rozumíme číslo $a^+ = \max\{a, 0\}$. Podobně **zápornou částí** čísla a rozumíme číslo $a^- = \max\{-a, 0\}$. Je-li $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde M je libovolná množina, pak obdobně definujeme **kladnou a zápornou část funkce** f předpisy $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ a $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

Poznámky. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom platí
- $0 \le a^+, a^- \le |a|$,
- $a = a^+ - a^-$,
- $|a| = a^+ + a^-$.

konec distanční 18. přednášky (20.4.2020)

Definice. Nechť $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je řada. Je-li $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce, nazveme řadu $\sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)}$ **přerovnáním** řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Věta 21.1 (přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolutně konverguje a $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Potom přerovnaná řada $\sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)}$ absolutně konverguje a platí $\sum_{n=1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)}$.*

Důkaz. Zvolme $m \in \mathbb{N}$. K němu nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\}.$$
Máme tedy $\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, n\}$. Potom platí
$$\sum_{j=1}^m \big|a_{\pi(j)}\big| \le \sum_{i=1}^n |a_i| \le \sum_{i=1}^\infty |a_i|.$$
Odtud plyne, že řada $\sum_{j=1}^\infty |a_{\pi(j)}|$ konverguje, a tedy řada $\sum_{j=1}^\infty a_{\pi(j)}$ konverguje absolutně.

Pro důkaz druhé části tvrzení označme
$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \dots + a_n, & t_n &= a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(n)}, \quad n \in \mathbb{N},\\ s &= \lim_{n\to\infty} s_n, & t &= \lim_{n\to\infty} t_n. \end{aligned}$$
Potom s a t jsou dobře definovaná reálná čísla, neboť řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$ a $\sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)}$ absolutně konvergují, a tedy i konvergují. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\sum_{i=m+1}^\infty |a_i| < \varepsilon \qquad \text{a} \qquad \sum_{j=m+1}^\infty \big|a_{\pi(j)}\big| < \varepsilon. \tag{26}$$

Dále nalezneme $n, j \in \mathbb{N}$ taková, že

$$\begin{aligned}\{1, \dots, m\} &\subset \{\pi^{-1}(1), \dots, \pi^{-1}(n)\},\\ \{1, \dots, m\} &\subset \{\pi(1), \dots, \pi(j)\}.\end{aligned}$$

Položme $k = \max\{j, n\}$. Potom $k \geq n$ a

$$\{\pi(1), \dots, \pi(m)\} \subset \{1, \dots, k\}, \tag{27}$$

$$\{1, \dots, m\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(k)\}. \tag{28}$$

Zvolme libovolné $p \in \mathbb{N}$, $p \geq k$. Označme

$$\begin{aligned}A &= \{1, \dots, p\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(p)\},\\ B &= \{\pi(1), \dots, \pi(p)\} \setminus \{1, \dots, p\}.\end{aligned}$$

Pak podle (28) máme $A \subset \{i \in \mathbb{N}; i > m\}$ a podle (27) je $B \subset \{\pi(j); j \in \mathbb{N}, j > m\}$. Tedy

$$\begin{aligned}|s_p - t_p| &= \Big|\sum_{i=1}^{p} a_i - \sum_{j=1}^{p} a_{\pi(j)}\Big| = \Big|\sum_{i\in A} a_i - \sum_{j\in B} a_{\pi(j)}\Big| \leq \sum_{i\in A} |a_i| + \sum_{j\in B} \big|a_{\pi(j)}\big|\\ &\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |a_i| + \sum_{j=m+1}^{\infty} \big|a_{\pi(j)}\big| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že platí $s - t = \lim_{p\to\infty}(s_p - t_p) = 0$, a tedy $s = t$. □

Předcházející věta říká, že přerovnání absolutně konvergentní řady nemění její součet. Pro neabsolutně konvergentní řady však toto tvrzení neplatí. Nejprve ukážeme příklad řady a jejího přerovnání s rozdílnými součty.

Příklad. Uvažujme řadu

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdots$$

Dokažte, že existuje přerovnání této řady, které má jiný součet než původní řada.

Řešení. Zadanou řadu přepíšeme ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$, $a_{2n} = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pro částečné součty této řady platí $s_{2n-1} = \frac{1}{n}$ a $s_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že $\lim s_n = 0$, takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$. Položme

$$\pi(n) = \begin{cases} 4k-3, & \text{jestliže } n = 3k-2,\ k \in \mathbb{N},\\ 4k-1, & \text{jestliže } n = 3k-1,\ k \in \mathbb{N},\\ 2k, & \text{jestliže } n = 3k,\ k \in \mathbb{N}.\end{cases}$$

Potom platí

$$a_{\pi(3k-2)} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{\pi(3k-1)} = \frac{1}{2k}, \quad a_{\pi(3k)} = -\frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots,$$

Označme n-tý částečný součet přerovnané řady symbolem σ_n. Potom platí

$$\sigma_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \big(a_{\pi(3k-2)} + a_{\pi(3k-1)} + a_{\pi(3k)}\big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k}, \tag{29}$$

$$\sigma_{3n+1} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1}, \tag{30}$$

$$\sigma_{3n+2} = \sigma_{3n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}. \tag{31}$$

Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{(2k-1)2k} \leq \frac{1}{k^2}$, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)2k}$ konvergentní podle srovnávacího kritéria. Její součet je kladný, neboť členy řady jsou kladné. Podle (29) tedy platí vztah $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n} = s \in (0, \infty)$. Nyní snadno podle (30) a (31) dostáváme, že platí také $\lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{3n+2} = s$. Tedy $\lim \sigma_n = s$. Součet přerovnané řady je s, takže se liší od součtu původní řady.

Následující věta ukazuje, že chování řady a jejího přerovnání popsané v předcházejícím příkladu je pro neabsolutně konvergentní řady typické.

Věta 21.2 (Riemann)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně a nechť $s \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje přerovnání této řady se součtem s.*

21.2. **Součin řad.**

Definice. Mějme řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$. Jejich **Cauchyovým součinem** rozumíme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, jejíž členy jsou definovány předpisem

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Věta 21.3 (Mertens)**.** *Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a řada $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konverguje. Pak jejich Cauchyův součin je konvergentní řada, jejíž součet je roven $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right)$.*

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \qquad A = \sum_{j=1}^{\infty} a_j, \qquad \tilde{A} = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|,$$

$$B_k = \sum_{j=1}^{k} b_j, \qquad B = \sum_{j=1}^{\infty} b_j, \qquad \beta_k = B_k - B,$$

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k+1-i} b_i, \qquad C_k = \sum_{j=1}^{k} c_j.$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$
\begin{aligned}
C_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_1 b_k + \cdots + a_k b_1) \\
&= a_1(b_1 + \cdots + b_k) + a_2(b_1 + \cdots + b_{k-1}) + \cdots + a_k b_1 \\
&= a_1 B_k + a_2 B_{k-1} + \cdots + a_k B_1 \\
&= a_1(B + \beta_k) + a_2(B + \beta_{k-1}) + \cdots + a_k(B + \beta_1) \\
&= (a_1 + \cdots + a_k)B + (a_1\beta_k + a_2\beta_{k-1} + \cdots + a_k\beta_1) \\
&= A_k B + (a_1\beta_k + a_2\beta_{k-1} + \cdots + a_k\beta_1) \\
&= A_k B + \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Pro $k \in \mathbb{N}$ označme dále $\gamma_k = \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j$. Nyní ukážeme, že platí $\lim \gamma_k = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, platí $|\beta_k| < \varepsilon$, neboť $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ je konvergentní. Pak pro $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, máme

$$
\begin{aligned}
|\gamma_k| &= \left|\sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \left|\sum_{j=k_0+1}^{k} a_{k+1-j}\beta_j\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \sum_{j=k_0+1}^{k} |a_{k+1-j}|\,|\beta_j| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon \cdot \sum_{j=k_0+1}^{k} |a_{k+1-j}| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j\right| + \varepsilon\tilde{A}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Potom $\lim a_k = 0$ (nutná podmínka konvergence řady), a tedy podle věty o limitě vybrané posloupnosti také pro každé $j \in \{1, \ldots, k_0\}$ platí $\lim_{k\to\infty} a_{k+1-j} = 0$. Odtud plyne

$$
\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k_0} a_{k+1-j}\beta_j = 0. \tag{34}
$$

Díky (33) a (34) tedy platí $\limsup |\gamma_k| \leq \varepsilon\tilde{A}$. Odtud plyne, že $\limsup |\gamma_k| = 0$, a tedy $\lim |\gamma_k| = 0$. Tedy $\lim \gamma_k = 0$.

Limitním přechodem v (32) pak dostáváme z věty o aritmetice limit rovnost

$$
\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} (A_k B + \gamma_k) = AB.
$$

Tím je důkaz dokončen. $\square$

Důsledek. *Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní.*

Důkaz. Podle Mertensovy věty (Věta 21.3) je Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ a $\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|$ konvergentní řada. Pro Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty}b_j$ tak platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{k+1-i}b_i\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}|a_{k+1-i}|\,|b_i|\right) < \infty.$$

Odtud plyne, že Cauchyův součin řad $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ a $\sum_{j=1}^{\infty}b_j$ absolutně konverguje. $\square$

Předpoklad pouhé konvergence obou řad ve Větě 21.3 ke konvergenci jejich Cauchyova součinu nestačí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

Příklad. Nechť $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje, ale Cauchyův součin řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ se stejnou řadou $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ nekonverguje.

Řešení. Konvergence řady vyplývá z Leibnizova kritéria. Členy odpovídajícího Cauchyova součinu mají pro $k \in \mathbb{N}$ tvar

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1-i}\frac{1}{\sqrt{k+1-i}}(-1)^i\frac{1}{\sqrt{i}} \\ &= (-1)^{k+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}}. \end{aligned}$$

Podle AG-nerovnosti dostaneme odhad

$$\sqrt{(k+1-i)i} \leq \frac{(k+1-i)+i}{2} = \frac{k+1}{2}, \quad k \in \mathbb{N},\ i \in \{1,\ldots,k\}.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|c_k| = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{(k+1-i)i}} \geq \sum_{i=1}^{k}\frac{2}{k+1} = \frac{2k}{k+1}.$$

Tedy neplatí $\lim_{k\to\infty}c_k = 0$. Odtud plyne, že Cauchyův součin $\sum_{k=1}^{\infty}c_k$ nekonverguje, neboť není splněna nutná podmínka konvergence řady.

Cauchyův součin dvou konvergentních řad tedy nemusí konvergovat. Nicméně platí následující věta.

