MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020 POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

LUBOŠ PICK

Popis předmětu

Jde o čtvrtou část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy pro bakalářské obory. Věnuje se pokročilým partiím metrických prostorů, parametrickému pojetí křivkového a plošného integrálu, pokročilým partiím teorie číselných a zobecněných řad, absolutně spojitým funkcím, funkcím s konečnou variací a klasickému pojetí Fourierových řad. Kurs se skládá z přednášek a cvičení a je hodnocen zápočtem a zkouškou. Ke kursu je možné navštěvovat proseminář.

Přednáška se koná pro větší množství (několik desítek) studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity (pobyt u tabule atd.) se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku.

Cvičení se koná pro menší množství (15-25) studentů najednou. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tématiky, výjimečně se dokazují tvrzení doplňující přednášku. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

Proseminář je určen pro malé množství (typicky 15-25) studentů, kteří mají zájem o získání hlubších teoretických poznatků z matematické analýzy nad rámec povinné látky. Na prosemináři budou probírány hlavně početní příklady písemkové obtížnosti a teoretické úlohy, které se přímo týkají látky kurzu Matematická analýza 4. Zápočet se uděluje za účast (a aktivitu).

Zápočet

Zápočet bude udělován bezpodmínečně.

Zkouška

Zkouška bude písemná a bude obsahovat následujících šest otázek:

- soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty s pravou stranou (10 bodů),
- výpočet integrálu pomocí Gaussovy věty o divergenci, Greenovy věty, nebo area formule (10 bodů),
- Fourierova řada (10 bodů),
- formulace několika definic (4 body),
- formulace věty (4 body),
- formulace věty a její důkaz (4+18 bodů).

Minimální požadavek pro splnění zkoušky je získat alespoň 17 bodů z početní části (první tři otázky) a zároveň alespoň 17 bodů z teoretické části (poslední tři otázky). Celkové hodnocení zkoušky:

- **výborně**: splnění minimálního požadavku a celkem 51–60 bodů,
- **velmi dobře**: splnění minimálního požadavku a celkem 42–50 bodů,
- **dobře**: splnění minimálního požadavku a celkem 34–41 bodů,
- **neprospěl(a)**: nesplnění minimálního požadavku.

Na vypracování písemky bude alokováno 180 minut. Povoleny budou pouze psací potřeby. Termíny zkoušek jsou uvedeny v SIS.

Rozsah požadovaných znalostí pro teoretickou část zkoušky

Seznam definic (poznámka: klíčové pojmy nebudou požadovány).

- hustá množina, řídká množina
- množina první a druhé kategorie, residuální množina, Baireův prostor
- separabilní metrický prostor, ε-síť, totálně omezený metrický prostor
- kontrakce, neexpanzivní zobrazení, pevný bod
- souvislý a křivkově souvislý metrický prostor
- k-rozměrná Hausdorffova míra
- vektorový součin
- k-plocha
- tečný vektor, normálový vektor
- rozhraničující funkce, regulární bod hranice
- orientace $(n-1)$-plochy, orientace 1-plochy
- parametrická křivka, po částech regulární křivka, jednoduchá křivka, uzavřená křivka
- tok, divergence a rotace vektorového pole
- křivkový a plošný integrál prvního a druhého druhu
- hvězdicovitá množina, potenciál, potenciální pole
- kladná a záporná část čísla a funkce
- přerovnání řady
- Cauchyův součin řad
- zobecněná řada, součet zobecněné řady
- konvergentní, divergentní, absolutně konvergentní zobecněná řada
- horní a dolní derivace
- totální variace, funkce s omezenou variací, absolutně spojitá funkce
- Fourierovy koeficienty, Fourierova řada funkce, sinová řada, cosinová řada
- Dirichletovo jádro, Fejérovo jádro

Seznam vět a důkazů.

Metrické prostory III.

- charakterizace hustých množin (Věta 19.1) (bez důkazu)
- průnik hustých množin (Věta 19.2) (bez důkazu)
- charakterisace řídkých množin (Věta 19.3)
- vlastnosti řídkých množin (Věta 19.4) (bez důkazu)
- charakterisace prostorů druhé kategorie (Věta 19.5)
- charakterisace Baireových prostorů (Věta 19.6)
- Baireova věta (Věta 19.7)
- vnitřek podprostoru (Věta 19.8) (bez důkazu)
- algebraická dimenze Banachova prostoru (Věta 19.9) (bez důkazu)
- existence spojité funkce bez derivace (Věta 19.10) (bez důkazu)
- Banachova věta o kontrakci (Věta 19.11)
- o pevném bodu neexpanzivního zobrazení (Věta 19.12)
- o pevném bodu zobrazení, jehož mocnina je kontrakce (Věta 19.13) (bez důkazu)
- charakterisace separabilních prostorů (Věta 19.14)
- nutná podmínka separability (Věta 19.15) (bez důkazu)
- prostory ℓ^∞, c_0 a separabilita (Věta 19.16) (bez důkazu)
- totální omezenost a omezenost (Věta 19.17) (bez důkazu)
- totální omezenost a separabilita (Věta 19.18) (bez důkazu)
- kompaktnost a totální omezenost (Věta 19.19) (bez důkazu)
- kompaktnost, totální omezenost a úplnost (Věta 19.20)
- kompaktnost a otevřená pokrytí (Věta 19.21) (bez důkazu)
- charakterisace souvislých prostorů (Věta 19.22)
- spojitý obraz souvislého prostoru (Věta 19.23) (bez důkazu)
- souvislost uzávěru (Věta 19.24)

- souvislost sjednocení (Věta 19.25) (bez důkazu)
- normalita metrických prostorů (Věta 19.26) (bez důkazu)
- charakterisace souvislých množin (Věta 19.27) (bez důkazu)
- charakterisace komponent (Věta 19.28) (bez důkazu)
- souvislé podmnožiny $\mathbb{R}$ (Věta 19.29) (bez důkazu)
- souvislost souvislosti s křivkovou souvislostí (Věta 19.30) (bez důkazu)
- souvislost v NLP (Věta 19.31) (bez důkazu)
- struktura otevřených podmnožin $\mathbb{R}$ (Věta 19.32) (bez důkazu)
- aplikace souvislosti (Věta 19.33) (bez důkazu)

Křivkový a plošný integrál.

