MATEMATICKÁ ANALÝZA 4, NMMA202, LETNÍ SEMESTR 2019–2020
TEST H

LUBOŠ PICK

Početní část

Příklad H1. Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x' = x + y + \frac{1}{2}t^2,$$
$$y' = 4y - 2x + 5t^2.$$

Dále nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy splňující podmínky $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

Příklad H2. Nechť

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 8,\ x^2 > y^2 + z^2,\ x > 0\right\}.$$

Spočtěte $\mathcal{H}^2(H(\Omega))$.

Příklad H3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je pro $t \in (-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = e^{t+1}.$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 1}.$$

Teoretická část

Otázka H4. Napište definici pojmu: *parametrická křivka, po částech regulární křivka, jednoduchá křivka, uzavřená křivka.*

Otázka H5. Napište znění věty: *Bolzanova–Cauchyova podmínka pro zobecněné řady* (Věta 21.14).

Otázka H6. Zformulujte a dokažte větu: *Banachova věta o kontrakci* (Věta 19.11).

H1

Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Naleznite všechna maximální řešení soustavy

$$x' = x + y + \frac{1}{2}t^2$$

$$y' = 4y - 2x + 5t^2$$

a všechna maximální řešení splňující $x_0(0) = 1$, $y_0(0) = -1$.

Řešení

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & -1 & \frac{1}{2}t^2 \\ 2 & \lambda - 4 & 5t^2 \end{array}\right) (\lambda - 4) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & -1 & \frac{1}{2}t^2 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 & 0 & 3t^2 + t \end{array}\right)$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2 = \lambda^2 - \lambda - 4\lambda + 4 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$(\lambda - 4)\frac{1}{2}t^2 + 5t^2 = t - 2t^2 + 5t^2 = t + 3t^2$$

2. řádek

$$x'' - 5x' + 6x = 3t^2 + t$$

charakteristický polynom $\xi^2 - 5\xi + 6 = (\xi - 2)(\xi - 3)$, $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 3$

F.S.: e^{2t}, e^{3t}

speciální pravá strana $e^0((3t^2 + t + 0)\cos 0 + 0 \cdot \sin 0)$, 0 není kořen ch.p.

partikulární řešení hledáme ve tvaru $x_p(t) = At^2 + Bt + C$

$$x_p'(t) = 2At + B$$

$$x_p''(t) = 2A$$

Dosazení

$$2A - 5(2At + B) + 6(At^2 + Bt + C) = 2A - 10At - 5B + 6At^2 + 6Bt + 6C =$$

$$= 6At^2 + t(-10A + 6B) + (2A - 5B + 6C) = 3t^2 + t$$

$$6A = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$-5 + 6B = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$1 - 5 + 6C = 0 \Rightarrow C = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{2}{3}$$

$$x(t) = x_p(t) + [\text{F.S.}] = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{2}{3} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

1. řádek

$$x' = x + y + \frac{1}{2}t^2$$

$$y = x' - x - \frac{1}{2}t^2 = t + 1 + 2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{3t} - \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{2}{3} - c_1 e^{2t} - c_2 e^{3t} - \frac{1}{2}t^2$$

$$= -t^2 + \frac{1}{3} + c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{3t}$$

Obecné řešení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{2}{3} \\ -t^2 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Řešení počáteční podmínky $x_0(0) = 1$, $y_0(0) = -1$.

$$1 = \frac{2}{3} + c_1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{3} - c_2$$