Věta 21.4 (Abelova věta o Cauchyově součinu)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum_{m=1}^{\infty}b_m$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}a_{k+1-i}b_i\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_m\right).$$

Důkaz. Položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ a $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$. Obě tyto řady mají poloměr konvergence větší nebo roven jedné, neboť číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ jsou podle předpokladu konvergentní. Odtud vyplývá, že obě řady jsou absolutně konvergentní pro každé $x \in (-1,1)$. Podle Mertensovy věty (Věta 21.3) tedy pro každé $x \in [0,1)$ platí

$$f(x)g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{k}a_{k+1-i}x^{k+1-i}b_ix^i) = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{k}a_{k+1-i}b_i)x^{k+1}.$$

Z Abelovy věty pro mocninné řady pak plyne

$$\lim_{x \to 1_-} f(x)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{k} a_{k+i-1} b_i).$$

□

konec distanční 19. přednášky (23.4.2020)

21.3. **Zobecněné řady.** Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je dáno reálné číslo x_α. Je-li I konečná, pak je součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ dobře definován. V tomto oddílu ukážeme, že součet $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ lze v jistých případech definovat i pro I nekonečnou, přičemž některé vlastnosti obvyklé pro součet konečně mnoha čísel zůstanou v platnosti. Přístup použitý v tomto oddílu je odlišný od způsobu, jakým jsme definovali součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V definici součtu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jsme totiž podstatným způsobem využili uspořádání sčítaných členů, zatímco pro definici součtu $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ žádné uspořádání k dispozici nemáme. Příkladem takového součtu je $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} x_{(n,m)}$.

Značení. Nechť I je množina. Potom symbolem $\mathcal{F}(I)$ označíme množinu všech konečných podmnožin I.

Definice. Nechť I je množina a pro každé $\alpha \in I$ je x_α reálné číslo. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ nazýváme **zobecněnou řadou**. Prvek $x \in \mathbb{R}^*$ nazveme **součtem** $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists F \in \mathcal{F}(I) \ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F \colon \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \in B(x, \varepsilon).$$

V takovém případě píšeme $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$ a říkáme, že $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ **má součet**. Je-li $x \in \mathbb{R}$, je $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ **konvergentní**. Pokud není zobecněná řada konvergentní, říkáme, že je **divergentní**. Jestliže je $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$ konvergentní, pak říkáme, že $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je **absolutně konvergentní**.

Věta 21.5 (jednoznačnost součtu zobecněné řady). *Řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má nejvýše jeden součet.*

Důkaz. Předpokládejme, že dvě různá čísla $x, y \in \mathbb{R}^*$ jsou součtem řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$. Zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ splňující

$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_1 \colon \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \in B(x, \varepsilon),$$
$$\forall F \in \mathcal{F}(I), F \supset F_2 \colon \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \in B(y, \varepsilon).$$

Pak pro konečnou množinu $F_1 \cup F_2$ platí

$$\sum_{\alpha \in F_1 \cup F_2} x_\alpha \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset,$$

což je spor. □

Poznámka. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ značí jednak zobecněnou řadu, jednak součet této řady, pokud existuje. Symbol $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ můžeme tedy používat k označení prvku z $\mathbb{R}^*$ až po ověření, že příslušná řada konverguje. S podobnou dvojznačností jsme se již setkali u nekonečných řad.

Poznámka. Je-li indexová množina I konečná, pak je součet zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ roven obvyklému součtu. Vskutku, je-li $\varepsilon > 0$, pak můžeme položit $F = I$. Potom pro každou $F' \in \mathcal{F}(I)$ splňující $F' \supset F$ platí $F' = I$. Tedy $\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha \in B\big(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \varepsilon\big)$. Pokud $I = \emptyset$, pak klademe $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = 0$. Ve shodě s touto úmluvou platí právě uvedená úvaha o zobecněném součtu i v případě, kdy je I prázdná množina.

Věta 21.6 (linearita zobecněného součtu)**.** *Nechť řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ mají součet. Je-li definován výraz $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha)$ součet a platí*

$$\sum_{\alpha\in I}(x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha + \sum_{\alpha\in I} y_\alpha.$$

Je-li $c \in \mathbb{R}$ a výraz $c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je definován, pak má i zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha$ součet a platí

$$\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha = c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha.$$

Důkaz. Označme $x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $y = \sum_{\alpha\in I} y_\alpha$. Důkaz prvního tvrzení provedeme pouze pro případ, kdy $x, y \in \mathbb{R}$, v ostatních případech lze tvrzení dokázat obdobně. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečné množiny $F_1, F_2 \subset I$ takové, že platí

$$\forall F_1' \in \mathcal{F}(I), F_1' \supset F_1 \colon \left|\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall F_2' \in \mathcal{F}(I), F_2' \supset F_2 \colon \left|\sum_{\alpha\in F_2'} y_\alpha - y\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $F = F_1 \cup F_2$. Pro každou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F dostáváme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'}(x_\alpha + y_\alpha) - (x + y)\right| \le \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| + \left|\sum_{\alpha\in F'} y_\alpha - y\right| < \varepsilon.$$

Odtud plyne tvrzení.

Dokážeme druhé tvrzení, a to pouze v případě, kdy $x \in \mathbb{R}$. Jestliže $c = 0$, pak je tvrzení zřejmé. Předpokládejme že $c \neq 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F \colon \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Pro každou množinu $F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F$, pak máme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'} cx_\alpha - cx\right| = |c|\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

Platí tedy rovnost $\sum_{\alpha\in I} cx_\alpha = cx$.

□

Věta 21.7 (vlastnosti zobecněného součtu)**.** *Pro zobecněnou řadu* $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ *platí následující tvrzení.*

(a) *Jsou-li čísla* x_α*,* $\alpha \in I$*, nezáporná, pak* $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ *má součet a platí*

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sup\biggl\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(I)\biggr\}. \tag{35}$$

(b) *Zobecněné řady* $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$*,* $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$*,* $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ *mají vždy součet a platí*

$$\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha| = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-. \tag{36}$$

(c) *Zobecněná řada* $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ *má součet právě tehdy, když je definován výraz* $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$*. V tomto případě pak platí*

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-. \tag{37}$$

Důkaz. (a) Nechť x_α, $\alpha \in I$, jsou nezáporná čísla. Označme

$$s = \sup\biggl\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(I)\biggr\}.$$

Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = s$. Nejprve si povšimneme, že platí

$$\forall F \in \mathcal{F}(I)\colon \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \le s. \tag{38}$$

Mějme nyní dáno libovolné $s' < s$. Z definice suprema nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že $\sum_{\alpha\in F} x_\alpha > s'$. Pak pro libovolnou konečnou množinu $F' \subset I$ obsahující F platí

$$\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \ge \sum_{\alpha\in F} x_\alpha > s'.$$

Odtud a z (38) již snadno dostaneme rovnost $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = s$.

(b) Díky (a) mají zobecněné řady $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ vždy součet. Rovnost (36) plyne z Věty 21.6(a), neboť $|x_\alpha| = x_\alpha^+ + x_\alpha^-$ a součet $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ je definován.

(c) Položme $P = \{\alpha \in I; x_\alpha \ge 0\}$, $M = \{\alpha \in I; x_\alpha < 0\}$, $p = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $m = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$. Dokážeme nejprve, že platí

$$p = \sum_{\alpha\in P} x_\alpha \qquad \text{a} \qquad m = -\sum_{\alpha\in M} x_\alpha. \tag{39}$$

Zřejmě platí rovnosti

$$\biggl\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+; F \in \mathcal{F}(I)\biggr\} = \biggl\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(P)\biggr\}, \tag{40}$$

$$\biggl\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-; F \in \mathcal{F}(I)\biggr\} = \biggl\{-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(M)\biggr\}, \tag{41}$$

a tedy máme

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ &= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+; F\in\mathcal{F}(I)\Big\}\\
&= \sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F\in\mathcal{F}(P)\Big\} && \text{(podle (40))}\\
&= \sum_{\alpha\in P} x_\alpha,\\
-\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^- &= -\sup\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-; F\in\mathcal{F}(I)\Big\}\\
&= -\sup\Big\{-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F\in\mathcal{F}(M)\Big\} && \text{(podle (41))}\\
&= \inf\Big\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F\in\mathcal{F}(M)\Big\}\\
&= \sum_{\alpha\in M} x_\alpha.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Nejprve dokážeme, že rozdíl $p-m$ je dobře definován. Pro spor předpokládejme, že tomu tak není, tj. $p=m=\infty$. Nechť $F\subset I$ je konečná. Z (39) plyne

$$\sup\Big\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha; G\in\mathcal{F}(P\setminus F)\Big\}=\infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_1\subset P\setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_1} x_\alpha > -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha + 1.$$

Z (39) dále plyne

$$\inf\Big\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha; G\in\mathcal{F}(M\setminus F)\Big\}=-\infty,$$

a tedy existuje konečná množina $G_2\subset M\setminus F$ taková, že

$$\sum_{\alpha\in G_2} x_\alpha < -\sum_{\alpha\in F} x_\alpha - 1.$$

Položíme $F_1=F\cup G_1$ a $F_2=F\cup G_2$. Pro každou konečnou množinu $F\subset I$ jsme tedy nalezli $F_1,F_2\in\mathcal{F}(I)$, které obsahují F a splňují $\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha>1$ a $\sum_{\alpha\in F_2} x_\alpha<-1$. Toto je ale ve sporu s předpokladem existence součtu řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Rozdíl $p-m$ je tedy dobře definován.

$\Leftarrow$ Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje podle Věty 21.6.

Rovnost (37) plyne z právě dokázané ekvivalence a Věty 21.6, neboť $x_\alpha = x_\alpha^+ + (-1)\cdot x_\alpha^-, \alpha\in I$. □

Věta 21.8 (srovnávací kritérium pro zobecněné řady)**.** *Nechť $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$ jsou zobecněné řady s nezápornými členy a nechť platí $y_\alpha\le x_\alpha$ pro každé $\alpha\in I$. Potom součty řad existují a platí $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Jestliže tedy navíc řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum_{\alpha\in I} y_\alpha$.*

Důkaz. Existence součtů obou řad plyne z Věty 21.7(a). Z nerovností $0 \le y_\alpha \le x_\alpha$, $\alpha \in I$, dostáváme

$$0 \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} y_\alpha; F \in \mathcal{F}(I)\right\} \le \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha; F \in \mathcal{F}(I)\right\}.$$

Odtud pomocí Věty 21.7(a) ihned plyne dokazovaná nerovnost. Z ní pak snadno vyplývá i tvrzení o konvergenci. □

Věta 21.9 (absolutní konvergence zobecněné řady)**.** *Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je konvergentní právě tehdy, když je absolutně konvergentní. V tom případě jsou též konvergentní řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ a (opět)*

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-. \tag{42}$$

Důkaz. $\Rightarrow$ Podle Věty 21.7(c) platí (42), tedy řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 21.7(b) konverguje pak i řada $\sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$.