- Hausdorffova míra a vnější míra (Věta 20.1) (bez důkazu)
- vlastnosti vnější Hausdorffovy míry (Věta 20.2) (bez důkazu)
- metrická vnější míra a borelovské množiny (Věta 20.3) (bez důkazu)
- regularita Hausdorffovy míry (Věta 20.5) (bez důkazu)
- Hausdorffova míra a vnější Lebesgueova míra (Věta 20.6) (bez důkazu)
- vlastnosti Hausdorffovy míry (Věta 20.7) (bez důkazu)
- area formule (Věta 20.11) (bez důkazu)
- vlastnosti vektorového součinu (Věta 20.12)
- o úrovňové množině (Věta 20.13)
- popis tečného prostoru (Věta 20.14) (bez důkazu)
- lokální popis hranice (Věta 20.15) (bez důkazu)
- regulární body hranice (Věta 20.16) (bez důkazu)
- Gaussova věta o divergenci (Věta 20.17) (bez důkazu)
- Jordanova věta (Věta 20.18) (bez důkazu)
- regulární body křivky (Věta 20.19) (bez důkazu)
- Greenova věta (Věta 20.20) (bez důkazu)
- Greenova–Jordanova věta (Věta 20.21)(bez důkazu)
- lokální popis křivky (Věta 20.22) (bez důkazu)
- Stokesova věta (Věta 20.23) (bez důkazu)
- věta o potenciálu (Věta 20.24)
- hlavní věta teorie pole (Věta 20.25) (bez důkazu)

Číselné řady II.

- přerovnání absolutně konvergentní řady (Věta 21.1) (bez důkazu)
- Riemannova věta (Věta 21.2) (bez důkazu)
- Mertensova věta (Věta 21.3) (bez důkazu)
- Abelova věta o Cauchyově součinu (Věta 21.4)
- jednoznačnost součtu zobecněné řady (Věta 21.5) (bez důkazu)
- linearita součtu zobecněné řady (Věta 21.6) (bez důkazu)
- vlastnosti zobecněného součtu (Věta 21.7) (bez důkazu)
- srovnávací kritérium pro zobecněné řady (Věta 21.8) (bez důkazu)
- absolutní konvergence zobecněné řady (Věta 21.9) (bez důkazu)
- přerovnání zobecněné řady (Věta 21.10) (bez důkazu)
- spočetnost nosiče zobecněné řady (Věta 21.11)
- zobecněný součet na $\mathbb{N}$ (Věta 21.12)
- asociativita zobecněného součtu (Věta 21.13) (bez důkazu)
- Bolzanova–Cauchyova podmínka pro zobecněné řady (Věta 21.14) (bez důkazu)

Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací.

- míra vzoru a obrazu (Věta 22.1) (bez důkazu)
- derivace monotónní funkce (Věta 22.2) (bez důkazu)
- integrál derivace monotónní funkce (Věta 22.3) (bez důkazu)
- vztah omezené variace a monotonie (Věta 22.4)

- vlastnosti funkcí s omezenou variací (Věta 22.5) (bez důkazu)
- Luzinova N-vlastnost (Věta 22.8)
- integrál derivace absolutně spojité funkce (Věta 22.9) (bez důkazu)
- neurčitý Lebesgueův integrál (Věta 22.10) (bez důkazu)
- absolutní spojitost a neurčitý integrál (bez důkazu)
- integrace per partes pro Lebesgueův integrál (Věta 22.12) (bez důkazu)

Fourierovy řady.

- Fourierovy koeficienty (Věta 23.1) (bez důkazu)
- Fejérova věta (Věta 23.5) (bez důkazu)
- trigonometrická verze Weierstrassovy věty (Věta 23.6) (bez důkazu)
- konvergence v L^1-normě (Věta 23.7) (bez důkazu)
- Riemannovo–Lebesgueovo lemma (Věta 23.8)
- o lokalizaci (Věta 23.9)
- Fourierovy koeficienty určují funkci (Věta 23.10) (bez důkazu)
- Hardyova věta (Věta 23.12) (bez důkazu)
- omezená variace a Fourierovy koeficienty (Věta 23.13) (bez důkazu)
- Jordanovo–Dirichletovo kritérium (Věta 23.14) (bez důkazu)
- Diniovo kritérium (Věta 23.15) (bez důkazu)
- důsledky Diniova kritéria (Věta 23.16) (bez důkazu)

Vzor zadání prvních tří otázek

Příklad 1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - y, \\ y' &= x + y + e^t \sin(t). \end{aligned}$$

Příklad 2. Spočtěte tok vektorového pole $f(x, y, z) = (x, y, z)$ hranicí $H(\Omega)$ množiny Ω zadané předpisem

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\right\},$$

která je otevřená, omezená, neprázdná a splňuje $\mathcal{H}^2(H(\Omega)) < \infty$ (tato fakta již není třeba ověřovat). Ostatní kroky výpočtu zdůvodněte.

Příklad 3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(0, \pi]$ dána předpisem

$$f(t) = e^{-2t}, \quad t \in (0, \pi],$$

a má *sinovou* Fourierovu řadu. Rozhodněte, zda řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{4 + (2k+1)^2}.$$