$$-1 = \frac{1}{3} + c_1 + 2c_2$$

$$-1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - c_2 + 2c_2$$

$$-\frac{5}{3} = c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2$$

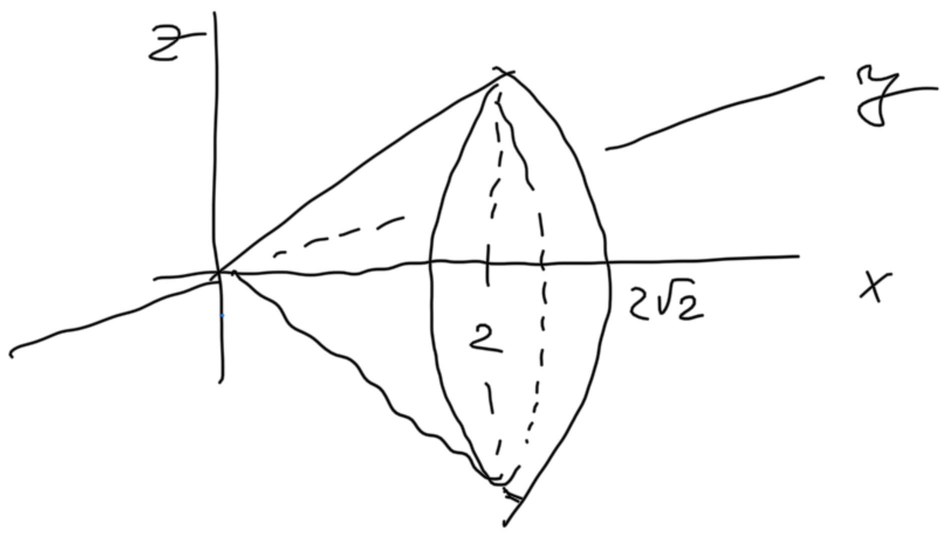
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + t + \frac{1}{2}t^2 + 2e^{2t} - \frac{5}{3}e^{3t} \\ \frac{1}{3} - t^2 + 2e^{2t} - \frac{10}{3}e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Příklad 42. Nechť

$$\Omega = \{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 < 8,\ x^2 > y^2+z^2,\ x > 0 \}.$$

Spočtěte $\mathcal{H}^2(H(\Omega))$.

Řešení. Použijeme area formuli pro $n=3$, $k=2$ a $f(x,y,z)=1$. Potom $k<n$ a f je borelovská.



Ze soustavy

$$x^2+y^2+z^2=8$$
$$x^2=y^2+z^2$$

vypočítáme $x^2 = 8-x^2$, tedy $x = \pm 2$.

Ze zadání plyne, že smysl má pouze kořen $x=2$.

Tedy $H(\Omega) = H_1(\Omega) \cup H_2(\Omega) \cup H_3(\Omega) \cup H_4(\Omega)$,

kde

$$H_1(\Omega) = \{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 8,\ x \in (2, 2\sqrt{2}] \},$$

$$H_2(\Omega) = \{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 = y^2+z^2,\ x \in (0,2) \},$$

$$H_3(\Omega) = \{ [0,0,0] \},$$

$$H_4(\Omega) = \{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ y^2+z^2 = 4,\ x = 2 \}.$$

Zřejmě platí $\mathcal{H}^2(H_3(\Omega)) = 0$. Množina $H_4(\Omega)$ je kružnice, což je lipschitzovský obraz omezeného intervalu, tedy $\mathcal{H}^1(H_4(\Omega)) < \infty$, a tedy $\mathcal{H}^2(H_4(\Omega)) = 0$. Protože $H_i(\Omega)$ jsou borelovské pro každé $i \in \{1,2,3,4\}$, plyne odtud, že $\mathcal{H}^2(H(\Omega)) = \mathcal{H}^2(H_1(\Omega)) + \mathcal{H}^2(H_2(\Omega))$.

Výpočet $\mathcal{H}^2(H_1(\Omega))$

Položme $G_1 = (0,2) \times (0, 2\pi)$

a
$$\varphi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \sqrt{8-r^2} \\ r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{pro } [r,\alpha] \in G_1 .$$

Potom G_1 je otevřená množina v G_2 a platí
$$H_1(\Omega) = \varphi(G_1) \cup \{[\sqrt{8-r^2}, r, 0], \ r \in [0,2)\}.$$

Funkce $r \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{8-r^2} \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$ je lipschitzovská na $[0,2)$,

tedy $\mathcal{H}^1(\{[\sqrt{8-r^2}, r, 0], \ r \in [0,2)\}) < \infty$,

takže $\mathcal{H}^2(\{[\sqrt{8-r^2}, r, 0], \ r \in [0,2)\}) = 0$.