$\Leftarrow$ Pro každé $\alpha \in I$ platí nerovnosti $0 \le x_\alpha^+ \le |x_\alpha|$ a $0 \le x_\alpha^- \le |x_\alpha|$, a proto podle Věty 21.8 řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ konvergují. Podle Věty 21.7(c) konverguje tedy i řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. □

Věta 21.10 (přerovnání zobecněné řady)**.** *Nechť má zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ součet a $\pi\colon I \to I$ je bijekce. Potom má součet i řada $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$ a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$.*

Důkaz. Označme s součet řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Položme $G = \pi^{-1}(F)$ a vezměme libovolnou konečnou množinu $G' \subset I$ obsahující G. Pak množina $F' = \pi(G')$ je konečná, obsahuje F a platí

$$\sum_{\alpha\in G'} x_{\pi(\alpha)} = \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in B(s,\varepsilon).$$

Tedy $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)} = s$. □

Věta 21.11 (spočetnost nosiče zobecněné řady)**.** *Nechť zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom*

(a) *pro každé $c > 0$ je množina je množina $\{\alpha \in I; |x_\alpha| > c\}$ konečná,*
(b) *množina $\{\alpha \in I; x_\alpha \neq 0\}$ je spočetná.*

Důkaz. (a) Řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je absolutně konvergentní dle Věty 21.9. Označme $s = \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha|$. Pro $c > 0$ položme

$$I_c = \{\alpha \in I; |x_\alpha| \ge c\}\,.$$

Máme-li pak libovolnou konečnou množinu $F \subset I_c$, platí pro počet jejích prvků odhad

$$c|F| = \sum_{\alpha\in F} c \le \sum_{\alpha\in F} |x_\alpha| \le s.$$

Tedy množina I_c má nejvýše s/c prvků a je tedy konečná.

(b) Množina $\{\alpha \in I; |x_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty I_{1/n}$ je spočetná. □

Poznámka. Tvrzení (a) Věty 21.11 můžeme chápat jako analogii nutné podmínky pro konvergenci číselné řady.

Pro množinu reálných čísel $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ máme nyní dva různé pojmy součtu jejích prvků. Totiž součet definovaný jako limita částečných součtů a součet zobecněné řady z definice zobecněné řady. Symboly $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ pro příslušné součty rozlišují použité metody. Následující věta ukazuje jejich vzájemný vztah.

Věta 21.12 (zobecněný součet na $\mathbb{N}$)**.** *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost.*

(a) *Zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentní právě tehdy, když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní. V tomto případě pak platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.*

(b) *Jestliže má zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ součet, má ho i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a tyto součty se rovnají.*

Důkaz. Nezáporné členy: Nechť nejprve $x_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sup\left\{\sum_{i\in F} x_i; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} \leq \sup\left\{\sum_{i=1}^{\max F} x_i; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} \leq \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i; n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$\leq \sup\left\{\sum_{i\in F} x_i; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\},$$

tedy podle Věty 21.7(a)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sup\left\{\sum_{i\in F} x_i; F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\right\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i; n \in \mathbb{N}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Obecný případ:

(a) Podle Věty 21.9 konverguje řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ právě tehdy, když konverguje absolutně, což je podle první části důkazu právě tehdy, když konverguje absolutně řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Navíc z Věty 21.9 dostaneme, že v tom případě konvergují i řady $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^+$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^-$ a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^+ - \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

(b) Díky tvrzení (a) zbývá ověřit případ, kdy je součet zobecněné řady $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ nevlastní. Předpokládejme nejprve, že platí $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \infty$. Zvolme $s \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset \mathbb{N}$ takovou, že platí

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \supset F\colon \sum_{n\in F'} x_n > s.$$

Položíme $n_0 = \max F$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, dostáváme $F \subset \{1, \dots, n\}$, a tedy $\sum_{i=1}^{n} x_i > s$. Tím jsme ukázali, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je ∞.

Případ $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty$ je analogický. □

Poznámka. Neabsolutně konvergentní číselná řada nemůže mít zobecněný součet. Tvrzení (b) Věty 21.12 tedy nelze obrátit.

Věta 21.13 (asociativita zobecněného součtu)**.** *Nechť J je množina a $\{I_\beta; \beta \in J\}$ je systém množin splňující $I_\beta \cap I_{\beta'} = \emptyset$ pro různé indexy $\beta, \beta' \in J$. Nechť $I = \bigcup_{\beta\in J} I_\beta$ a zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje. Potom pro každé $\beta \in J$ řada $\sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$ konverguje. Označíme-li $y_\beta = \sum_{\alpha\in I_\beta} x_\alpha$, $\beta \in J$, pak řada $\sum_{\beta\in J} y_\beta$ konverguje a platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\beta\in J} y_\beta$.*

Důkaz. Nezáporné členy: Nechť nejprve $x_\alpha \geq 0$, $\alpha \in I$. Zvolme konečnou množinu $G \subset J$ a konečné množiny $F_\beta \subset I_\beta$, $\beta \in G$. Potom množina

$$F := \bigcup_{\beta \in G} F_\beta$$

je konečná a tedy

$$\sum_{\beta \in G} \sum_{\alpha \in F_\beta} x_\alpha = \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \leq \sum_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

Přechodem k supremu přes $F_\beta \in \mathcal{F}(I_\beta)$ pro každé $\beta \in G$ (Věta 21.7(a)) dostaneme

$$\sum_{\beta \in G} y_\beta = \sum_{\beta \in G} \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha \leq \sum_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

a přechodem k supremu přes $G \in \mathcal{F}(J)$ konečně

$$\sum_{\beta \in J} y_\beta \leq \sum_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

Naopak, zvolme konečnou $F \subset I$. Pro každé $\beta \in J$ je

$$\sum_{\alpha \in F \cap I_\beta} x_\alpha \leq \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha = y_\beta,$$

tedy podle srovnávacího kritéria (Věta 21.8) je

$$\sum_{\alpha \in F} x_\alpha = \sum_{\beta \in J} \sum_{\alpha \in F \cap I_\beta} x_\alpha \leq \sum_{\beta \in J} y_\beta.$$

Přechodem k supremu přes $F \in \mathcal{F}(I)$ dostaneme

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha \leq \sum_{\beta \in J} y_\beta.$$

Obecný případ: Jestliže zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje, pak podle Věty 21.9 konvergují i zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ a aplikací první části důkazu dostaneme

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ = \sum_{\beta \in J} \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^+, \qquad \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^- = \sum_{\beta \in J} \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^-.$$

Speciálně pro každé jednotlivé $\beta \in J$ tedy konvergují $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^+$ a můžeme položit

$$y_\beta = \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^-.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in I} x_\alpha &= \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ = \sum_{\beta \in J} \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^+ - \sum_{\beta \in J} \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^- \\ &= \sum_{\beta \in J} \left(\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha^- \right) = \sum_{\beta \in J} y_\beta.\end{aligned}$$

□

Poznámka. Ve Větě 21.13 nestačí předpokládat, že konvergují jednotlivé zobecněné řady $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha$ a řada $\sum_{\beta \in J} y_\beta$. Jestliže $J = \mathbb{N}$, $I_\beta = \{-\beta, \beta\}$ pro každé $\beta \in J$ a $x_\alpha = \alpha$ pro každé $\alpha \in I = \mathbb{Z}$, pak $y_\beta = 0$ pro každé $\beta \in \mathbb{N}$, ale zobecněná řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ nemá součet.

konec distanční 20. přednášky (27.4.2020)

Věta 21.14 (Bolzanova–Cauchyova podmínka pro zobecněné řady)**.** *Zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje právě tehdy, když platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I), F' \cap F = \emptyset \colon \left| \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \right| < \varepsilon. \tag{43}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje a její součet je roven $x \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme konečnou množinu $F \subset I$ takovou, že pro každou konečnou množinu $F'' \subset I$ obsahující F platí $|\sum_{\alpha\in F''} x_\alpha - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro konečnou množinu $F' \subset I$ disjunktní s F pak platí

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \right| &= \left| \sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \right| = \left| \sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x + x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \right| \\
&\le \left| \sum_{\alpha\in F\cup F'} x_\alpha - x \right| + \left| x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

tedy podmínka (43) je splněna.

Nyní předpokládejme, že řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ splňuje podmínku (43). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak pomocí podmínky (43) pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ nalezneme konečnou množinu $F_n \subset I$ takovou, že

$$\forall F' \in \mathcal{F}(I),\ F' \cap F_n = \emptyset \colon \left| \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \right| < \frac{1}{n}. \tag{44}$$

Označme $y_n = \sum_{\alpha\in F_n} x_\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel. Pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ platí

$$|y_m - y_n| = \left| \sum_{\alpha\in F_m} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F_n} x_\alpha \right| \le \left| \sum_{\alpha\in F_m\setminus F_n} x_\alpha \right| + \left| \sum_{\alpha\in F_n\setminus F_m} x_\alpha \right|.$$

Protože $F_m \setminus F_n$ je konečná množina disjunktní s F_n, dostáváme podle (44) odhad $\left|\sum_{\alpha\in F_m\setminus F_n} x_\alpha\right| < \frac{1}{n}$. Obdobně dostaneme odhad $\left|\sum_{\alpha\in F_n\setminus F_m} x_\alpha\right| < \frac{1}{m}$. Tedy pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ máme $|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pro každá $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ge n_0$, $n \ge n_0$, platí

$$|y_m - y_n| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \le \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tudíž je posloupnost $\{y_n\}$ cauchyovská.

Díky BC podmínce pro reálná čísla tedy existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim y_n = x$. Ukážeme, že platí $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|y_{n_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $F' \subset I$ je konečná množina obsahující F_{n_0}. Potom platí

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| &= \left|\sum_{\alpha\in F_{n_0}} x_\alpha + \sum_{\alpha\in F'\setminus F_{n_0}} x_\alpha - x\right| \\ &\le \left|\sum_{\alpha\in F_{n_0}} x_\alpha - x\right| + \left|\sum_{\alpha\in F'\setminus F_{n_0}} x_\alpha\right| \\ &= \left|y_{n_0} - x\right| + \left|\sum_{\alpha\in F'\setminus F_{n_0}} x_\alpha\right|.\end{aligned}$$

Podle (44) platí

$$\left|\sum_{\alpha\in F'\setminus F_{n_0}} x_\alpha\right| < \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy celkem dostaneme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podle definice zobecněné řady tedy $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = x$. □

Příklad. Dokažte, že $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2} = \infty$.

Řešení. Protože řada sestává z nezáporných čísel, má součet. Pro přirozené číslo $j\in\mathbb{N}$ odhadneme částečný součet přes indexovou množinu

$$I_j = \{j+1,\dots,2j\}\times\{j+1,\dots,2j\},$$

tedy

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in I_j} \frac{1}{n^2+m^2} &= \sum_{m=j+1}^{2j}\sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{n^2+m^2} \ge \sum_{m=j+1}^{2j}\sum_{n=j+1}^{2j} \frac{1}{8j^2} \\ &= j^2\cdot\frac{1}{8j^2} = \frac{1}{8}.\end{aligned} \tag{45}$$

Potom množiny I_{2^j}, $j\in\mathbb{N}$, jsou disjunktní, a proto můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+m^2} &\ge \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{(n,m)\in\bigcup_{j=1}^k I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && \text{(vizte definici zobecněné řady)} \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^k \sum_{(n,m)\in I_{2^j}} \frac{1}{n^2+m^2} && \text{(disjunktnost } I_{2^j},\ j\in\mathbb{N}) \\ &\ge \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^k \frac{1}{8} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{8} = \infty. && \text{(vizte (45))}\end{aligned}$$

Příklad. Dokažte, že zobecněná řada $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3}$ je konvergentní.

Řešení. Položme

$$N_k = \{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N};\max\{m,n\}=k\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Potom je počet prvků množiny N_k pro každé $k \in \mathbb{N}$ roven $2k-1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ tedy odhadneme

$$\sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{n^3+m^3} \le \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{\max\{m,n\}^3} = \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{k^3} = \frac{2k-1}{k^3}.$$

Nechť $F \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ je libovolná konečná množina. Nalezneme $p \in \mathbb{N}$ takové, že $F \subset \bigcup_{k=1}^{p} N_k$, a dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{(n,m)\in F} \frac{1}{n^3+m^3} &\le \sum_{(n,m)\in\bigcup_{k=1}^{p} N_k} \frac{1}{n^3+m^3} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{(n,m)\in N_k} \frac{1}{n^3+m^3} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{k^3} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3}.\end{aligned}$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3}$ konverguje podle limitního srovnávacího kritéria srovnáním s konvergentní řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Z (35) tedy máme

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{n^3+m^3} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3} < \infty.$$

Příklad. Nechť Q značí množinu všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$. Dokažte, že $\sum_{q\in Q} q = \infty$.

Řešení. Protože racionálních čísel větších jak $\frac{1}{2}$ je nekonečně mnoho, je množina $\{q \in Q; q > \frac{1}{2}\}$ nekonečná, a tedy daná řada diverguje. Protože je tvořena kladnými čísly, platí $\sum_{q\in Q} q = \infty$ dle Věty 21.7(a).

22. Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

22.1. Derivace monotonní funkce.

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $x \in I$ je vnitřní bod I a $f\colon I \to \mathbb{R}$. Potom **horní derivaci** f v x definujeme předpisem

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

a **dolní derivaci** f v x předpisem

$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Poznámka. Každá monotónní funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

Věta 22.1 (míra vzoru a obrazu)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$ je neklesající, $M \subset I$ a $c > 0$.*

(a) *Jestliže $\overline{D}f(x) > c$ na M, potom $\lambda^*(f(M)) \ge c\lambda^*(M)$.*
(b) *Jestliže $\underline{D}f(x) < c$ na M, potom $\lambda^*(f(M)) \le c\lambda^*(M)$.*

Důkaz. (a) Zřejmě můžeme předpokládat, že $\lambda^*(f(M)) < \infty$. Označme S množinu bodů nespojitosti f. Víme, že tato množina je spočetná. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ takovou, že

$$G \supset f(M), \quad \lambda^*(G) < \lambda^*(f(M)) + \varepsilon.$$

Ke každému bodu $x \in M \setminus S$ uvažujme intervaly tvaru $[a, b]$ takové, že

$$x \in [a, b], \quad f(b) - f(a) \geq c(b - a) \quad \text{a} \quad [f(a), f(b)] \subset G.$$

Tyto intervaly najdeme z definice horní derivace ve tvaru $[x, x + h]$ nebo $[x - h, x]$. Tyto intervaly zřejmě tvoří vitaliovsky jemné pokrytí množiny $M \setminus S$. Vybereme disjunktní intervaly $[a_j, b_j]$ takové, že

$$\lambda^*\Big(M \setminus \bigcup_j [a_j, b_j]\Big) = 0.$$

Pak máme

$$c\lambda(M) \leq c\sum_j (b_j - a_j) \leq \sum_j (f(b_j) - f(a_j)) \leq \lambda^*(G) \leq \lambda^*(f(M)) + \varepsilon.$$

(b) Buď A množina bodů $y \in f(I)$ takových, že $f^{-1}(y)$ není jednobodová, A je spočetná množina. Zvolme $\varepsilon > 0$ a najděme otevřenou množinu $H \subset \mathbb{R}$ tak, že

$$H \supset M, \quad \lambda^*(H) < \lambda^*(M) + \varepsilon.$$

Ke každému bodu $y = f(x) \in f(M) \setminus A$ najdeme intervaly $[a, b]$ tak, že

$$x \in [a, b], \quad 0 < f(b) - f(a) \leq c(b - a) \quad \text{a} \quad [a, b] \subset H.$$

Tyto intervaly najdeme z definice dolní derivace ve tvaru $[x, x + h]$ nebo $[x - h, x]$. Intervaly $[f(a), f(b)]$ tvoří vitaliovsky jemné pokrytí množiny $f(M) \setminus A$. Vybereme distjunktní $[f(a_j), f(b_j)]$ tak, že

$$\lambda^*\Big(f(M) \setminus \bigcup_j [f(a_j), f(b_j)]\Big) = 0.$$

a máme (povšimněme si, že intervaly (a_j, b_j) jsou po dvou disjunktní)

$$\lambda^*(f(M)) \leq \sum_j (f(b_j) - f(a_j)) \leq c\sum_j (b_j - a_j) \leq c\lambda(H) \leq c(\lambda^*(M) + \varepsilon).$$

□

Věta 22.2 (derivace monotónní funkce)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je monotónní. Potom v skoro každém bodě $x \in I$ existuje $f'(x)$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že f je neklesající. Zvolme $p, q \in \mathbb{R}$, $p < q$, a označme

$$M_{p,q} = \left\{x \in I : \underline{D}f(x) < p < q < \overline{D}f(x)\right\}.$$

Podle Věty 22.1 platí

$$q\lambda^*(M_{p,q}) \leq \lambda^*(f(M_{p,q})) \leq p\lambda^*(M_{p,q}),$$

tedy

$$\lambda^*(M_{p,q}) = 0.$$

Označme M množinu všech bodů I, pro které neexistuje $f'(x)$. Potom

$$M = \bigcup_{\substack{0<p<q \\ p,q\in\mathbb{Q}}} M_{p,q},$$

a tedy $\lambda^*(M) = 0$. $\square$

Věta 22.3 (integrál derivace monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je neklesající, $M \subset [a,b]$ je měřitelná a pro každé $x \in M$ existuje vlastní $f'(x)$. Potom $f' \in L^1(M)$, $f(M)$ je měřitelná a platí*

$$\int_M f'(x)\,dx = \lambda(f(M)).$$

Důkaz. Protože M je měřitelná, existují množiny M_b a M_0 takové že, M_b je borelovská, $\lambda(M_0) = 0$ a $M = M_b \cup M_0$. Jest

$$M_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in M_0 : f'(x) \le k\}.$$

Podle Věty 22.1 pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\lambda^*(f(\{x \in M_0\colon f'(x) \le k\})) = 0$, a tedy $\lambda(f(M_0)) = 0$.

Množina M_0 je borelovská, neboť je monotónním obrazem borelovské množiny. Odtud plyne, že $f(M)$ je měřitelná. Funkce $x \mapsto f'(x)$ je limitou posloupnosti měřitelných funkcí

$$f_k(x) = k\Big(f\big(x + \tfrac{1}{k}\big) - f(x)\Big),$$

a tedy je měřitelná. Zvolme $\tau > 1$ a položme

$$E_k = \{x \in M\colon \tau^k \le f'(x) < \tau^{k+1}\} \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$

Podle Věty 22.1 pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\tau^{-2}\int_{E_k} f'(x)\,dx \le \tau^{k-1}\lambda(E_k) \le \lambda(f(E_k)) \le \tau^{k+1}\lambda(E_k) \le \tau\int_{E_k} f'(x)\,dx.$$

Sečteme-li tyto odhady přes $k \in \mathbb{Z}$, dostaneme

$$\tau^{-2}\int_M f'(x)\,dx \le \lambda(f(M)) \le \tau\int_M f'(x)\,dx.$$

Odtud vyplývá tvrzení věty pomocí limitního přechodu $\tau \to 1_+$. $\square$

22.2. Funkce s omezenou variací.

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Označme

- $V^+(f; a, b) = \sup_D \{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+\}$ (kladná variace),
- $V^-(f; a, b) = \sup_D \{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-\}$ (záporná variace),
- $V(f; a, b) = \sup_D \{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|\}$ (totální variace),

kde supremum bereme přes všechna dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ tvaru $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Dále zaveďme značení

$$V_f^+(x) = V^+(f; a, x),$$
$$V_f^-(x) = V^-(f; a, x),$$
$$V_f(x) = V(f; a, x).$$

Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ **omezenou variaci**, jestliže $V(f; a, b) < \infty$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathrm{BV}([a,b])$.

konec distanční 21. přednášky (30.4.2020)

Poznámky. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Potom

(a) $\mathrm{BV}([a,b])$ je lineární prostor a algebra,

(b) jestliže f je neklesající na $[a,b]$, potom $V(f;a,b) = V^+(f;a,b) = f(b) - f(a)$, a tedy $f \in \mathrm{BV}([a,b])$,

(c) $V(f;a,b) \geq |f(a) - f(b)|$,

(d) jestliže $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, potom $V(f;a,b) = \sum_{i=1}^n V(f;x_{i-1},x_i)$.

Příklad. Nechť R je Riemannova funkce na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda

(a) $R \in \mathrm{BV}([0,1])$,

(b) $R^2 \in \mathrm{BV}([0,1])$.