Tudíž $\mathcal{H}^2(H_1(\Omega)) = \mathcal{H}^2(\varphi(G_1))$.

Jest
$$\varphi'(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{-r}{\sqrt{8-r^2}} & 0 \\ \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix},$$

takže

$\varphi'(r,\alpha)^T \cdot \varphi'(r,\alpha) =$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{8-r^2}} & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -r\sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{r}{\sqrt{8-r^2}} & 0 \\ \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\frac{r^2}{8-r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá, že

$$\operatorname{vol} \varphi'(r,\alpha) = \sqrt{\det \varphi'(r,\alpha)^T \cdot \varphi'(r,\alpha)} = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{8-r^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8r^2}{8-r^2}} = \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{8-r^2}} > 0$$

pro každá $[r,\alpha] \in G_1$. Platí $\varphi \in C^1(G_1)$, takže φ je regulární. Dokážeme, že φ je prosté.

Předpokládejme, že pro nějaká $[r_1,\alpha_1], [r_2,\alpha_2] \in G_1$ platí $\varphi(r_1,\alpha_1) = \varphi(r_2,\alpha_2)$. Potom z 1. složky vyplývá, že $r_1 = r_2$. Tedy

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \\ \& \quad \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Tudíž φ je prosté. Ověřili jsme platnost všech předpokladů area formule. Tedy

$$\mathcal{H}^2(\varphi(G_1)) \overset{AF}{=} \int_{G_1} \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{8-r^2}} \, d\lambda^2$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{8-r^2}} \, dr \, d\varphi$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_0^2 \frac{2r}{\sqrt{8-r^2}} \, dr$$

substituce: $\tau = 8-r^2$
$d\tau = -2r\,dr$

r	0	2
τ	8	4

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_4^8 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

$$= 4\sqrt{2}\pi\left(2\sqrt{2}-2\right) = \left(16-8\sqrt{2}\right)\pi.$$

Výpočet $\mathcal{H}^2(H_2(\Omega))$

Položme $G_2 = (0,2) \times (0,2\pi)$

$$\text{a} \quad \psi(x,\alpha) = \begin{pmatrix} x \\ x\cos\alpha \\ x\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{pro } [x,\alpha] \in G_2.$$

Potom G_2 je otevřená množina v $\mathbb{R}^2$ a

$$H_2(\Omega) = \psi(G_2) \cup \left\{[x,x,0],\ x \in (0,2)\right\}.$$

Množina $\{[x,x,0],\ x \in (0,2)\}$ je lipschitzovským obrazem omezeného intervalu, a tedy

$$\mathcal{H}^1(\{[x,x,0],\ x \in (0,2)\}) < \infty,$$

takže

$$\mathcal{H}^2(\{[x,x,0],\ x \in (0,2)\}) = 0.$$

To znamená, že $\mathcal{H}^2(H_2(\Omega)) = \mathcal{H}^2(\psi(G_2))$.

Jest

$$\psi'(x,\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\alpha & -x\sin\alpha \\ \sin\alpha & x\cos\alpha \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\psi'(x,\alpha)^T \cdot \psi'(x,\alpha) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -x\sin\alpha & x\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\alpha & -x\sin\alpha \\ \sin\alpha & x\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$\operatorname{vol} \psi'(x,\alpha) = \sqrt{\det \psi'(x,\alpha)^T \cdot \psi'(x,\alpha)}$$

$$= \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x > 0$$

pro každá $[x,\alpha] \in G_2$. Dále $\psi \in C^1(G_2)$, takže Ψ je regulární! Dokážeme, že Ψ je prosté!

Předpokládejme, že pro nějaká $[x_1,\alpha_1]$, $[x_2,\alpha_2] \in G_2$

platí $\Psi(x_1,\alpha_1) = \Psi(x_2,\alpha_2)$. Potom z 1. složky plyne,

že $x_1 = x_2$, a tedy

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \cos\alpha_2 \\ \& \ \sin\alpha_1 &= \sin\alpha_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2,$$

takže Ψ je prosté! Ověřili jsme platnost všech předpokladů area formule. Tedy

$$\mathcal{H}_2(H_2(\Omega)) \overset{AF}{=} \int_{G_2} \sqrt{2}x \, d\lambda^2$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 x \, dx \, d\alpha$$

$$= 2\pi\sqrt{2} \int_0^2 x \, dx = 2\pi\sqrt{2} \cdot \frac{2^2}{2} = 4\sqrt{2}\pi.$$

Závěr

Platí $\mathcal{H}^2(H(\Omega)) = (16 - 8\sqrt{2})\pi + 4\sqrt{2}\pi$

$$= \underline{\underline{(16 - 4\sqrt{2})\pi}}.$$

Hodnocení popis $H(\Omega)$ ... $\frac{1}{2}$

$H_3(\Omega)$, $H_4(\Omega)$ ... 1

$H_1(\Omega)$ ... 4

$H_2(\Omega)$ ... 4

zášeň ... $\frac{1}{2}$

Příklad 43 Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi,\pi]$ definována předpisem

$$f(t) = e^{t+1}.$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtete číselnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

Řešení. Položme

$$f(t) = e^{t-2k\pi+1} \quad \text{pro } t \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Potom $f \in \mathcal{P}^{2\pi}$. Dále je f rostoucí na $(-\pi,\pi]$, a tedy $f \in BV([-\pi,\pi])$. Navíc je f spojitá na $(-\pi,\pi]$. Spočítáme Fourierovy koeficienty funkce f. Jest

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t+1}\,dt = \frac{e}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t}\,dt = \frac{e}{\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)$$

$$= \frac{2e}{\pi}\sinh\pi.$$

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t+1}\cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{e}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t}\cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{e}{\pi}\left[e^t \frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{e}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \frac{\sin(kt)}{k}\,dt$$

$$= -\frac{e}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \frac{\sin(kt)}{k}\,dt$$

$$= -\frac{e}{\pi}\left[e^t \frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{e}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t \frac{-\cos(kt)}{k^2}\,dt$$

$$= \frac{e}{\pi k^2}\left(e^{\pi}\cos(k\pi) - e^{-\pi}\cos(k\pi)\right) - \frac{e}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\cos(kt)\,dt$$

$$= \frac{e(-1)^k}{\pi k^2}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) - \frac{a_k}{k^2}\,.$$

Tedy $$a_k\left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \frac{(-1)^k\, e\, 2\sinh\pi}{\pi k^2}$$

tj.: $$a_k = \frac{(-1)^k\, e\, 2\sinh\pi}{\pi(k^2+1)} \qquad \text{pro } k\in\mathbb{N}.$$

Podobně,

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{t+1}\sin(kt)\,dt = \frac{e}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\sin(kt)\,dt$$

$$= \frac{e}{\pi}\left[e^t\sin(kt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{e}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t k\cos(kt)\,dt$$

$$= -\frac{ek}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\cos(kt)\,dt$$

$$= -k a_k = \frac{(-1)^{k+1} e\, 2k\sinh\pi}{\pi(k^2+1)}, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Tedy

$$s^f(t) = \frac{e}{\pi}\sinh\pi + \frac{2e\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}\left(\cos(kt) - k\sin(kt)\right)$$

pro $t \in \mathbb{R}$. Protože $f \in BV([-\pi,\pi])$, podle

Jordanova–Dirichletova kritéria platí

$$s^f(t) = \begin{cases} e^{t-2k\pi+1} & \text{pro } t \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi],\ k \in \mathbb{Z}, \\ \cosh\pi & \text{pro } t = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Protože f je spojitá na $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ pro každé

$k \in \mathbb{Z}$, platí $s^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na každém z těchto intervalů.

Maximalita těchto intervalů plyne z Mooreovy–Osgoodovy

věty, protože f není spojitá v žádném z bodů

$(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $t=0$ platí

$$\frac{e}{\pi}\sinh\pi + \frac{2e\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1} = e,$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1} = \left(1 - \frac{\sinh\pi}{\pi}\right)\frac{\pi}{2\sinh\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2\sinh\pi} - \frac{1}{2}.$$