Věta 22.4 (vztah omezené variace a monotonie)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(a) *Jestliže $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, potom pro každé $x \in [a,b]$ platí $V_f(x) = V_f^+(x) + V_f^-(x)$ a $f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$.*

(b) *$f \in \mathrm{BV}(a,b)$ právě tehdy, když existují neklesající funkce $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ takové, že $f = v - u$ na $[a,b]$.*

Důkaz. (a) Zvolme $x \in [a,b]$ a dělení $a = x_0 < \cdots < x_n = x$. Potom

$$f(x)-f(a) = \sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))^-.$$

Tedy

$$f(x) - f(a) \leq V^+(f;a,x) - \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-.$$

Přechodem k supremu přes všechna dělení dostaneme

$$f(x) - f(a) \leq V^+(f;a,x) - V^-(f;a,x),$$

Obdobně platí

$$f(x) - f(a) \geq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f;a,x).$$

Přechodem k supremu přes všechna dělení dostaneme

$$f(x) - f(a) \geq V^+(f;a,x) - V^-(f;a,x),$$

takže celkem

$$f(x) - f(a) = V^+(f;a,x) - V^-(f;a,x).$$

(b) Položme

$$u(x) = V_f(x), \quad v(x) = V_f(x) - f(x) \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Potom je zřejmě u neklesající a platí $f = u - v$ na $[a,b]$. Zvolme x, y splňující $a \leq x \leq y \leq b$. Potom

$$v(y) - v(x) = V_f(y) - V_f(x) - (f(y) - f(x)) = V(f;x,y) - (f(y) - f(x)) \geq 0,$$

a tedy v je neklesající na $[a,b]$. $\square$

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom mezi třídami $\mathrm{BV}([a,b])$ a $C([a,b])$ není vztah. Funkce $x \sin \frac{1}{x^2}$ dodefinovaná nulou v nule je spojitá, ale nemá konečnou variaci na $[0,1]$. Charakteristická funkce intervalu $[0,1]$ má konečnou variaci, ale není spojitá na $[-1,1]$.

Věta 22.5 (vlastnosti funkcí s omezenou variací)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathrm{BV}([a, b])$. Potom f je omezená, má jen spočetně mnoho bodů nespojitosti, v každém bodě má limitu zleva a zprava a skoro všude má vlastní derivaci.*

Důkaz. Všechna tvrzení jsou bezprostředním důsledkem odpovídajících vlastností neklesajících funkcí a Věty 22.4. □

22.3. **Absolutně spojité funkce.**

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je **absolutně spojitá** na $[a, b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý systém intervalů $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \dots \le a_n \le b_n \le b$ a $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$ platí $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$. Množinu všech absolutně spojitých funkcí na $[a, b]$ značíme $\mathrm{AC}([a, b])$.

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom konečný systém intervalů $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \dots \le a_n \le b_n \le b$, budeme někdy nazývat systémem nepřekrývajících se podintervalů $[a, b]$.

Poznámky. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom

(a) $\mathrm{AC}([a, b])$ je lineární prostor a algebra,

(b) $\mathrm{Lip}([a, b]) \subset \mathrm{AC}([a, b]) \subset \mathrm{BV}([a, b]) \cap C([a, b])$, přičemž žádnou z inkluzí nelze obrátit. Funkce $x \mapsto \sqrt{x}$ je prvkem $\mathrm{AC}([a, b]) \setminus \mathrm{Lip}([a, b])$ a Cantorova funkce je prvkem $\mathrm{BV}([a, b]) \cap C([a, b]) \setminus \mathrm{AC}([a, b])$.

Lemma 22.6. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom $f \in \mathrm{AC}([a, b])$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každý systém $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$ nepřekrývajících se podintervalů $[a, b]$ splňující $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ platí $\sum_{i=1}^n V(f; a_i, b_i) < \varepsilon$.*

Důkaz. $\Leftarrow$ Tvrzení plyne z toho, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$V(f; a_i, b_i) \ge |f(b_i) - f(a_i)|.$$

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme příslušné $\delta > 0$ z definice absolutní spojitosti f. Zvolme systém intervalů $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \dots \le a_n \le b_n \le b$ a $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ zvolme dělení $\{\alpha_j^i\}_{j=0}^{m_i}$ intervalu $[a_i, b_i]$. Potom

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i - 1} (\alpha_{j+1}^i - \alpha_j^i) < \delta.$$

Protože $\{[\alpha_j^i, \alpha_{j+1}^i] : j \in \{0, \dots, m_i\},\ i \in \{1, \dots, n\}\}$ tvoří konečný systém nepřekrývajících se podintervalů $[a, b]$, platí

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i - 1} |f(\alpha_{j+1}^i) - f(\alpha_j^i)| < \varepsilon.$$

Přechodem k supremu přes všechna dělení dostaneme z definice variace

$$\sum_{i=1}^n V(f; a_i, b_i) < \varepsilon.$$

□

Věta 22.7 (variace absolutně spojité funkce). *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. *Potom* $V_f^+, V_f^- V_f \in \mathrm{AC}([a,b])$.

Důkaz. Tvrzení bezpostředně plyne z Lemmatu 22.6. $\square$

Věta 22.8 (Luzinova N vlastnost). *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,$f \in \mathrm{AC}([a,b])$ *a* $N \subset [a,b]$, $\lambda(N) = 0$. *Potom*

$$\lambda^*(f(N)) = 0.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ z definice absolutní spojitosti. Dále nalezneme otevřenou množinu $G \subset (a,b)$ obsahující $N \cap (a,b)$ a splňující $\lambda(G) < \delta$. Potom existuje disjunktní systém otevřených intervalů $\{(a_j, b_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ takový, že $G = \bigcup_j (a_j, b_j)$. Obraz každého intervalu $[a_j, b_j]$ je uzavřený interval $[\alpha_j, \beta_j]$. Nalezneme $x_j, y_j \in [a,b]$, $j \in \mathbb{N}$, taková, že $[x_j, y_j] \subset [a_j, b_j]$, že $\{f(x_j), f(y_j)\} = \{\alpha_j, \beta_j\}$. Potom pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{j\le m} (y_j - x_j) < \delta,$$

takže

$$\sum_{j\le m} (\beta_j - \alpha_j) = \sum_{j\le m} |f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon.$$

Limitním přechodem $m \to \infty$ dostaneme

$$\lambda^*(f(N)) \le \sum_j (\beta_j - \alpha_j) \le \varepsilon,$$

a tedy $\lambda^*(f(N)) = 0$. $\square$

konec distanční 22. přednášky (4.5.2020)

Věta 22.9 (integrál derivace absolutně spojité funkce). *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *a* $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. *Potom* $f' \in L^1([a,b])$ *a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že f je neklesající na $[a,b]$. Označme

$$N = \{x \in [a,b] : \text{neexistuje } f'(x)\}.$$

Z monotonie f plyne, že

$$f(b) - f(a) = \lambda(f([a,b])) = \lambda(f([a,b] \setminus N)) + \lambda(f(N)).$$

Podle Věty 22.3 platí

$$\lambda(f([a,b] \setminus N)) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Podle Věty 22.2 platí $\lambda(N) = 0$, a tedy podle Věty 22.8 jest

$$\lambda(f(N)) = 0.$$

Díky aditivitě Lebesgueovy míry tedy celkem dostáváme

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

V obecném případě nalezneme neklesající funkce u, v takové, že $f = u - v$. Podle Věty 22.7 a důkazu Věty 22.4 lze předpokládat, že $u, v \in \mathrm{AC}([a, b])$. Potom $f' = u' - v'$, a tedy tvrzení plyne z již dokázaného případu. $\square$

Věta 22.10 (neurčitý Lebesgueův integrál)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\theta \in L^1([a, b])$ a $C \in \mathbb{R}$. Definujme $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ předpisem*

$$f(x) = \int_a^x \theta(t)\,dt + C. \tag{46}$$

Potom $f \in \mathrm{AC}([a, b])$ a $f' = \theta$ skoro všude na $[a, b]$.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každou měřitelnou množinu M platí

$$\lambda(M) < \delta \implies \int_M |\theta|\,dx < \varepsilon$$

(to lze díky tomu, že $\theta \in L^1([a, b])$). Uvažujme konečný systém nepřekrývajících se intervalů $\{[a_j, b_j]\}_{j=1}^n$ splňující

$$\lambda\Big(\bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]\Big) = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta.$$

Potom

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| \le \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |\theta(x)|\,dx = \int_{\bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]} |\theta(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Víme (s pomocí Věty 22.9), že f je neurčitý Lebesgueův integrál funkcí θ a f'. Potom 0 je neurčitý Lebesgueův integrál funkce $\psi = \theta - f'$. Nechť $\mathcal{A}$ je systém všech množin A, pro které je $\int_A \psi(x)\,dx = 0$. Potom $\mathcal{A}$ zahrnuje intervaly, limitním přechodem zahrneme do $\mathcal{A}$ postupně otevřené množiny a měřitelné množiny. Volbou $A^+ = \{x\colon \psi(x) > 0\}$ a $A^- = \{x\colon \psi(x) < 0\}$ dostaneme $\psi = 0$ skoro všude v $[a, b]$. $\square$

Věta 22.11 (absolutní spojitost a neurčitý integrál)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Potom $f \in \mathrm{AC}([a, b])$ právě tehdy, když existují $\theta \in L^1([a, b])$ a $C \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$f(x) = \int_a^x \theta(t)\,dt + C \quad \textit{pro } x \in [a, b].$$

Důkaz. $\Leftarrow$ Tvrzení bezprostředně plyne z Věty 22.10.

$\Rightarrow$ Z Věty 22.9 plyne, že $f' \in L^1([a, b]$ a

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + f(a) \quad \text{pro } x \in [a, b],$$

stačí tedy položit $\theta = f$ a $C = f(a)$. $\square$

Věta 22.12 (integrace per partes pro Lebesgueův integrál)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f, g \in \mathrm{AC}([a, b])$. Potom*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Důkaz. Protože AC($[a, b]$) je algebra, platí $fg \in$ AC($[a, b]$). Podle Věty 22.9 tedy platí
$$[fg]_a^b = \int_a^b (fg)'(x)\, dx.$$
Označme
$$M = \{x \in [a, b] : \text{existují } f'(x),\ g'(x) \text{ a } (fg)'(x)\}\,.$$
Podle Věty 22.4(b) platí $\lambda([a, b] \setminus M) = 0$. Podle věty o aritmetice derivací platí $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ pro každé $x \in M$, a tedy skoro všude na $[a, b]$. Tedy
$$\int_a^b (fg)'(x)\, dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\, dx.$$
Podle Věty 22.9 máme $f' \in L^1([a, b])$ a $g' \in L^1([a, b])$. Protože f, g jsou spojité a omezené na $[a, b]$, platí $f'g \in L^1([a, b])$ a $fg' \in L^1([a, b])$. Z linearity integrálu tudíž plyne
$$\int_a^b (fg)'(x)\, dx = \int_a^b f'(x)g(x)\, dx + \int_a^b f(x)g'(x)\, dx,$$
a tedy celkem
$$[fg]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\, dx + \int_a^b f(x)g'(x)\, dx.$$
Odtud plyne tvrzení. □

23. Fourierovy řady

23.1. **Základní pojmy.**

Definice. (a) **Trigonometrickou řadou** rozumíme řadu funkcí

(47)
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $c_k \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{Z}$.

(b) **Trigonometrickým polynomem** rozumíme funkci tvaru

(48)
$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k = -n, \dots, n$. **Stupněm** trigonometrického polynomu (48) rozumíme největší $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že $|c_k| + |c_{-k}| \neq 0$.

Poznámka. Řada (47) konverguje, jestliže konverguje posloupnost
$$\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\}_{n=0}^{\infty}.$$

Věta 23.1 (Fourierovy koeficienty). *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ je posloupnost komplexních čísel a $\{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\}_{n=0}^{\infty} \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{Z}$ platí*
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

konec distanční 23. přednášky (7.5.2020)

Důkaz. Zvolme $m \in \mathbb{Z}$. Potom

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t} \rightrightarrows f(t)e^{-imt} \text{ na } \mathbb{R},$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(t)e^{-imt}\,dt &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t}\,dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(k-m)t}\,dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t}\,dt \\
&= 2\pi c_m,
\end{aligned}$$

neboť

$$\int_0^{2\pi} e^{ijt}\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos jt + i\sin jt) = \begin{cases} 0, & j \neq 0, \\ 2\pi, & j = 0. \end{cases}$$

Odtud plyne tvrzení. □

Značení. Množinu všech 2π-periodických funkcí s hodnotami v $\mathbb{C}$, které jsou integrovatelné na intervalu $[0, 2\pi]$, budeme značit $\mathcal{P}_{2\pi}$.

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Položme

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Čísla $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, se nazývají **Fourierovy koeficienty** f. Řada

$$s^f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

se nazývá **Fourierova řada** f. Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou značíme $f \sim s^f$. Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jejím n**-tým částečným součtem** rozumíme funkci

$$s_n^f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jestliže $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ a $\lim_{n\to\infty} s_n^f(t) = s$, pak říkáme, že **součet Fourierovy řady** f v t je roven s.

Poznámka. Místo trigonometrického systému funkcí $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ často ekvivalentně pracujeme se systémem $\{1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots, \cos(kt), \sin(kt), \dots\}$. Připomeňme vztahy

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ položme

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potom
$$\hat{f}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
neboli
$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k), \quad b_k = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Navíc platí
$$a_{-k} = a_k, \quad b_{-k} = -b_k \quad \text{pro } k \in \mathbb{Z}.$$
Tedy pro každé $k \in \mathbb{Z}$ a každé $t \in \mathbb{R}$ platí
$$\begin{aligned}
\hat{f}(k)e^{ikt} + \hat{f}(-k)e^{-ikt} &= \frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikt} + \frac{a_{-k} - ib_{-k}}{2}e^{-ikt} \\
&= \frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikt} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ikt} \\
&= \frac{a_k}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt}) - i\frac{b_k}{2}(e^{ikt} - e^{-ikt}) \\
&= a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt).
\end{aligned}$$
Tedy
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{R}$$
a
$$s_n^f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{R} \text{ a } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
Je-li f reálná funkce, pak jsou zřejmě a_k, b_k reálná čísla pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Odtud plyne, že je-li f reálná funkce, pak jsou též částečné součty její Fourierovy řady reálné.

Poznámka. Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ sudá, potom $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, a
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
Je-li f lichá, potom $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a
$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Trigonometrickou řadu
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt), \quad t \in \mathbb{R},$$
nazýváme **cosinovou řadou** a trigonometrickou řadu
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R},$$
nazýváme **sinovou řadou**.

Poznámka. Symbol $f \sim s^f$ označuje pouze fakt, že řada stojící vpravo je Fourierovou řadou funkce stojící vlevo. Nevypovídá nic o případné konvergenci řady s^f (stejnoměrné ani bodové). Nelze jej zaměňovat za symbol $f = s^f$, který by znamenal, že řada vpravo bodově konverguje a jejím bodovým součtem je funkce f.

Poznámka. Fourierovy řady lze definovat pro funkce s libovolnou periodou $\ell > 0$. Řada má pak tvar

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{\frac{2\pi i k t}{\ell}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\frac{2\pi t}{\ell}) + b_k \sin(\frac{2\pi t}{\ell}) \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

a vzorce pro koeficienty mají odpovídající tvar.

Příklad. Nechť $f(t) = t^2$ pro $t \in [-\pi, \pi)$ a $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Nalezněte Fourierovu řadu funkce f.

Řešení. Funkce f je sudá, a tedy $b_k = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a navíc

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{2\pi^2}{3}$$

a

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt) \, dt = \frac{(-1)^k 4}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tedy

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kt)}{k^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kdybychom věděli, že řada s^f konverguje k funkci f (alespoň bodově), získali bychom po dosazení postupně $t = 0$ a $t = \pi$ vzorce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Lemma 23.2. *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $a \in \mathbb{R}$. Pak $\int_0^{2\pi} f(t) \, dt = \int_a^{a+2\pi} f(t) \, dt$.*

Důkaz. Z věty o substituci dostáváme $\int_\alpha^\beta f(t) \, dt = \int_{\alpha+2k\pi}^{\beta+2k\pi} f(t) \, dt$, $\alpha < \beta$, $k \in \mathbb{Z}$. Nalezneme $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a \le 2k\pi < a + 2\pi$. Potom

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} f(t) \, dt &= \int_a^{2k\pi} f(t) \, dt + \int_{2k\pi}^{a+2\pi} f(t) \, dt \\ &= \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t) \, dt + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(t) \, dt. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom v definici $\{\hat{f}(k)\}$, a tedy také $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$ lze integrovat přes libovolný interval délky 2π, tedy

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \cos(kt) \, dt, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t) \sin(kt) \, dt, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$. Nejčastěji se používá $a = 0$ nebo $a = -\pi$.

Definice. Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom **konvoluci** funkcí f a g definujeme předpisem

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom $f*g$ je dobře definovaná skoro všude konečná měřitelná funkce.

Poznámka. Konvoluce je komutativní na $\mathcal{P}_{2\pi}$. Zvolme $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $t \in \mathbb{R}$. Potom podle věty o substituci a Lemmatu 23.2 platí

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-s)g(s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau = (g * f)(t).\end{aligned}$$

konec distanční 24. přednášky (11.5.2020)

23.2. **Cesàrovská sčítatelnost Fourierových řad.**

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **cesàrovsky sčítatelná**, jestliže existuje $\sigma \in \mathbb{C}$ splňující

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1} = \sigma,$$

kde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$ pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. V takovém případě říkáme, že σ je **cesàrovský součet** řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a píšeme $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$.

Poznámka. Cesàrovská sčítací metoda je **regulární** v následujícím smyslu: jestliže $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, pak $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$. Opačná implikace neplatí, protože například pro $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergentní, ale $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Položme

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Potom funkci D_n nazýváme **Dirichletovým jádrem**.

Lemma 23.3 (vlastnosti Dirichletova jádra)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom*

(a) *pro každé $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí*

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})},$$

(b) *D_n je spojitá, sudá, 2π-periodická a $D_n(0) = 2n+1$,*

(c) *$\int_0^{2\pi} D_n(t)\, dt = 2\pi$,*

(d) *pro každou $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ platí $s_n^f = f * D_n$ na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. (a) Pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} (e^{it})^k = e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}. \end{aligned}$$

Tvrzení (b) a (c) jsou zřejmá. Dále platí

$$\begin{aligned} s_n^f(t) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks} \, ds \right) e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(s) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)} \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) D_n(t-s) \, ds \\ &= (D_n * f)(t) = (f * D_n)(t). \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení (d). □

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Položme

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Potom funkci K_n nazýváme **Fejérovým jádrem**.

Značení. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Označme

$$\sigma_n^f(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j^f(t) \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}.$$

Lemma 23.4 (vlastnosti Fejérova jádra)**.** *Nechť* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(a) *Pro každé* $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ *platí*

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^2.$$

(b) *Funkce* K_n *je spojitá, nezáporná, sudá,* 2π*-periodická a* $K_n(0) = n+1$.

(c) *Platí* $\int_0^{2\pi} K_n(t) \, dt = 2\pi$.

(d) *Pro každou* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *platí* $\sigma_n^f = f * K_n$.

(e) *Platí* $K_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ *na* $(0, 2\pi)$.

Důkaz. (a) Zvolme $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Potom

$$\sum_{k=0}^{n} e^{(2k+1)it} = e^{it} \sum_{k=0}^{n} (e^{2it})^k = e^{it} \frac{1 - e^{2i(n+1)t}}{1 - e^{2it}}$$

$$\frac{1 - e^{2i(n+1)t}}{e^{-it} - e^{it}} = \frac{1 - \cos(2(n+1)t) - i\sin(2(n+1)t)}{-2i\sin(t)}.$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{n}\sin((2k+1)t) = \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{n} e^{(2k+1)it} = \operatorname{Im}\frac{1-\cos(2(n+1)t) - i\sin(2(n+1)t)}{-2i\sin(t)}$$
$$= \frac{1-\cos(2(n+1)t)}{2\sin(t)} = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}.$$

Podle Lemmatu 23.3(a) platí

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n}\sin((k+\frac{1}{2})t)}{(n+1)\sin(\frac{t}{2})} = \frac{1}{n+1}\frac{(\sin((n+1)\frac{t}{2}))^2}{(\sin(\frac{t}{2}))^2}.$$

Odtud plyne tvrzení (a). Tvrzení (b) a (c) jsou zřejmá. Tvrzení (d) plyne z toho, že

$$(f*K_n)(t) = \frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi} f(t-s)\sum_{j=0}^{n} D_j(s)\,ds = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_j^f(t) = \sigma_n^f(t).$$

Pro důkaz tvrzení (e) zvolme $\delta \in (0,\pi)$. Potom

$$0 \le K_n(t) \le \frac{1}{n+1}\frac{1}{(\sin(\frac{\delta}{2}))^2} \quad \text{pro každé } t \in [\delta, 2\pi-\delta],$$

a tedy $K_n \rightrightarrows 0$ na $[\delta, 2\pi-\delta]$. Protože δ bylo zvoleno libovolně, z charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu vyplývá, že $K_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,2\pi)$. □

Poznámka. Fejérovo jádro má některé „lepší“ vlastnosti než Dirichletovo jádro. Například je nezáporné a navíc splňuje $K_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0,2\pi)$. To neplatí pro Dirichletovo jádro, neboť například $D_n(\pi) = \frac{(-1)^n}{2}$.

Značení. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{R}$. Budeme značit $f(t+) = \lim_{s\to t_+} f(s)$ a $f(t-) = \lim_{s\to t_-} f(s)$, pokud tyto limity existují.

Značení. Pro $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ budeme značit $\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$.

Věta 23.5 (Fejér)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $t \in \mathbb{R}$.*

(a) *Jestliže existují vlastní $f(t+)$ a $f(t-)$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^f(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}.$$

(b) *Jestliže $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a f spojitá na $(a,b) \subset \mathbb{R}$, potom $\sigma_n^f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b).*

Důkaz. (a) Zvolme $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a označme $s = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$. Podle Lemmatu 23.4(b) je K_n sudá. Podle věty o substituci tudíž platí

$$\int_{-\pi}^{0} (f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau = \int_0^{\pi} (f(t+\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau,$$

a tedy

$$\sigma_n^f(t) - s = (f*K_n)(t) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-\tau)K_n(\tau)\,d\tau - s.$$

Podle Lemmatu 23.4(c) tedy platí

$$\sigma_n^f(t) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau.$$

Podle Lemmatu 23.4(b) je $K_n \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Podle Lemmatu 23.2, věty o substituci a linearity integrálu tudíž dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\pi}^{0} (f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau + \int_0^{\pi} (f(t-\tau)-s)K_n(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^{\pi} (f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s)K_n(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Kombinací všech vztahů tedy dostaneme

$$\sigma_n^f(t) - s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s)K_n(\tau)\,d\tau.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu platí

$$\lim_{\tau\to 0_+} (f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s) = 0.$$

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$|f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s| < \varepsilon \quad \text{pro každé } \tau \in (0,\delta).$$

K tomuto δ nalezneme díky Lemmatu 23.4(e) $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $K_n(\tau) < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$ a každé $\tau \in [\delta, \pi]$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Potom

$$\begin{aligned}\left|\sigma_n^f(t) - s\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s|\,K_n(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} |f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s|\,K_n(\tau)\,d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s|\,K_n(\tau)\,d\tau \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\delta} K_n(\tau)\,d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s|\,d\tau.\end{aligned}$$

Podle Lemmatu 23.4(c) platí

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\delta} K_n(\tau)\,d\tau \leq \varepsilon.$$

Dále jest

$$\int_{\delta}^{\pi} |f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s|\,d\tau \leq \int_0^{\pi} (|f(t+\tau)|+|f(t-\tau)|)\,d\tau + 2\pi|s|$$

a z Lemmatu 23.2 plyne, že

$$\int_0^{\pi} (|f(t+\tau)|+|f(t-\tau)|)\,d\tau \leq 2\|f\|_1,$$

takže celkem máme

$$\left|\sigma_n^f(t) - s\right| \leq \varepsilon\left(1 + \frac{\|f\|_1}{\pi} + |s|\right).$$

Tedy $\sigma_n^f(t) \to s$ pro $n \to \infty$.

(b) Zvolme $A, B \in \mathbb{R}$ splňující $a < A < B < b$. Nalezneme $\omega \in (0, \pi)$ takové, že $[A-\omega, B+\omega] \subset (a,b)$. Označme

$$M = \sup\{|f(t)|\,; t \in [A,B]\}.$$

Ze spojitosti f na $[a,b]$ plyne $M \in \mathbb{R}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Díky stejnoměrné spojitosti f na $[A-\omega, B+\omega]$ nalezneme $\delta \in (0,\omega)$ takové, že

$$\forall t \in [A,B]\ \forall \tau \in (-\delta,\delta) : |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon.$$

Dále nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, a každé $t \in [\delta, 2\pi-\delta]$ platí $K_n(t) < \varepsilon$. Potom pro každá $t \in [A,B]$ a $n \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_n^f(t) - f(t)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-\tau) - f(t))\, K_n(\tau)\, d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(t-\tau) - f(t)|\, K_n(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(t-\tau) - f(t)|\, K_n(\tau)\, d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(t-\tau) - f(t)|\, K_n(\tau)\, d\tau \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(t-\tau) - f(t)|\; d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)\, d\tau + \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(t-\tau) - f(t)|\; d\tau \\
&\leq \varepsilon\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|\; du + |f(t)| + 1\right) \\
&\leq \varepsilon\left(\frac{\|f\|_1}{2\pi} + M + 1\right).
\end{aligned}$$

Tedy $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[A,B]$. Protože A, B byla zvolena libovolně, z charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu vyplývá, že $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na (a,b). $\square$

konec distanční 25. přednášky (14.5.2020)

Poznámka. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$ a existují vlastní limity $f(t+)$ a $f(t-)$. Potom z Fejérovy věty a regularity cesàrovské sčítací metody vyplývá, že jediným možným kandidátem na $s^f(t)$ je $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$ (tedy $f(t)$, je-li f spojitá v t).

Věta 23.6 (trigonometrická verze Weierstrassovy věty)**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je spojitá 2π-periodická funkce. Potom existuje posloupnost trigonometrických polynomů, která stejnoměrně konverguje k f na $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Podle Fejérovy věty platí $\sigma_n^f \rightrightarrows f$ na $[0, 2\pi]$, tedy i na $\mathbb{R}$. Tvrzení plyne z toho, že pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je σ_n^f trigonometrický polynom. $\square$

Poznámka. Je-li f reálná, jsou i funkce σ_n^f reálné.

Poznámka. Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$ a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$, kde $\|g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,2\pi)} |g(t)|$.

Věta 23.7 (konvergence v L^1-normě)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom $\lim_{n\to\infty} \left\|f - \sigma_n^f\right\|_1 = 0$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme spojitou funkci $g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ takovou, že $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Protože $\sigma_n^g \rightrightarrows g$ na $\mathbb{R}$, platí $\|g-\sigma_n^g\|_1 \to 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí $\|g-\sigma_n^g\|_1 < \varepsilon$. Potom pro každé $n \geq n_0$ máme

$$\begin{aligned}\left\|f-\sigma_n^f\right\|_1 &\leq \|f-g\|_1 + \|g-\sigma_n^g\|_1 + \left\|\sigma_n^g - \sigma_n^f\right\|_1 \leq \varepsilon + \varepsilon + \|(g-f) * K_n\|_1 \\ &\leq 2\varepsilon + \|g-f\|_1 \|K_n\|_1 \leq (2+2\pi)\varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení. □

Věta 23.8 (Riemannovo-Lebesgueovo lemma)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom*

$$\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme spojitou funkci $g\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ takovou, že $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Dále nalezneme díky Větě 23.6 trigonometrický polynom T takový, že $\|g-T\|_\infty < \varepsilon$. Potom

$$\|f-T\|_1 \leq \|f-g\|_1 + \|g-T\|_1 < 2\varepsilon.$$

Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall k \in \mathbb{Z}, |k| \geq k_0 : \hat{T}(k) = 0.$$

Potom pro každé $k \in \mathbb{Z}$ splňující $|k| \geq k_0$ platí

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(k)\right| = \left|\hat{f}(k) - \hat{T}(k)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(t)-T(t))\, e^{-int}\, dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\|f-T\|_1 \left\|e^{-int}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\pi},\end{aligned}$$

a tedy $\lim_{k\to\pm\infty} \hat{f}(k) = 0$. □

Věta 23.9 (o lokalizaci)**.** *Nechť $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $f(\tau) = g(\tau)$ pro $\tau \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Potom $\lim_{n\to\infty} s_n^f(t) - s_n^g(t) = 0$.*

Důkaz. Položme

$$h(\tau) = \frac{f(t-\tau) - g(t-\tau)}{\sin\frac{\tau}{2}} \quad \text{pro } \tau \in \mathbb{R}.$$

Potom $h(\tau) = 0$ pro každé $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a tedy $h \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned} s_n^f(t) - s_n^g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-\tau) - g(t-\tau))\, D_n(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\tau)\sin((n+\frac{1}{2})\tau)\, d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \left(h(\tau)e^{i\frac{\tau}{2}}e^{in\tau} - h(\tau)e^{-i\frac{\tau}{2}}e^{-in\tau}\right)\, d\tau.\end{aligned}$$

Funkce $\tau \mapsto h(\tau)e^{i\frac{\tau}{2}}$ a $\tau \mapsto h(\tau)e^{-i\frac{\tau}{2}}$ jsou lebesgueovsky integrovatelné na $[0,2\pi]$, a tedy patří do $\mathcal{P}_{2\pi}$. Podle Věty 23.8 tudíž platí $\lim_{n\to\infty}\left(s_n^f(t) - s_n^g(t)\right) = 0$. □

Věta 23.10 (Fourierovy koeficienty určují funkci)**.** *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Jestliže $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$, potom $f = g$ skoro všude.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle Věty 23.7 nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f - \sigma_n^f\|_1 < \varepsilon$ a $\|g - \sigma_n^g\|_1 < \varepsilon$. Protože $\sigma_n^f = \sigma_n^g$, dostáváme

$$\|f - g\|_1 \leq \|f - \sigma_n^f\|_1 + \|g - \sigma_n^g\|_1 < 2\varepsilon.$$

Protože ε bylo zvoleno libovolně, plyne odtud, že $\|f - g\|_1 = 0$, a tedy $f = g$ skoro všude. □

konec distanční 26. přednášky (18.5.2020)

Definice. **Sčítací metodou** (případně **limitovací metodou**) A nazýváme nekonečnou dolní trojúhelníkovou matici $A = (c_{n,k})$, kde $c_{n,k} \in \mathbb{R}$, $c_{n,k} = 0$ pro $k > n$. Sčítací metodu chápeme jako předpis, který dané posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ přiřazuje posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou předpisem

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} a_k, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Jestliže $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost, pak definujeme A-součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ předpisem $(A) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} s_k$.

Věta 23.11 (Toeplitz)**.** *Nechť A je sčítací metoda daná maticí $A = (c_{n,k})$. Potom A je regulární právě tehdy, když jsou splněny následující tři podmínky:*
(a) *pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\lim_{n\to\infty} c_{n,k} = 0$,*
(b) *platí $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} = 1$,*
(c) *existuje $C > 0$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\sum_{k=0}^{n} |c_{n,k}| \leq C$.*

Poznámka. Cesàrovská sčítací metoda odpovídá matici $A = (c_{n,k})$, kde

$$c_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{pro } k \leq n \\ 0 & \text{pro } k > n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases}$$

a z Toeplitzovy věty vyplývá, že je regulární.

Poznámka. Metoda Fejérových součtů σ_n^f je aplikací Cesàrovy sčítací metody na posloupnost částečných součtů Fourierovy řady s_n^f dané funkce f.

23.3. **Bodová konveregence Fourierových řad.**

Věta 23.12 (Hardy)**.** *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel a $s \in \mathbb{C}$. Nechť existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $|ka_k| \leq K$. Jestliže $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.*

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n,$$
$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + \cdots + s_n).$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\lambda \in (1, \infty)$ takové, že $K(\lambda - 1) < \varepsilon$. Potom

$$\sum_{n<k\leq[\lambda n]} |a_k| \leq \frac{K}{n}(\lambda n - n) = K(\lambda - 1). \tag{49}$$

Elementárními úpravami obdržíme

$$\begin{aligned}&([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n = s_{n+1}+\cdots+s_{[\lambda n]}\\&=([\lambda n]-n)\,s_n+([\lambda n]-n)\,a_{n+1}+([\lambda n]-n-1)\,a_{n+2}+\cdots+a_{[\lambda n]}.\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}&([\lambda n]-n)\,(s_n-\sigma_n)\\&=([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}-(n+1)\sigma_n-\sum_{n<k\leq[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)\,a_k-([\lambda n]-n)\,\sigma_n\\&=([\lambda n]+1)\,\sigma_{[\lambda n]}-([\lambda n]+1)\,\sigma_n-\sum_{n<k\leq[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)\,a_k.\end{aligned}$$

Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $(\lambda-1)n_0-1>0$. Potom pro $n\geq n_0$ máme

$$s_n-\sigma_n=\frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n}\left(\sigma_{[\lambda n]}-\sigma_n\right)-\frac{1}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\leq[\lambda n]}([\lambda n]+1-k)\,a_k,$$

a tedy z (49) platí

$$\begin{aligned}&|s_n-\sigma_n|\\&\leq\frac{\lambda n+2}{(\lambda-1)n-1}\left(\left|\sigma_{[\lambda n]}-s\right|+|\sigma_n-s|\right)-\frac{\lambda n+1-n}{[\lambda n]-n}\sum_{n<k\leq[\lambda n]}|a_k|\\&\leq\frac{\lambda n+2}{(\lambda-1)n-1}\left(\left|\sigma_{[\lambda n]}-s\right|+|\sigma_n-s|\right)+\frac{(\lambda-1)n+1}{(\lambda-1)n-1}K(\lambda-1).\end{aligned}$$

Tedy

$$\limsup_{n\to\infty}\|s_n-\sigma_n\|_\infty\leq\frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot 0+K(\lambda-1)<\varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, platí

$$\lim_{n\to\infty}\|s_n-\sigma_n\|_\infty=0,$$

a tedy

$$s_n\rightrightarrows s.$$

□

Poznámka. Platí následující „stejnoměrná“ verse Hardyovy věty. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost komplexních funkcí na množině $M\subset\mathbb{R}$ taková, že existuje $K\in\mathbb{R}$ splňující $|ka_k(t)|\leq K$ pro každá $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ a $t\in M$. Jestliže $(C)\sum_{n=0}^\infty a_n\rightrightarrows s$ na množině M, potom $\sum_{n=0}^\infty a_n\rightrightarrows s$ na M.

Věta 23.13 (omezená variace a Fourierovy koeficienty)**.** *Nechť f je 2π-periodická funkce s konečnou variací na $[0,2\pi]$. Potom existuje $K\in\mathbb{R}$ takové, že pro každé $k\in\mathbb{Z}$ platí $\left|k\hat{f}(k)\right|\leq K$.*

Důkaz. Jelikož pro $n\in\mathbb{Z}$ platí

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}\,dt,$$

substitucí $s=t-\frac{\pi}{n}$ pro $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ dostaneme

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}}f(s+\frac{\pi}{n})e^{-ins+i\pi}\,ds=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(s+\frac{\pi}{n})e^{-ins}\,ds.$$

Proto
$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2}(\hat{f}(n) + \hat{f}(n)) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \Big(f(t) - f(t+\frac{\pi}{n})\Big)\, e^{-int}\, dt,$$
a tedy
$$\Big|\hat{f}(n)\Big| \leq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \Big|f(t) - f(t+\frac{\pi}{n})\Big|\, dt.$$
Po další substituci obdržíme použitím periodicity rovnost
$$\int_0^{2\pi} \Big|f(t+k\frac{\pi}{n}) - f(t+(k-1)\frac{\pi}{n})\Big|\, dt = \int_0^{2\pi} \Big|f(t+\frac{\pi}{n}) - f(t)\Big|\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Máme tedy pro $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ odhad
$$\begin{aligned}
\Big|\hat{f}(n)\Big| &\leq \frac{1}{8\pi n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{2\pi} \Big|f(t+\frac{\pi}{n}) - f(t)\Big|\, dt \\
&= \frac{1}{8\pi n}\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{2\pi} \Big|f(t+k\frac{\pi}{n}) - f(t+(k-1)\frac{\pi}{n})\Big|\, dt \\
&= \frac{1}{8\pi n}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{2n} \Big|f(t+k\frac{\pi}{n}) - f(t+(k-1)\frac{\pi}{n})\Big|\, dt \\
&\leq \frac{1}{8\pi n}\int_0^{2\pi} V(f;0,2\pi)\, dt \\
&= \frac{V(f;0,2\pi)}{4\pi n}.
\end{aligned}$$

□

Věta 23.14 (Jordanovo-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$.*

(a) *Nechť $t \in \mathbb{R}$. Potom existují vlastní $f(t-)$ a $f(t+)$ a*
$$\lim_{n\to\infty} s_n^f(x) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

(b) *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a f je spojitá na (a, b). Potom $s_n^f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a, b).*

Důkaz. (a) Nechť f je funkce s konečnou variací. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je reálná. Potom $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou neklesající. Protože každá neklesající funkce má vlastní jednostranné limity, má je i f. Podle Věty 23.5 platí $\sigma_n(f)(t) \to \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$. Protože dle Věty 23.13 splňují koeficienty odhady nutné pro použití Věty 23.12, konvergují k $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$ i součty $s_n^f(t)$.

(b) Tvrzení lze dokázat obdobně jako tvrzení (a), přičemž je třeba použít Větu 23.5(b).

□

konec distanční 27. přednášky (21.5.2020)

Věta 23.15 (Diniovo kritérium)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{C}$ a existuje $\delta > 0$ takové, že*
$$\int_0^{\delta} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s}{\tau}\, d\tau$$

konverguje. Potom $s^f(t) = s$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\delta \in (0, \pi)$. Podle Lemmatu 23.3 platí

$$\begin{aligned}
s_n^f(t) - s &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t-\tau) D_n(\tau)\, d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s D_n(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t-\tau) - s \right) D_n(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \left(f(t-\tau) - s \right) D_n(t)\, d\tau + \int_0^{\pi} \left(f(t-\tau) - s \right) D_n(\tau)\, d\tau \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s \right) D_n(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s}{\sin\frac{\tau}{2}} \sin((n+\tfrac{1}{2})\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s}{\tau} \frac{\tau}{\sin\frac{\tau}{2}} \sin((n+\tfrac{1}{2})\tau)\, d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s}{\sin\frac{\tau}{2}} \sin((n+\tfrac{1}{2})\tau)\, d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s}{\tau} \frac{\tau}{\sin\frac{\tau}{2}} \frac{1}{2i} (e^{i\frac{\tau}{2}} e^{in\tau} - e^{-i\frac{\tau}{2}} e^{-in\tau})\, d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s}{\sin\frac{\tau}{2}} \frac{1}{2i} (e^{i\frac{\tau}{2}} e^{in\tau} - e^{-i\frac{\tau}{2}} e^{-in\tau})\, d\tau.
\end{aligned}$$

Protože je funkce

$$\tau \mapsto \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s}{\tau} \frac{\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}$$

integrovatelná dle předpokladu na na $(0, \delta)$, stejně jako je integrovatelná funkce

$$\tau \mapsto \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2s}{\sin\frac{\tau}{2}}$$

na (δ, π), oba integrály konvergují k 0 dle Věty 23.8. Tedy $s_n^f(t) - s \to 0$. $\square$

Věta 23.16 (důsledky Diniova kritéria)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *a* $t \in \mathbb{R}$.

(a) *Jestliže existují vlastní* $f(t-)$ *a* $f(t+)$ *a vlastní*

$$\lim_{\tau \to t_-} \frac{f(\tau) - f(t-)}{\tau - t}, \quad \lim_{\tau \to t_+} \frac{f(\tau) - f(t+)}{\tau - t},$$

potom $s^f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$. *Speciálně, jestliže existují vlastní* $f'_+(t)$ *a* $f'_-(t)$, *potom* $s^f(t) = f(t)$.

(b) *Jestliže existují* $\alpha > 0$, $\delta > 0$ *a* $K > 0$ *taková, že*

$$\forall \tau \in (-\delta, \delta) : |f(t+\tau) - f(t)| \leq K |\tau|^{\alpha},$$

potom $s^f(t) = f(t)$.

Důkaz. (a) Nalezneme $\delta > 0$ takové, že funkce

$$\tau \mapsto \frac{f(t+\tau) - f(t+)}{\tau}, \quad \tau \mapsto \frac{f(t-\tau) - f(\tau-)}{\tau}$$

jsou omezené na $(0,\delta)$. Označme $s=\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$. Potom je funkce

$$\tau \mapsto \frac{f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s}{\tau} = \frac{f(t+\tau)-f(t+)}{\tau} + \frac{f(t-\tau)-f(t-)}{\tau}$$

omezená, a tím spíše integrovatelná na $(0,\delta)$. Tvrzení tedy plyne z Diniova kritéria.

(b) Položme $s=f(t)$. Potom pro každé $\tau\in(0,\delta)$ platí

$$\frac{|f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s|}{\tau} \le \frac{|f(t+\tau)-f(t)|}{\tau} + \frac{f(t-\tau)-f(t)}{\tau} \le 2K\tau^{\alpha-1}.$$

Odtud plyne, že funkce

$$\tau \mapsto \frac{|f(t+\tau)+f(t-\tau)-2s|}{\tau}$$

je integrovatelná na $(0,\delta)$, a tedy tvrzení opět plyne z Diniova kritéria. $\square$

konec distanční 28. přednášky (25.5.2020) a konec semestru